Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, cu termeni pozitivi, dacă $b_1+b_2=6$ și $b_3+b_4=24$.

5p **2.** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(1-a^2)x+4$ este constantă.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\left(\frac{3}{2}\right)^x<\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

5p **4.** Determinați numărul termenilor raționali ai dezvoltării $\left(1+\sqrt{2}\right)^{10}$.

5p **5.** Calculați distanța de la punctul $A(2,2)$ la dreapta determinată de punctele $B(1,0)$ și $C(0,1)$.

5p **6.** Triunghiul ABC are măsura unghiului A de 60°, $AB=4$ și $AC=5$. Calculați $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră mulțimea $H=\left\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid A^2=A\right\}$.

5p **a)** Arătați că $\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}\in H$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă $A\in H$, atunci $A^n\in H$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Arătați că mulțimea H este infinită.

2. Se consideră polinomul $f=(X+i)^{10}+(X-i)^{10}$, având forma algebrică $f=a_{10}X^{10}+a_9X^9+...+a_1X+a_0$, unde $a_0,a_1,...,a_{10}\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Determinați restul împărțirii polinomului f la $X-i$.

5p **b)** Arătați că toți coeficienții polinomului f sunt numere reale.

5p **c)** Demonstrați că toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^5-5x+4$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

5p **b)** Arătați că graficul funcției f are un punct de inflexiune.

5p **c)** Arătați că, pentru orice $m\in(0,8)$, ecuația $f(x)=m$ are exact trei soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=e^{-x}$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1 g(x)\,dx$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 x^5 g(x^3)\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ definit prin $I_n=\int_1^n g(x^3)\,dx$ este convergent.

Prof. Ovidiu Bădescu

BAC 2011 / V2 / I 1

b_n progr geometrică cu termeni pozitivi, $b_1+b_2=6$, $b_3+b_4=24$, să se afle rația

---

E1) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

E2) $b_1+b_2=6 \Rightarrow b_1+b_1q^1=6$

$b_3+b_4=24 \Rightarrow b_1q^2+b_1q^3=24$

E3) împărțim $\Rightarrow \dfrac{b_1(1+q)}{b_1q^2(1+q)}=\dfrac{6}{24}$

$\Rightarrow q^2=4 \Rightarrow q=\pm 2$

E4) $q=2 \Rightarrow b_1+b_1q=6 \Rightarrow b_1+2b_1=6$

$b_1=2$, $b_n=b_1q^{n-1}=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

$\Rightarrow b_n$ pozitiv $\Rightarrow$ OK

E5) $q=-2 \Rightarrow b_1+b_1q=6 \Rightarrow b_1-2b_1=6$

$-b_1=6 \Rightarrow b_1=-6$ fals

nu că trebuie pozitivi

E6) $\Rightarrow q=2$

Prof. Ovidiu Pădescu

BAC 2011 / V2 / I 2

T106
P2

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1-a^2)x + 4$

Se cere $a = ?$ a.î. f constantă

mod I

E1) f constantă $\Rightarrow f$ nu depinde de x

$\Rightarrow 1 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$

mod II

E1) f constantă $\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

BAC 2011 / V2 / ... / 3 7/06

Rezolvați în $\mathbb{R}$: $\left(\frac{3}{2}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^x$ I/3

$E_1)$ $\left(\frac{3}{2}\right)^x < \left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$.

