Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\sqrt{2},\sqrt{5}\right)\cap\mathbb{Z}=\{2\}$.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui *m* pentru care dreapta $x=2$ este axa de simetrie a parabolei $y=x^2+mx+4$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea $[0,2\pi)$ ecuația $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

5p **4.** Determinați $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, pentru care $C_n^2+A_n^2=18$.

5p **5.** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care dreptele $d_1: ax+y+2011=0$ şi $d_2: x-2y=0$ sunt paralele.

5p **6.** Fie *x* un număr real care verifică egalitatea $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=2$. Arătați că $\sin 2x=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\left(A(x)-A(y)\right)^{2011}=O_3$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați inversa matricei $A(x)$, unde $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră $\alpha\in\mathbb{C}$ şi polinomul $f=X^3+(1-\alpha)X^2+(\alpha-2)iX+\alpha+(\alpha-2)i\in\mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Arătați că polinomul f are rădăcina -1.

5p **b)** Arătați că, dacă p,q sunt numere complexe şi polinomul $g=X^2+pX+q\in\mathbb{C}[X]$ are două rădăcini distincte, complex conjugate, atunci *p* şi *q* sunt numere reale şi $p^2<4q$.

5p **c)** Determinați $\alpha\in\mathbb{C}$ pentru care polinomul f are două rădăcini distincte, complex conjugate.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$.

5p **a)** Arătați că funcția *f* este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați asimptotele graficului funcției *f*.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$.

2. Se consideră funcția $f:[1,2]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-3x+2$.

5p **a)** Calculați $\int_1^4 f\left(\sqrt{x}\right)dx$.

5p **b)** Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției $g:[1;2]\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{f(x)}{x}$ şi de axa *Ox*.

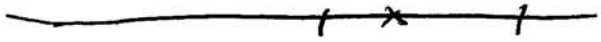
5p **c)** Arătați că $(4n+2)\int_1^2 f^n(x)dx+n\int_1^2 f^{n-1}(x)dx=0$.

BAC 2011 / V 5 / I 1 (VARĂ)

Arătați că $(\sqrt{2};\sqrt{5}) \cap \mathbb{Z} = \{2\}$

$E_1)$ $\sqrt{2} = 1,4\ldots$

$\sqrt{5} = 2,\ldots$



$E_2)$ $(\sqrt{2};\sqrt{5}) \cap \mathbb{Z} = \{2\}$

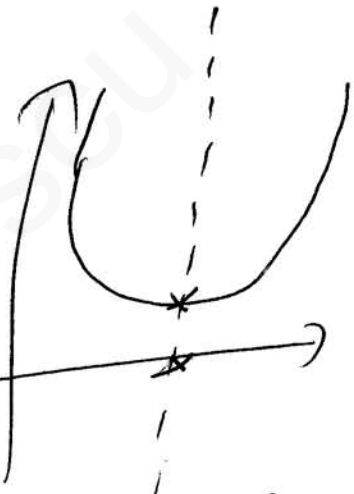
Prof. Ovidiu Bădescu

BAC 2011 / V 5 / I 2 (var 2)

Se cere $m=?$ dacă dreapta $x=2$ este axă de simetrie pentru parabola

$$y = x^2 + mx + 4$$

$E_1)$ $f(x) = x^2 + mx + 4$ este f. de gr II cu $a = 1 > 0$



$E_2)$ axă de simetrie pt G_f este dreapta ce trece prin V și este $\perp$ pe Ox

$E_3)$ $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow$ ec. axei de simetrie este $x = x_V \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$

$E_4)$ $-\frac{b}{2a} = -\frac{m}{2}$ $\Big\} \Rightarrow -\frac{m}{2} = 2$

$x = 2$ axă de simetrie $\Big\}$ $m = -4$

Prof. Ovidiu Bădescu

BAC 2011 / VS / I 3

Rezolvați în $[0, 2\pi)$ ecuația

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

E_1) $\sin x = a \Rightarrow x \in \{\arcsin a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

E_2) sau $x \in \{(-1)^k \arcsin a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

în cazul nostru

$$x - \frac{\pi}{6} \in \{(-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$x \in \{\frac{\pi}{6} + (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

E_3) $x \in \{\frac{\pi}{6} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

E_4) trebuie soluții din $[0, 2\pi)$

$k = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} - 2\pi \notin [0, 2\pi)$

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + 0 = \frac{\pi}{3} \in [0, 2\pi)$

