EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ — Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I — (30 de puncte)

5p 1. Determinați numerele întregi x care verifică relația $-1 \le \frac{x+1}{3} < 1$.

5p 2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x^2-2x+3$.

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2-\sqrt{2-x}=x$.

5p 4. Calculați $\frac{P_5}{C_5^2+A_6^2}$.

5p 5. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,3)$ și $B(-1,0)$. Scrieți ecuația dreptei AB.

5p 6. Calculați perimetrul triunghiului MNP știind că $MN=2$, $MP=3$ și $m(\sphericalangle NMP)=120^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea — (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p a) Calculați determinantul matricei A.

5p b) Calculați A^2-2A+I_2.

5p c) Determinați matricele $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X^2=A$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x*y=xy-3x-3y+12$.

5p a) Demonstrați că $x*y=(x-3)(y-3)+3$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x=19$.

5p c) Știind că legea "$*$" este asociativă, calculați $\sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{2}*\ldots*\sqrt[3]{2011}$.

SUBIECTUL al III-lea — (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-x$.

5p a) Demonstrați că $f'(x)-f(x)=x-1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p c) Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f spre $-\infty$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$.

5p a) Calculați $\int_1^e\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)dx$.

5p b) Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x=1$ și $x=2$.

5p c) Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

M2/ MODEL 2011/ I/ 1 VIOG

Găsiți numerele întregi x care verifică:

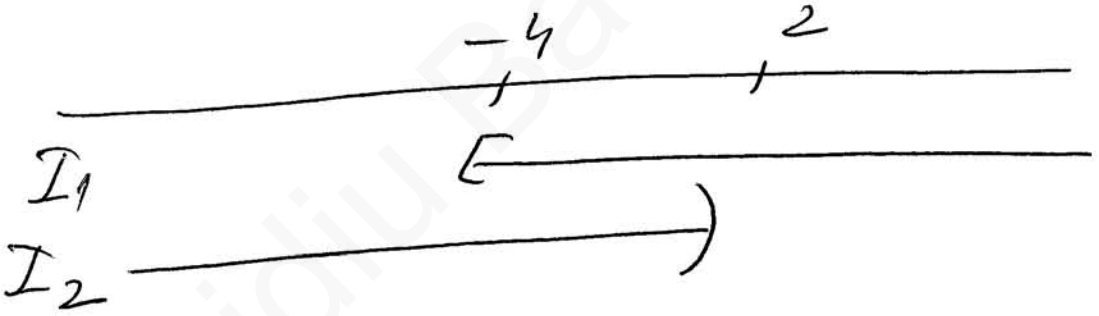
$$-1 \leq \frac{x+1}{3} < 1$$

$E_1)$ $-1 \leq \frac{x+1}{3} < 1 \mid \cdot 3$

$-3 \leq x+1 < 3$

$E_2)$ $\begin{cases} -3 \leq x+1 \\ x+1 < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 \leq x \Rightarrow x \in [-4, \infty) = I_1 \\ x < 2 \Rightarrow x \in (-\infty, 2) = I_2 \end{cases}$

$E_3)$



$I_1 \cap I_2 = [-4, 2)$

$E_4)$ x cer soluții întregi $\Rightarrow x \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$

Prof. Ovidiu Băcescu

Găsiți coord. pct de $\cap$ a graficelor

$f(x)=2x-1$ și $g(x)=x^2-2x+3$

E_1) Fiecărui pct îi scriem: $y=2x-1$ și $y=x^2-2x+$

E_2) Pt a găsi pct de $\cap$: $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=x^2-2x+3 \end{cases}$

E_3) $2x-1=x^2-2x+3 \Rightarrow x^2-4x+4=0$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\frac{4\pm 0}{2}=2$$

E_3) pct $\Rightarrow$ are x și y

în $y=2x-1$, unde $x=2 \Rightarrow y=4-1 \Rightarrow y=3$

$\Rightarrow M(2;3)$

Prof. Ovidiu Bădescu

M2/ MODEL 2011/ I/3 V106

Rezolvați în $\mathbb{R}$: $2-\sqrt{2-x}=x$

E_1) aduc la forma $\sqrt{f(x)}=g(x)$, apoi pun condiții $\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$