$E_2)$ $\frac{3}{2} > 1 \Rightarrow x < -x \Rightarrow 2x < 0$

$\Rightarrow x \in (-\infty, 0)$

$\forall$ $b \in (0;1) \Rightarrow \left(b^x < b^y \Leftrightarrow x > y\right)$

$b \in (1;\infty) \Rightarrow \left(b^x < b^y \Leftrightarrow x < y\right)$ $\square$

Prof. Ovidiu Bădescu

BAC 2011 / V2 / I / 4 T106

Găsiți numărul termenilor raționali din $(1+\sqrt{2})^{10}$

E1) $T_{k+1} = C_{10}^{k} \cdot 1^{10-k} \cdot (\sqrt{2})^{k}$

E2) $T_{k+1} = C_{10}^{k} \cdot 2^{\frac{k}{2}}$ forma simplă

E3) $T_{k+1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{k}{2} \in \mathbb{Z}$ $\Big\}\Rightarrow$

$k \in \{0, 1, \dots, 10\}$

$k \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

$\Rightarrow$ 6 termeni raționali

Obs.: Dacă mț valorilor lui k este mai mare, folosim $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

Prof. Ovidiu Rădescu

BAC 2011 / V2 / I 5

Se cere distanța de la $A(2;2)$ la dreapta d determinată de $B(1;0)$ și de $C(0;1)$

E_1) ec. BC : $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 0+0+1-0-x-y = 0$

$x+y-1=0$

E_2) $dist(A,d) = \dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} =$

$= \dfrac{|1\cdot 2+1\cdot 2-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

BAC 2011 / V2 / I 6

$m(\hat{A}) = 60^\circ$, $AB = 4$, $AC = 5$

Se cere: $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

E1) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}})$

E2) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \cdot 5 \cos 60^\circ = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $H=\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^2=A\}$

Arătați că $\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}\in H$

$E_1)$ $\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0&2+0\\0+0&0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$

$E_2)$ $\Rightarrow$ dacă notăm $B=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$ am obținut $B^2=B$

$\Rightarrow B\in H$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $H=\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^2=A\}$

Demonstrați că dacă $A\in H\Rightarrow A^n\in H, \forall n\in\mathbb{N}$

$E_1)$ $A\in H\Rightarrow A^2=A$

$E_2)$ Rt a arăta că $A^n\in H$ arătăm că

$$(A^n)^2=A^n$$

$E_3)$ $(A^n)^2=A^{2n}=(A^2)^n$

Dar, $A\in H\Rightarrow A^2=A$ $\Rightarrow (A^n)^2=A^n$

$\Rightarrow A^n\in H$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $H=\{A\in M_2(\mathbb{R}) \mid A^2=A\}$

Arătați că H este infinită

E_1) Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$

E_2) $A^2=A \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc=a & (1) \\ b(a+d)=b & (2) \\ c(a+d)=c & (3) \\ bc+d^2=d & (4) \end{cases}$

E_3) $(1)-(4) \Rightarrow (a-d)(a+d)=a-d \Rightarrow$

$(a-d)(a+d-1)=0 \Rightarrow$ $\begin{cases} a-d=0 \\ \text{sau} \\ a+d-1=0 \Rightarrow a+d=1 \end{cases}$

E_4) nu se cere să găsim toate matricile A cu $A^2=A$, ci să arătăm că $\exists$ o infinitate de matrici cu această proprietate, deci particulăm

E_5) Fie $a+d=1 \xrightarrow[(3)]{(2)} b=b$ adev., $\forall b\in\mathbb{R}$
$c=c$ adev. $\forall b\in\mathbb{R}$

Fie $a=1$, $d=0 \Rightarrow bc=0$, alegem doar unul din b sau c egal cu zero ca să avem o infinitate de matrici, fie $c=0$

$\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=A$

$\Rightarrow A\in H, \forall b\in\mathbb{R} \Rightarrow$ o infinit de matrici

Prof. Ovidiu Badescu

V106
I 3 a)

Fie $f=(X+i)^{10}+(X-i)^{10}$, calculați restul împărțirii lui f la $(X-i)$

E_1) restul lui $f:(X-\alpha)$ este $f(\alpha) \Rightarrow$ restul $f:(X-i)$ este $f(i)$

E_2) $f(i)=(i+i)^{10}+(i-i)^{10}=(2i)^{10}+0$

$=2^{10}\cdot i^{10}$

E_3) Dar, $i^4=1 \Rightarrow i^{10}=(i^4)^2\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1$