$k = 1 \Rightarrow x = \pi \in [0, 2\pi) \Rightarrow$

$k = 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi \notin [0, 2\pi)$

Prof. Ovidiu Bădescu

BAC 2011 / VS / I / 4 T'07 I/6

$n = ?,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ a.î. are loc

$$C_n^2 + A_n^2 = 18$$

E1) $\dfrac{n!}{2!(n-2)!} + \dfrac{n!}{(n-2)!} = 18$

E2) $\dfrac{(n-2)!\,(n-1)\,n}{2(n-2)!} + \dfrac{(n-2)!\,(n-1)\,n}{(n-2)!} = 18$

$$\frac{n^2-n}{2} + n^2 - n = 18 \mid \cdot 2$$

$$n^2 - n + 2n^2 - 2n = 36$$

$$3n^2 - 3n - 36 = 0 \mid : 3$$

$$n^2 - n - 12 = 0$$

E3) $n_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \dfrac{1 \pm 7}{2} \begin{cases} 4 \geq 2 \\ -3 \text{ fals} \end{cases}$

$$\Rightarrow n = 4$$

Prof. Ovidiu Bădescu

BAC 2011 / V5 / I 5

$a = ?$ pt care $d_1 \parallel d_2$ unde

$d_1: ax + y + 2011 = 0$

$d_2: x - 2y = 0$

E1) $m_{d_1} \parallel m_{d_2}$

E2) $m_{d_1} = -\frac{a}{b} = -\frac{a}{1} = -a$

$m_{d_2} = -\frac{a}{b} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$

E3) $-a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

BAC 2011 / V5 / I 6

$tg x + ctg x = 2$, se cere $\sin 2x = 1$

$E_1) \quad \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2$

$E_2) \quad \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 2 \Rightarrow 1 = 2 \sin x \cos x$

$E_3) \quad \sin 2x = 1$ adev.

---

mod II:

$E_1) \quad tg x + \frac{1}{tg x} = 2 \;/ \cdot tg x \Rightarrow tg^2 x - 2 tg x + 1 = 0$

$E_2) \quad (tg x - 1)^2 = 0 \Rightarrow tg x = 1$

$E_3) \quad \sin u = \frac{2 tg \frac{u}{2}}{1 + tg^2 \frac{u}{2}} \Rightarrow \sin 2x = \frac{2 tg x}{1 + tg^2 x}$

$$\sin 2x = \frac{2}{1+1} = 1$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

$E_1)\ A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y & y^2 \\ 0 & 1 & 2y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 1 & y+x & y^2+2xy+x^2 \\ 0 & 1 & 2y+2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_2)\ A(x+y)=\begin{pmatrix} 1 & x+y & (x+y)^2 \\ 0 & 1 & 2(x+y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_3)$ Deoarece $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

$\Rightarrow A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Arătați că $(A(x)-A(y))^{2011}=O_3,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

E1) $A(x)-A(y)=\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & y & y^2 \\ 0 & 1 & 2y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 0 & x-y & x^2-y^2 \\ 0 & 0 & 2(x-y) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

unde am notat $x-y=a$ și $x^2-y^2=b$

E2) $(A(x)-A(y))^2=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și

E3) $(A(x)-A(y))^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=O_3$

$\Rightarrow (A(x)-A(y))^p=O_3,\ \forall p\geq 3$

E4) $\Rightarrow (A(x)-A(y))^{2011}=O_3$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determinați inversa matricii $A(x)$

$E_1)$ $\det A(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0$

$=1\neq 0$

$\Rightarrow \exists A^{-1}$

$E_2)$ $A^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix}$

$E_3)$ $A^*=\begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{13}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* \\ a_{31}^* & a_{32}^* & a_{33}^* \end{pmatrix}$ unde

$E_4)$ $a_{11}^*=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 1 \end{vmatrix}=1$; $a_{12}^*=-1\cdot\begin{vmatrix} x & 0 \\ x^2 & 1 \end{vmatrix}=-x$;

$a_{13}^*=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} x & 1 \\ x^2 & 2x \end{vmatrix}=2x^2-x^2=x^2$; $a_{21}^*=-1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2x & 1 \end{vmatrix}=0$;

$a_{22}^*=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x^2 & 1 \end{vmatrix}=1$; $a_{23}^*=-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x^2 & 2x \end{vmatrix}=-2x$

$a_{31}^*=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0$; $a_{32}^*=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x & 0 \end{vmatrix}=0$

$a_{33}^*=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{vmatrix}=1$

$E_5)$ $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -x & x^2 \\ 0 & 1 & -2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*=1\cdot\det A^*$

$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -x & x^2 \\ 0 & 1 & -2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 + (1-\alpha)X^2 + (\alpha-2)iX + \alpha + (\alpha-2)i$

Arătați că f are rădăcina -1

$E_1)$ $f(-1) = -1 + (1-\alpha)\cdot 1 + (\alpha-2)i\cdot(-1) +$

$+ \alpha + (\alpha-2)i$

$E_2)$ $f(-1) = -1 + 1 - \alpha - (\alpha-2)i + \alpha + (\alpha-2)i$

$f(-1) = 0 \Rightarrow -1$ este rădăcină pt f

Prof. Ovidiu Bădescu

Dacă $p, q \in \mathbb{C}$ și $g = X^2 + pX + q \in \mathbb{C}[X]$ are două rădăcini distincte, complex conjugate arătați că $p, q \in \mathbb{R}$ și $p^2 < 4q$

