Examenul de bacalaureat 2011
Proba E.c)
Proba scrsă la MATEMATICĂ

Varianta 7

Filieră teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filieră vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1. Calculați modulul numărului complex $z=(3+4i)(5-12i)$
2. Punctul $V(2,3)$ este vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+ax+b$. Calculați $f(3)$
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left|\sqrt{x}-1\right|=2$
4. Determinați numerele naturale $n\geq 2$ pentru care $C_n^2\leq 4A_n^1$
5. Fie $G(1,0)$ central de greutate al triunghiului ABC, unde $A(2,5), B(-1,-3)$. Determinați coordonatele punctului C.
6. Calculați raza cercului înscris în triunghiulu ABC știind că $AB=AC=5, BC=8$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ a & 1 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}, a\in\mathbb{Z}$.
   a) Calculați $\det A$
   b) Arătați că $rang\ A=3, \forall a\notin\mathbb{Z}$
   c) Determinați valorile întregi ale lui a știind că matricea A^{-1} are toate elementele numere întregi.
2. Se consideră numerele reale a,b,c și polinomul $f=X^4+aX^3+bX^2+cX+36\in\mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$
   a) Calculați $a+b+c$ dacă restul împărțirii lui f la $X-1$ este 40.
   b) Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{1}{3}$
   c) Arătați că dacă $a=6$ și $b=8$, atunci polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-4\ln x$.
   a) Arătați că f este strict descrescătoare pe $(0,1]$
   b) Determinați asimptotele verticale pentru graficul funcției f
   c) Demonstrați că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, există un unic $x_n\in(0,1]$ pentru care $f(x_n)=n$
2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x$ și $I_n=\int_0^1 x^n f(x)dx, n\geq 3$.
   a) Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției f, axa Ox și de dreptele de ecuații $x=0, x=\frac{\pi}{2}$
   b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.
   c) Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}, I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^n(x)dx$ este convergent

BAC 2011/M7/ I 1

7108
I 1

$z=(3+4i)(5-12i)$

Se cere $|z|=?$

---

met I:

$E_1)\ |z|=|(3+4i)(5-12i)|=|3+4i|\cdot|5-12i|$

$E_2)\ |z|=\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{5^2+(-12)^2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{169}=5\cdot13=65$

met II:

$E_1)\ z=15-36i+20i-48i^2$

$z=15-16i+48$

$z=63-16i$

$E_2)\ |z|=\sqrt{63^2+(-16)^2}=\sqrt{3969+256}$

$|z|=\sqrt{4225}$

$E_3)$ pt a calcula $\sqrt{4225}$, îl încadrăm între 2 pătrate perfecte

$40^2=1600;\ 50^2=2500;\ 60^2=3600;\ 70^2=4900$

calc. $65^2=4225$

$\Rightarrow\sqrt{4225}=65$

Prof. Ovidiu Bădescu

$V(2;3)$ este vârful parabolei asociate funcției $f(x)=x^2+ax+b$.

Se cere $f(3)$

$E_1)$ $V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a}=2 \\ -\frac{\Delta}{4a}=3 \end{cases}$

$E_2)$ $-\frac{b}{2a}=2 \Rightarrow -\frac{a}{2\cdot 1}=2 \Rightarrow -a=4$

$\Rightarrow a=-4$

$E_3)$ înlocuim în $f(x) \Rightarrow f(x)=x^2-4x+b$

$E_4)$ $-\frac{\Delta}{4a}=3 \Rightarrow -\frac{16-4b}{4\cdot 1}=3$

$\Rightarrow -16+4b=12 \Rightarrow 4b=12+16$

$4b=28 \Rightarrow b=7$

$E_5)$ $f(x)=x^2-4x+7$

$f(3)=9-12+7$

$f(3)=16-12=4$

Prof. Ovidiu Bădescu

BAC 2011/V7/ I / 3

Rezolvați: $|\sqrt{x}-1|=2$

E_1) Cond.: $x \geq 0 \Rightarrow x \in [0;\infty) = I_C$

E_2) Caz I: $\sqrt{x}-1=2 \Rightarrow \sqrt{x}=3 \mid ()^2 \Rightarrow x=9 \in I_C$

$\Rightarrow x=9$ soluție

Caz II: $\sqrt{x}-1=-2 \Rightarrow \sqrt{x}=-1$ fals

$\sqrt{}$ e orice radical e pozitiv

Prof. Ovidiu Bădescu

BAC 2011/V7/ I/4

T108
I/4

Găsiți numerele naturale n, $n \geq 2$ pentru care: $C_n^2 \leq 4 \cdot A_n^1$

$E_1)$ $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{(n-2)!(n-1)n}{2!(n-2)!} = \frac{(n-1)n}{2}$