$\Rightarrow f(i)=-2^{10}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f=(X+i)^{10}+(X-i)^{10}$ cu forma algebrică

$f=a_{10}X^{10}+a_9X^9+\dots+a_1X+a_0$

Arătăți că toți coef lui f sunt numere reale

E1) $(X+i)^{10}=C_{10}^0X^{10}\cdot i^0+C_{10}^1X^9i+C_{10}^2X^8\cdot i^2+C_{10}^3X^7i^3+$
$+C_{10}^4X^6i^4+C_{10}^5X^5i^5+\dots+C_{10}^{10}X^0\cdot i^{10}$

$\Rightarrow (X+i)^{10}=C_{10}^0X^{10}+C_{10}^1X^9i-C_{10}^2X^8-C_{10}^3X^7i+$
$+C_{10}^4X^6+C_{10}^5X^5i+\dots-C_{10}^{10}$

E2) $(X-i)^{10}=C_{10}^0X^{10}(-i)^0+C_{10}^1X^9(-i)^1+C_{10}^2X^8(-i)^2+C_{10}^3X^7(-i)^3+$
$+C_{10}^4X^6(-i)^4+C_{10}^5X^5(-i)^5+\dots+C_{10}^{10}X^0(-i)^{10}$

$(X-i)^{10}=C_{10}^0X^{10}-C_{10}^1X^9i-C_{10}^2X^8+C_{10}^3X^7i+$
$+C_{10}^4X^6-C_{10}^5X^5i+\dots-C_{10}^{10}X^0\cdot 1$

E3) Adunând $\Rightarrow$
$(X+i)^{10}+(X-i)^{10}=2C_{10}^0X^{10}-2C_{10}^2X^8+2C_{10}^4X^6+\dots=2C_{10}^{10}$

$\Rightarrow$ coef lui f sunt $2C_{10}^0;-2C_{10}^2;2C_{10}^4\dots\in\mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Bagescu

V106

Fie $f=(X+i)^{10}+(X-i)^{10}$. Dacă f are toți coeficienții reali, arătați că f are toate rădăcinile reale

E_1) Fie α o rād. pt f, rădăcină oarecare. Dacă arătăm că $\alpha=\overline{\alpha} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$ toate rād. lui f sunt reale

E_2) α rād. pt $f \Rightarrow f(\alpha)=0 \Rightarrow (\alpha+i)^{10}+(\alpha-i)^{10}=0$

$\Rightarrow (\alpha+i)^{10}=-(\alpha-i)^{10}$

E_3) trecem la modul $\Rightarrow |(\alpha+i)^{10}|=|-(\alpha-i)^{10}| \Rightarrow$

$\Rightarrow |(\alpha+i)^{10}|=|(\alpha-i)^{10}| \Rightarrow |\alpha+i|^{10}=|(\alpha-i)|^{10}$

E_4) Deoarece $|z| \geq 0 \Rightarrow |\alpha+i|=|\alpha-i|$

E_5) Fie $\alpha=a+bi \Rightarrow |\alpha+i|=|a+bi+i|=|a+(b+1)i|=$

$=\sqrt{a^2+(b+1)^2}$

Analog, $|\alpha-i|=|a+bi-i|=|a+(b-1)i|=$

$=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$

E_6) $|\alpha+i|=|\alpha-i| \Rightarrow \sqrt{a^2+(b+1)^2}=\sqrt{a^2+(b-1)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+(b+1)^2=a^2+(b-1)^2 \Rightarrow b^2+2b+1=b^2-2b+1$

$\Rightarrow 4b=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow z=a+0\cdot i$

$\Rightarrow z=a \in \mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x) = x^5 - 5x + 4$