E_2) $2-\sqrt{2-x}=x$

$2-x=\sqrt{2-x} \Rightarrow \sqrt{2-x}=2-x$

E_3) Cond.: $\begin{cases} 2-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 2 \Rightarrow x\in(-\infty,2]=I_c \\ 2-x\geq 0 \end{cases}$

E_4) $\sqrt{2-x}=2-x \mid (\,)^2$

$2-x=(2-x)^2 \Rightarrow 2-x=4-4x+x^2$

$x^2-3x+2=0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}$ $\begin{matrix} 2\in I_c \\ 1\in I_c \end{matrix}$

Prof. Ovidiu Badescu

M2/MODEL 2011/I/4

V106

Calculați: $\dfrac{P_5}{C_5^2+A_6^2}$

$E_1)\ P_n = n! \Rightarrow P_5 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$

$E_2)\ C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow C_5^2 = \dfrac{5!}{2!\cdot 3!} = \dfrac{3!\cdot 4\cdot 5}{2!\cdot 3!} = 10$

$E_3)\ A_6^2 = \dfrac{n!}{(n-k)!} \Rightarrow A_6^2 = \dfrac{6!}{4!} = \dfrac{4!\cdot 5\cdot 6}{4!} = 30$

$E_4)\ N = \dfrac{P_5}{C_5^2+A_6^2} = \dfrac{120}{10+30} = 3$

Prof. Ovidiu Bădescu

M2/ MODEL 2011/I/5 V106

$A(2;3)$, $B(-1;0)$

Se cere ec. dreptei AB

E_1) ec. AB este $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$

E_2) ec. AB este $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow x - y + 0 + 3 - 0 - 2y = 0$

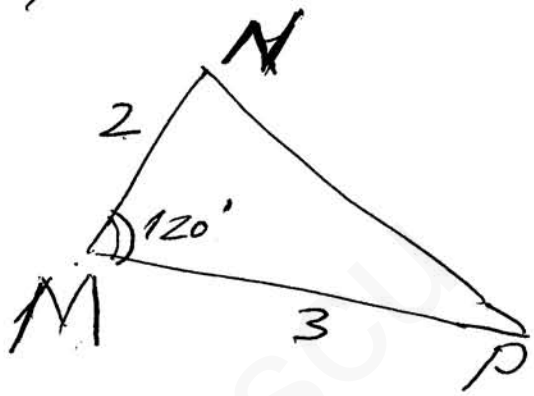
$\Rightarrow x - 3y + 3 = 0 \mid : 3$

$\boxed{x - y + 1 = 0}$

Prof. Dorin Badescu

M2 / MODEL 2011 / I 6

Se cere perimetrul ΔMNP dacă $MN=2$, $MP=3$ și $m(\sphericalangle NMP)=120^\circ$



$E_1)\ P_{MNP} = MN+NP+PM$

$E_2)$ T. cos.: $NP^2 = MN^2 + MP^2 - 2MN\cdot NP\cdot \cos M$

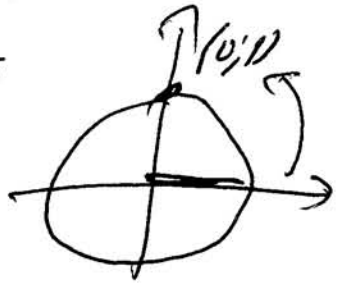
$\Rightarrow NP^2 = 4+9-2\cdot 2\cdot 3\cos 120^\circ$

$NP^2 = 13 - 12\cos 120^\circ$

$E_3)\ \cos 120^\circ = \cos(90^\circ+30^\circ) =$

$= \cos 90^\circ \cos 30^\circ - \sin 90^\circ \sin 30^\circ =$

$= 0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$



$E_4)\ NP^2 = 13 - 12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 13+12 = 25$

$NP = 5$

$E_5)\ P = 2+3+5 = 10$

Prof. Ovidiu Băcescu

Fie $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, calculați $\det A$

$E_1)$ $\det A=\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=1-0=1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, calculați A^2-2A+I_2