E1) $x_1 = \alpha + \beta i$ cu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$x_2 = \alpha - \beta i$

E2) din VIETE $\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{p}{1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{q}{1} \end{cases}$

Dar, $x_1 + x_2 = 2\alpha \in \mathbb{R}$

$x_1 \cdot x_2 = \alpha^2 - (\beta i)^2 = \alpha^2 + \beta^2 \in \mathbb{R}$

E3) $\Rightarrow -p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$

E4) $x_1, x_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow p^2 - 4q < 0$

$\Rightarrow p^2 < 4q$

Prof. Ovidiu Badescu

7107
II 2.c)

Fie $\alpha \in \mathbb{C}$, $f = X^3 + (1-\alpha)X^2 + (\alpha-2)iX + \alpha + (\alpha-2)i$

$\alpha = ?, \alpha \in \mathbb{C}$ pentru care f are 2 rād. distincte complex conjugate

---

E_1) Rc. sch. II, Horner

	X^3	X^2	X	X^0
	1	$1-\alpha$	$(\alpha-2)i$	$\alpha+(\alpha-2)i$
1	1	$2-\alpha$	$2-\alpha+(\alpha-2)i$	$2+2(\alpha-2)i \neq 0$
-1	1	$-\alpha$	$\alpha+(\alpha-2)i$	$0+0\cdot i$

E_2) $(X+1)(X^2 - \alpha X + \alpha + (\alpha-2)i) = 0$

$\Rightarrow$ $X+1=0 \Rightarrow x_1 = -1$ reală

sau

$X^2 - \alpha X + \alpha + (\alpha-2)i = 0$ are 2 rād distincte conjugate $\Rightarrow x_1 + x_2 = a+bi+(a-bi) = 2a \in \mathbb{R}$

$x_1 \cdot x_2 = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{+\alpha}{1} = x_1 + x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$

$\frac{\alpha+(\alpha-2)i}{1} = x_1 \cdot x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 2$

E_3) Înlocuit $\alpha = 2$ în ec. și arătat că x_1, x_2 complex conjugate

Prof. Ovidiu Pârșescu

Fie $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$ 107 10a)

Arătați că f s $\searrow$ pe $(1;\infty)$

E1) $f'(x)=(\ln(1+x)-\ln(x-1))'=$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

E2) $f'(x)=\frac{x-1-x-1}{x^2-1}=\frac{-2}{x^2-1}$

E3) semnul lui $f'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
-2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
x^2-1	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$ $+$
$\frac{-2}{x^2-1}$	$-$	$-$	$\nexists$	$+$	$+$	$\nexists$	$-$ $-$

$\Rightarrow\forall x>1$, $f'(x)<0\Rightarrow f$ s $\searrow$ pe $(1;\infty)$

Prof. Ovidiu Băleșcu

7102

Fie $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$ 1b)

Determinați asimptotele la G_f

$E_1)$ $D_f=(1;\infty)$, studiem asimpt orizontale sau oblice doar la ∞ și verticale doar în $x=1$ la dreapta

$E_2)$ <u>as. orizontale la ∞</u>

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(\ln(x+1)-\ln(x-1))=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x+1}{x-1}\overset{\ln 1}{=\!=\!=}0\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow y=0$ as. ors spre ∞

$E_3)$ <u>as. oblice la ∞</u>

Deoarece $\exists$ as. orizontale la $\infty\Rightarrow\nexists$ as. oblice la ∞

$E_4)$ <u>as. verticale în $x=1$</u>

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\ln\frac{x+1}{x-1}\overset{\ln\frac{2}{0_+}}{=\!=\!=}\infty\notin\mathbb{R}$$

$\Rightarrow x=1$ as. vert la dreapta

Prof. Ciuiu Radescu

Fie $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$ 7107 III 1c)

Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)$

E1) $l=\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+1)-\ln(x-1)) \overset{\infty(\infty-\infty)}{=\!=}$

$=\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\frac{x+1}{x-1} \overset{\infty\cdot\ln 1}{=\!=} \overset{\infty\cdot 0}{=\!=}$

E2) mod I:

$l=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\ln\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x\right)$

Fie $l_1=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x \overset{1^\infty}{=\!=} \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-1}-1\right)^x=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1-x+1}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2}{x-1}\cdot x}$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}}=e^2\Rightarrow l=\ln e^2=2$

E3) mod II:

$l=\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\frac{x+1}{x-1} \overset{\infty\cdot 0}{=\!=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{0}{0}}{=\!=} \overset{l'H}{=\!=}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{1(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}(-x^2)\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}=2$