Calculați $\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

E_1) Folosim $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

$\Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$

E_2) $f'(x) = 5x^4 - 5 \Rightarrow f'(2) = 5 \cdot 2^4 - 5$

$= 5 \cdot 16 - 5 = 80 - 5 = 75$

$\Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 75$

Prof. Ovidiu Bagescu

Fie $f(x) = x^5 - 5x + 4$, arătați că G_f are un punct de inflexiune

---

E_1) arăt. că $\exists \alpha$ cu $f''(\alpha) = 0$ și f'' își schimbă semnul în $x = \alpha$

E_2) $f'(x) = 5x^4 - 5$

$f''(x) = 20x^3$

E_3) $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

x		0	
f''	$-\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +$
f	∩		∪

$\Rightarrow x = 0$ punct de inflexiune

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5-5x+4$

Arătați că $\forall m\in(0;8)$, ec. $f(x)=m$ are exact trei soluții reale distincte

---

E_1) $f'(x)=(x^5-5x+4)'=5x^4-5$

$f'(x)=0\Rightarrow 5x^4=5\Rightarrow x^4=1\Rightarrow x=\pm 1$

E_2)

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
f'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

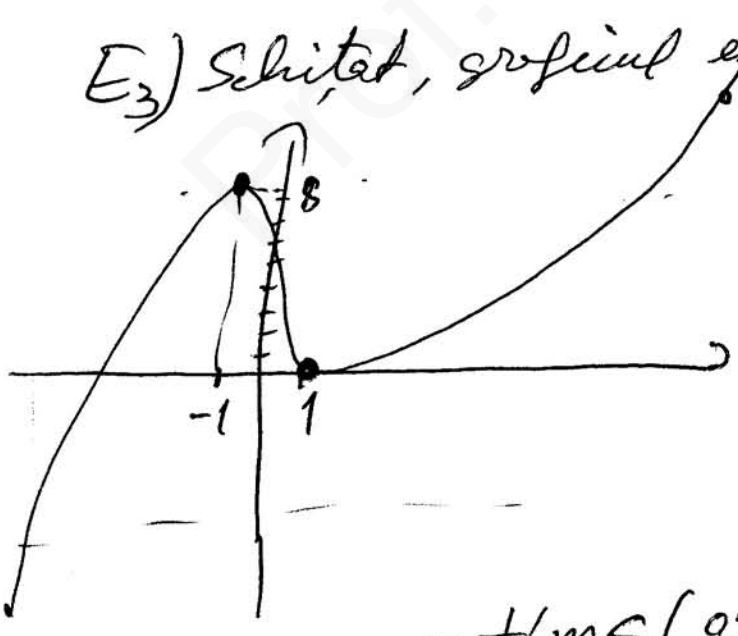
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^5=-\infty$

$f(-1)=(-1)^5-5(-1)+4=8$

$f(1)=1-5+4=0$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} x^5=\infty$

E_3) Schițat, graficul este



$m\in(-\infty;0)\Rightarrow$ o rad $x_1<-1$

$m=0\Rightarrow x_1<1,\ x_2=1$

$m\in(0;8)\Rightarrow x_1<-1, x_2\in(-1;1), x_3>1$

$m=8\Rightarrow x_1=-1,\ x_2>1$

$m>8\Rightarrow x_1>1$

$\Rightarrow \forall m\in(0;8)$ sunt 3 rad.

Prof. Ovidiu Bădescu

VI.06
II.29)

Fie $g(x)=e^{-x}$, calculați

$$\int_0^1 g(x)dx$$

E1) $I=\int_0^1 e^{-x}dx=\frac{e^{-x}}{-1}\Big|_0^1=$

$$=-\frac{1}{e^x}\Big|_0^1=-\left(\frac{1}{e}-1\right)=$$

$$=1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}$$

Obs.: Se poate folosi $\int f(ax+b)dx=\frac{F(ax+b)}{a}+C$

Prof. Ovidiu Badescu

VI.06
2.2.4)