E1) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0&2+2\\0+0&0+1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$

E2) $A^2-2A+I_2=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&4\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1-2+1&4-4+0\\0-0+0&1-2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O_2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, determinați matricele $X\in M_2(\mathbb{R})$ cu $X^2=A$

$E_1)$ $X\in M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$E_2)$ $X^2=X\cdot X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix}$

$E_3)$ $X^2=A \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc=1 & (1)\\ b(a+d)=2 & (2)\\ c(a+d)=0 & (3)\\ bc+d^2=1 & (4)\end{cases}$

$E_4)$ Din (3) $\Rightarrow c=0$ sau $a+d=0$

Dacă $a+d=0 \xrightarrow{(2)} b(a+d)=0$ fals

pt că $b(a+d)=2$ rezultă $\boxed{c=0}$

$E_5)$ înlocuim $\xrightarrow{(1)} a^2+0=1\Rightarrow a^2=1\Rightarrow$

$\Rightarrow a=\pm 1$

înlocuim în (4) $\Rightarrow d^2=1\Rightarrow d=\pm 1$

$E_6)$ $\underline{a=1,\ d=1} \xrightarrow{(2)} b\cdot 2=2\Rightarrow \underline{b=1}$

$a=1, d=-1 \Rightarrow a+d=0$ fals cu (2)

$a=-1, d=1 \Rightarrow a+d=0$ fals cu (2)

$a=-1, d=-1 \xrightarrow{(2)} b\cdot(-2)=2\Rightarrow \boxed{b=-1}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ sau $X=\begin{pmatrix}-1&-1\\0&-1\end{pmatrix}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x * y = xy - 3x - 3y + 12$

Arătați că $x * y = (x-3)(y-3) + 3$

E_1) Calculăm $(x-3)(y-3)+3 =$

$= xy - 3x - 3y + 9 + 3 =$

$= xy - 3x - 3y + 12$

$\Rightarrow$ egalitate

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x*x=19$

dacă $x*y=xy-3x-3y+12$

$E_1)$ $x*x=19 \Rightarrow$

$\Rightarrow x\cdot x-3x-3x+12=19$

$E_2)$ $x^2-6x+12=19$

$\Rightarrow x^2-6x-7=0$

$E_3)$ $x_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot(-7)}}{2\cdot 1}=$

$=\dfrac{6\pm\sqrt{36+28}}{2}=\dfrac{6\pm\sqrt{64}}{2}=$

$=\dfrac{6\pm 8}{2}\begin{cases}\dfrac{14}{2}=7\\ \dfrac{-2}{2}=-1\end{cases}$

$E_4)$ $x\in\{-1,7\}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $x*y = xy-3x-3y+12$. Se știe că $x*y=(x-3)(y-3)+3$, calculați $\sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{2}*\ldots*\sqrt[3]{2011}$

E_1) Din ipoteză $\Rightarrow$

$\Rightarrow x*3=(x-3)(3-3)+3=0+3=3$

și că $3*x=(3-3)(x-3)+3=0+3=3$

E_2) $\sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{2}*\ldots*\sqrt[3]{2011}=$

$=\left(\sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{2}*\ldots*\sqrt[3]{26}\right)*\sqrt[3]{27}*\left(\sqrt[3]{28}*\ldots*\sqrt[3]{2011}\right)$

$=\underbrace{\left(\sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{2}*\ldots*\sqrt[3]{26}\right)}_{x}*3*\left(\sqrt[3]{28}*\ldots*\sqrt[3]{2011}\right)$

$=3*\underbrace{\left(\sqrt[3]{28}*\ldots*\sqrt[3]{2011}\right)}_{x}$

$=3$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x) = e^x - x$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Demonstrați că: $f'(x) - f(x) = x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$E_1)$ $f'(x) = (e^x - x)' = e^x - 1$.