$A_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-1)!} = n$

$E_2)$ înlocuim $\Rightarrow \frac{(n-1)n}{2} \leq 4 \cdot n$

$(n-1)n \leq 8n \Rightarrow n^2 - n \leq 8n$

$n^2 - 9n \leq 0 \Rightarrow n(n-9) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} n_1 = 0 \\ n_2 = 9 \end{cases}$

$E_3)$

n		0		9	
n^2-9n	$+ +$	0	$- - - - -$	0	$+ +$

$\left.\begin{array}{l} \text{Dar } n^2 - 9n \leq 0 \Rightarrow n \in [0;9] \\ \text{Dar, } n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow n \in \{2; 3; 4; 5; \dots; 9\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

BAC 2017 (V7) I 5

Fie $G(1;0)$ centrul de greutate al ΔABC unde $A(2;5)$, $B(-1;-3)$. Găsiți coord. pct. C

$$E_1) \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

$$E_2) \begin{cases} 1 = \dfrac{2-1+x_C}{3} \\ 0 = \dfrac{5-3+y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 1 + x_C \Rightarrow x_C = 2 \\ 0 = 2 + y_C \Rightarrow y_C = -2 \end{cases}$$

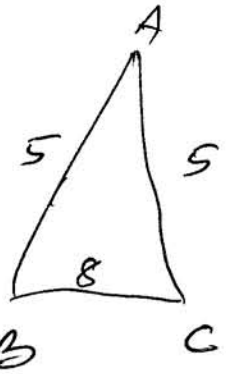
$$\Rightarrow C(2;-2)$$

Prof. Ovidiu Bădescu

BAC 2011 (V7) I 6

T 108
I 6

Găsiți raza cercului înscris în ΔABC dacă $AB=AC=5$ și $BC=8$



$E_1) r = \frac{S}{p}$

$E_2) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+5+8}{2} = \frac{18}{2} = 9$

$S = \sqrt{9(9-5)(9-5)(9-8)} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1} = 3 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow S = 12$

$E_3) r = \frac{S}{p} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calculați $\det A$

E1) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 2 + 6 + 0 + 3 - 0 - 4a$

$= 9 - 4a$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{Z}$

Arătați că rang $A = 3$, $\forall a \in \mathbb{Z}$

$E_1)$ $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 2+6+0+3-0-4a =$

$= 9-4a$

$E_2)$ Dacă $\det A = 0 \Leftrightarrow 9-4a=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \frac{9}{4} \notin \mathbb{Z}$, fals (nu că în ipoteză $a \in \mathbb{Z}$)

$\Rightarrow \det A \neq 0$, $\forall a \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ rang $A = 3$, $\forall a \in \mathbb{Z}$

Prof. Ovidiu Bădescu

T108
II 1c)

Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ cu $a\in\mathbb{Z}$

Găsiți valorile întregi ale lui a pentru care matricea A^{-1} are toate elementele numere întregi

---

$E_1)$ $\det A = 2+6+0+3-0-4a = 11-4a$

$E_2)$ pt ca să $\exists A^{-1}$ trebuie ca $11-4a\neq 0 \Rightarrow a\neq \frac{11}{4}$, adev. pt că $a\in\mathbb{Z}$, calculăm $A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*$

$E_3)$ $A^t=\begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, calculăm $A^*=\begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{13}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* \\ a_{31}^* & a_{32}^* & a_{33}^* \end{pmatrix}$

$E_4)$ $a_{11}^*=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2$; $a_{12}^*=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-4$

$a_{13}^*=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=3$; analog se calculează toate

$E_5)$ $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{2}{11-4a} & \frac{4}{11-4a} & \frac{3}{11-4a} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

$E_6)$ pentru ca toate elementele lui A^{-1} să fie întregi

trebuie ca $11-4a\,|\,2$, $11-4a\,|\,4$, $11-4a\,|\,3$

Din $11-4a\,|\,2$, $11-4a\,|\,3 \Rightarrow 11-4a\,|\,(3-2)$

$\Rightarrow 11-4a\in D_1 \Rightarrow 11-4a=\{\pm 1\}$

$E_7)$ $11-4a=1 \Rightarrow 4a=10 \Rightarrow a=\frac{5}{2}\notin\mathbb{Z}$

$11-4a=-1 \Rightarrow 4a=12 \Rightarrow a=3$ valoare posibilă

$E_8)$ se calculează pt $a=3$ matricea A^{-1} și se arată că are toate elementele întregi