Fie $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x}$

Calculați $\int_0^1 x^5 g(x^3)\,dx$

E1) $I = \int_0^1 x^5 e^{-x^3}\,dx$

E2) notăm $x^3 = t \Rightarrow 3x^2\,dx = dt \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2\,dx = \frac{dt}{3}$

$x = 0 \Rightarrow t = 0^3 \Rightarrow t = 0$

$x = 1 \Rightarrow t = 1^3 \Rightarrow t = 1$

E3) $I = \int_0^1 x^3 \cdot e^{-x^3} \cdot x^2\,dx \Rightarrow$

$I = \int_0^1 t \cdot e^{-t}\,dt$

E4) $f(t) = t \Rightarrow f'(t) = 1$

$g'(t) = e^{-t} \Rightarrow g(t) = \int e^{-t}\,dt = -e^{-t}$

$I = t \cdot (-e^{-t})\Big|_0^1 - \int_0^1 -e^{-t}\,dt =$

$= -te^{-t}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-t}\,dt = -(1e^{-1} - 0) - e^{-t}\Big|_0^1 =$

$= -e^{-1} + 0 - (e^{-1} - e^0) = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$

$= \frac{e-2}{e}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^{-x}$. Arătați că șirul $I_n=\int_1^n g(x^3)\,dx$ este convergent, unde $n\geq 1$

VI.26
VI.26)

E_1) monot: $I_{n+1}-I_n=\int_1^{n+1} g(x^3)dx-\int_1^n g(x^3)dx=$

$=\int_1^{n+1} g(x^3)dx+\int_n^1 g(x^3)dx=\int_n^1 g(x^3)dx+\int_1^{n+1} g(x^3)dx=$

$=\int_n^{n+1} g(x^3)dx=\int_n^{n+1} e^{-x^3}dx$

E_2) Dar, $e>0\Rightarrow e^{-x^3}>0\Rightarrow\int_n^{n+1} e^{-x^3}dx>0\Rightarrow$

$\Rightarrow I_{n+1}-I_n>0\Rightarrow I_{n+1}>I_n\Rightarrow I_n$ ↗

E_3) mărg: Din I_n ↗ $\Rightarrow I_n\geq I_1\Rightarrow I_n$ mărg inferior

E_4) Nu a arăta că I_n mărg superior, arătăm că $g(x^3)\leq\dots$ pe care, după integrare, să ne dea finit

E_5) $I_n=\int_1^n e^{-x^3}dx=\int_1^n \frac{1}{e^{x^3}}dx$

Din $1\leq x\leq n\Rightarrow 1\leq x^3\leq n^3\Rightarrow e^1\leq e^{x^3}\leq e^{n^3}\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{n^3}\leq\underbrace{\frac{1}{e^{x^3}}}\leq\frac{1}{e}\Big|\int_1^n\dots dx\Rightarrow\int_1^n\frac{1}{e^{x^3}}dx\leq\int_1^n\frac{1}{e}dx$

$\Rightarrow I_n\leq\frac{1}{e}\cdot x\Big|_1^n\Rightarrow I_n\leq\frac{1}{e}(n-1)\Rightarrow\lim_n I_n\leq\infty$, nu ajută să ca nu deținem $I_n\leq$ număr

E_6) Din $1\leq x\leq n\Rightarrow 1\leq x^3\leq n^3$. Dar, deoarece $x\geq 1\Rightarrow x^3\geq x\Rightarrow 1\leq x\leq x^3\Rightarrow e^1\leq e^x\leq e^{x^3}\Rightarrow$

$\frac{1}{e^{x^3}}\leq\frac{1}{e^x}\Big|\int_1^n\dots dx\Rightarrow I_n\leq\int_1^n e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_1^n=-\left(\frac{1}{e^n}-1\right)$

$\Rightarrow I_n<1-\frac{1}{e^n}\leq 1\Rightarrow I_n$ mărg sup

Prof. Ovidiu Bădescu