Prof. Ovidiu Balescu

7107
III 2 a)

Fie $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$

Calculați $\int_1^4 f(\sqrt{x})\,dx$

E1) $I=\int_1^4 f(\sqrt{x})\,dx=\int_1^4 (x-3\sqrt{x}+2)\,dx=$

$=\frac{x^2}{2}\Big|_1^4-3\cdot\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx+2\cdot x\Big|_1^4=$

$=\frac{1}{2}(16-1)-3\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_1^4+2(4-1)=$

$=\frac{1}{2}\cdot 15-3\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4+2\cdot 3=$

$=\frac{15}{2}-2(\sqrt{4^3}-\sqrt{1^3})+6=$

$=\frac{15}{2}-2(8-1)+6=\frac{15}{2}-14+6=\frac{15}{2}-\frac{2}{8}=-\frac{1}{2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:[1;2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$

Calculați aria dintre G_g, $g:[1;2]\to\mathbb{R}$,

$g(x)=\frac{f(x)}{x}$ și axa Ox

$E_1)\ A=\int_1^2 |g(x)|\,dx=\int_1^2 \left|\frac{f(x)}{x}\right|dx=$

$=\int_1^2 \left|\frac{x^2-3x+2}{x}\right|dx$

$E_2)$ semnul lui $\frac{x^2-3x+2}{x}$ pe $x\in[1;2]$

x	0		$[1$		$2]$
x^2-3x+2	$+\ +$		0	$---$	$0\ +\ +$
x	$-\ 0$	$+$	$+$	$+$	$+\ +$
$\frac{x^2-3x+2}{x}$		$-$	$-$	$-$	$-\ -$

$\Rightarrow \frac{x^2-3x+2}{x}\le 0,\ \forall x\in[1;2]$

$E_3)\ A=\int_1^2 -\frac{x^2-3x+2}{x}\,dx=-\int_1^2 \frac{x^2-3x+2}{x}\,dx$

$=-\int_1^2\left(x-3+\frac{2}{x}\right)dx=-\left(\frac{x^2}{2}\Big|_1^2-3x\Big|_1^2+2\cdot\ln|x|\Big|_1^2\right)$

$=-\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right)-3(2-1)+2(\ln 2-\ln 1)=$

$=-\left(\frac{3}{2}-3+2\ln 2\right)=-\left(-\frac{3}{2}+2\ln 2\right)=\frac{3}{2}-2\ln 2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$, arătați că T107

$(4n+2)\int_1^2 f^n(x)dx+n\int_1^2 f^{n-1}(x)dx=0$ III 2c)

E1) notăm $I_n=\int_1^2 f^n(x)dx \Rightarrow I_{n-1}=\int_1^2 f^{n-1}(x)dx$

E2) $I_n=\int_1^2 (x^2-3x+2)^n dx$

$f_1(x)=(x^2-3x+2)^n \Rightarrow f'(x)=n(x^2-3x+2)^{n-1}(2x-3)$

$g_1(x)=1 \Rightarrow g(x)=x$

E3) $I_n=(x^2-3x+2)\cdot x\Big|_1^2-n\int_1^2 (x^2-3x+2)^{n-1}(2x^2-3x)dx$

E4) $I_n=0-0-n\int_1^2 (x^2-3x+2)^{n-1}(\underbrace{2x^2-6x+4}+3x-4)dx$

E5) $I_n=-n\left(2\int_1^2 (x^2-3x+2)^n dx+\int_1^2 (x^2-3x+2)^{n-1}\cdot\frac{3}{2}\left(2x-\frac{8}{3}\right)\right)$

E6) $I_n=-2nI_n-n\left(\frac{3}{2}\left(\int_1^2 (x^2-3x+2)^{n-1}\left(\underbrace{2x-3}+\underbrace{3-\frac{8}{3}}\right)dx\right.\right.$

E7) $(2n+1)I_n=-\frac{3n}{2}\left(\int_1^2 (x^2-3x+2)^{n-1}(2x-3)dx+\frac{1}{3}I_{n-1}\right)$

E8) $(2n+1)I_n=-\frac{3n}{2}\left(\frac{(x^2-3x+2)^n}{n}\Big|_1^2+\frac{1}{3}I_{n-1}\right)$

$(2n+1)I_n=-\frac{3n}{2}(0-0)-\frac{3n}{2}\cdot\frac{1}{3}I_{n-1}$

$(2n+1)I_n=-\frac{n}{2}I_{n-1}\Rightarrow I_n=-\frac{n}{4n+2}I_{n-1}$

E9) încă $(4n+2)\frac{-n}{4n+2}I_{n-1}+nI_{n-1}=0$

$\left(f^{n-1}\cdot f'=\frac{f^n}{n}\right.$