Prof. Ovidiu Bădescu

V108

II 2a)

Fie $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + 36$

Calculați $a+b+c$ dacă restul lui $f:(X-1)$ este 40

E1) restul lui $f:(X-1)$ este $f(1)$

$\Rightarrow f(1) = 40$

E2) $\Rightarrow 1 + a + b + c + 36 = 40 \Rightarrow$

$a + b + c = 3$

Prof. Ovidiu Bădescu

V108
II 26)

Fie $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + 36$

Determinați $c \in \mathbb{R}$ dacă $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{1}{3}$

$E_1)$ $\frac{x_2x_3x_4}{1} + \frac{x_1x_3x_4}{1} + \frac{x_1x_2x_4}{1} + \frac{x_1x_2x_3}{1} = \frac{S_3}{S_4}$

$E_2)$ $\begin{cases} S_1 = -\frac{a}{1} \\ S_2 = \frac{b}{1} \\ S_3 = -\frac{c}{1} \\ S_4 = \frac{36}{1} \end{cases} \Rightarrow \frac{S_3}{S_4} = \frac{-c}{36}$

$E_3)$ Dar, din ip $\Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{-c}{36} = \frac{1}{3} \Rightarrow -3c = 36$

$\Rightarrow c = \frac{36}{-3} = -12$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + 36 \in \mathbb{R}[X]$

Dacă $a = 6$ și $b = 18$, arătați că f nu are toate rădăcinile reale

---

E_1) Dacă se nimerește ca $S_1^2 - 2S_2 < 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + \dots < 0$

$\Rightarrow f$ nu are toate rădăcinile reale

Dacă se nimerește ca $S_1^2 - 2S_2 = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + \dots = 0$

$\Rightarrow f$ are toate rădăcinile reale dacă și numai dacă toate rădăcinile sunt egale cu 0

Dacă $S_1^2 - 2S_2 > 0 \Rightarrow$ nu știm dacă f are sau dacă f nu are toate răd. reale

E_2) $f = X^4 + 6X^3 + 18X^2 + cX + 36$

E_3) $S_1 = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{1} = -6$

$S_2 = \frac{c}{a} = \frac{18}{1} = 18$

$S_1^2 - 2S_2 = (-6)^2 - 2 \cdot 18 = 36 - 36 = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + \dots = 0$

E_4) Dacă f ar avea toate rădăcinile reale ar rezulta că toate sunt egale cu 0, însă cum $f(0) = 36 \neq 0 \Rightarrow$ contradicție $\Rightarrow f$ nu are toate rădăcinile reale

Prof. Ovidiu Badescu

V108
III 1a)

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-4\ln x$
Arătați că f s $\searrow$ pe $(0;1]$

E1) $f'(x)=(x^4-4\ln x)'=4x^3-4\cdot\frac{1}{x}=$

$=\frac{4x^4-4}{x}=\frac{4(x^4-1)}{x}$

E2) $f'(x)=0\Rightarrow x^4-1=0\Rightarrow x^4=1\Rightarrow x=\pm 1$

Dar, $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}\Rightarrow x=1$

E3)

x	0		1	
f'	//	$-$	0	$+$
f	//	$\searrow$		$\nearrow$

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4-1\right)}{\frac{1}{2}}<0\Rightarrow f'(x)<0,\ \forall x\in(0;1)$

$\Rightarrow f_S\searrow$ pe $(0;1)$

$f'(2)=\frac{4(2^4-1)}{2}>0\Rightarrow f'(x)>0,\ \forall x\in(1;\infty)$

$\Rightarrow f_S\nearrow$ pe $(1;\infty)$

E4) Din tabel $\Rightarrow f'(x)\le 0,\ \forall x\in(0;1]$ și $f'(x)=0$
doar în $x=1\Rightarrow f_S\searrow$ pe $(0;1]$

Prof. Ovidiu Badescu

V108
II 96)

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-4\ln x$

Determinați asimptotele verticale ale G_f

E_1) asimpt verticale se calculează în capetele deschise și finite ale D_f, în cazul nostru în $x=0$

E_2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x^4-4\ln x)\underset{\text{F.N.}}{=\!=\!=}0-4\cdot(-\infty)=\infty\notin\mathbb{R}$