$E_2)$ $f'(x) - f(x) = (e^x - 1) - (e^x - x) =$

$= e^x - 1 - e^x + x = x - 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$

Scrieți ecuația tangentei la G_f în punctul de abscisă $x = 0$

E_1) Ec. tg în $x = \alpha$ la G_f este

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

E_2) Se cere ec în $x = 0 \Rightarrow$

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

E_3) $f(0) = e^0 - 0 = 1 - 0 = 1$

E_4) Pt a calcula $f'(0)$, calculăm întâi $f'(x)$, apoi înlocuim pe x cu 0

E_5) $f'(x) = (e^x - x)' = e^x - 1$

$f'(0) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

E_6) Ec. tg.: $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

adică $y - 1 = 0(x - 0)$

$y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x) = e^x - x$, determinați ecuația asimptotei la G_f spre $-\infty$

E_1) <u>as. orizontală</u>:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (e^x - x) \overset{e^{-\infty} + \infty}{=\!=\!=} \frac{1}{e^{\infty}} + \infty = \infty$$

$\Rightarrow G_f$ nu are as. oriz spre $-\infty$

E_2) <u>as. oblică</u> este $y = mx + n$ unde

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - x}{x} \overset{\frac{\infty}{-\infty}}{=\!=\!=} \overset{l'H}{}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{(e^x - x)'}{x'} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{1} \overset{e^{-\infty} - 1}{=\!=\!=} -1 \in \mathbb{R}$$

$$n = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to -\infty} (e^x - x + x)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} e^x \overset{e^{-\infty}}{=\!=\!=} 0 \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{e^{\infty}}$$

$\Rightarrow y = mx + n$ adică

$y = -x$ as. oblică spre $-\infty$

Prof. Ovidiu Badescu

V106
IV 29)

Fie $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$

Calculați $\int_1^e \left(f(x) - \frac{1}{x+1}\right) dx$

$E_1)$ $I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+1}\right) dx$

$$= \int_1^e \frac{1}{x} dx$$

$E_2)$ $I = \ln|x| \Big|_1^e =$

$$= \ln e - \ln 1 =$$

$$= 1 - 0 = 1$$

Prof. Ovidiu Badescu

V106
II 26)

Fie $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$, calculați aria dintre G_f, axa Ox și dreptele $x=1$ și $x=2$.

$E_1)$ $\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)|\,dx \Rightarrow$ în cazul nostru

$$\mathcal{A} = \int_1^2 \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right| dx$$

$E_2)$ Dar, $x \in [1;2] \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > 0$

$$\Rightarrow \mathcal{A} = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= \ln|x| \Big|_1^2 + \frac{\ln|x+1|}{1} \Big|_1^2 =$$

$$= (\ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{0}) + (\ln 3 - \ln 2) = \ln 3$$

Obs.: $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + C$

Ex.: $\int \frac{1}{-3x+2}\,dx = \frac{\ln|-3x+2|}{-3} + C$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$ și $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$. Se cere volumul generat de g V106 II 2c)

$E_1)\ V=\pi\int_a^b g^2(x)dx \to$ în cazul nostru $V=\pi\int_1^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)^2dx=$

$$=\pi\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\pi\Big(\underbrace{\int_1^2\frac{1}{x^2}dx}_{I_1}+\underbrace{\int_1^2\frac{1}{(x+1)^2}dx}_{I_2}+2\underbrace{\int_1^2\frac{1}{x^2+x}dx}_{I_3}\Big)$$

$E_2)$ Pt $I_1=\int_1^2 x^{-2}dx=\frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^2=-\frac{1}{x}\Big|_1^2=$

$$=-\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{1}\right)=\frac{1}{2}$$

$E_3)\ I_2=\int_1^2(x+1)^{-2}dx=\frac{(x+1)^{-1}}{-1}\Big|_1^2=-\frac{1}{x+1}\Big|_1^2=$

$$=-\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{1}\right)=\frac{1}{6}$$

$E_4)\ I_3=\int_1^2\frac{1}{x^2+x}dx\overset{\text{forma canonică}}{=\!=}\int_1^2\frac{1}{1(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}dx\ \overset{\substack{x+\frac{1}{2}=t\\ dx=dt}}{=\!=}$

$=\int_{3/2}^{5/2}\frac{1}{t^2-(\frac{1}{2})^2}dt=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}}\right|\Big|_{3/2}^{5/2}$ se încorcește

Prof. Ovidiu Bădescu