$\Rightarrow x=0$ asimpt verticală la dreapta

Prof. Ovidiu Bădescu

V108
III 1c)

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-4\ln x$

Demonstrați că $\forall n\in\mathbb{N}^*$ există un singur $x_n\in(0;1]$ a.î. $f(x_n)=n$

E_1) Ca temă, este discutia numărului de rădăcini pentru ec. $f(x)=m$

E_2) Facem tabel de variație

$$f'(x)=4x^3-4\cdot\frac{1}{x}=4\cdot\frac{x^4-1}{x}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x^4=1\Rightarrow x=\pm1\Big\}\Rightarrow x=1$$
$$x\in D_f$$

E_3)

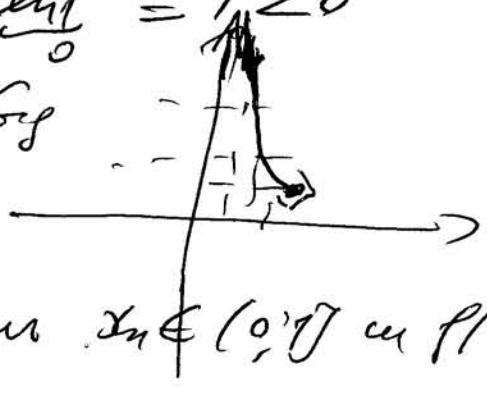
x	0		1
f'	$\nexists$	$-$	0
f	$+\infty$	$\searrow$	1

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=4\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4-1}{\frac{1}{2}}<0\Rightarrow f'(\alpha)<0,\ \forall\alpha\in(0;1)$$

E_4) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(x^4-4\ln x)\overset{0-(-\infty)}{=\!=}+\infty$

$$f(1)=1-4\underbrace{\ln1}_{0}=1<0$$

E_5) Schiță, G_f



$\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\exists!\, x_n\in(0;1]$ a.î. $f(x_n)=n$

Prof. Ovidiu Bagescu

V108

III 29)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$

Calculați aria dintre Gf, axa Ox și dreptele $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$

$E_1)\ A=\int_0^{\pi/2}|f(x)|dx=\int_0^{\pi/2}|\cos x|dx$

$E_2)\ x\in[0;\frac{\pi}{2}]\to x\in C_dI\Rightarrow \cos x\geq 0$

$E_3)\to A=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\pi/2}=$

$=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1-0=1$

Prof. Ovidiu Badescu

V109

III 26)

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$

Calculati $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt$

E1) $l = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \cos t\,dt =$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \left(\sin t \Big|_0^x \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} (\sin x - \sin 0)$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin x}_{[-1,1]} \xrightarrow{0 \cdot [-1,1]} 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

V108
III 2 c)

Fie $f:[0,1]\to[0,\pi/2]$, $f(x)=\cos x$, arătați că șirul

$$I_n=\int_0^{\pi/2} f^n(x)\,dx \text{ este convergent, } \forall n\geq 1$$

E1) $I_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx$

E2) monotonie: $I_{n+1}-I_n=\int_0^{\pi/2}\cos^{n+1}x\,dx-\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx$

$$=\int_0^{\pi/2}(\cos^{n+1}x-\cos^n x)\,dx=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos^n x(\cos x-1)\,dx$$

Dar, $x\in[0,\pi/2]\Rightarrow x\in Cd_I\Rightarrow\cos x\geq 0$ și

cum $\cos x\leq 1\Rightarrow\cos x-1\leq 0\Rightarrow\cos^n x(\cos x-1)\leq 0$

$$\Rightarrow\int_0^{\pi/2}\cos^n x(\cos x-1)\,dx\leq 0\Rightarrow I_{n+1}-I_n\leq 0$$

$$\Rightarrow I_{n+1}\leq I_n\Rightarrow I_n\searrow \quad (1)$$

E3) Din $I_n\searrow\Rightarrow I_n\leq I_1\Rightarrow I_n$ mărginit superior

Dar, $x\in[0,\pi/2]\Rightarrow x\in Cd_I\Rightarrow\cos x\geq 0\Rightarrow$

$$\cos^n x\geq 0\Rightarrow\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx\geq 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_n\geq 0$$

Așadar, $I_n\in[0,I_1]\Rightarrow$ mărginit (2)

E4) Din I_n monot + mărginit $\Rightarrow I_n$ convergent

Prof. Ovidiu Bădescu