EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ **MODEL**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.
- **Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați modulul numărului complex $z=1-i\sqrt{3}$.

5p **2.** Determinați mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.

5p **3.** Știind că doi termeni ai unei progresii geometrice sunt $b_3=6$ şi $b_5=24$, determinați termenul b_7.

5p **4.** Determinați $x>0$, știind că $\log_a x=2\log_a 3-3\log_a 2$, unde $a>0,\ a\neq 1$.

5p **5.** Scrieți ecuația dreptei care conține punctul $A(3,2)$ şi este perpendiculară pe dreapta $d: x+2y+5=0$.

5p **6.** Știind că $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ şi $\sin x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, calculați $\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Fie matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & -2x & 4x^2\\ 0 & 1 & -4x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ din mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Calculați $\left(A(2)-A(0)\right)^{2010}$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Demonstrați că matricea $A(x)$ este inversabilă şi calculați inversa matricei $A(x)$.

2. Pe mulțimea $G=(0,1)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{xy}{2xy-x-y+1}$.

5p **a)** Verificați dacă $e=\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii „$*$”.

5p **b)** Arătați că orice element din mulțimea G este simetrizabil în raport cu legea „$*$”.

5p **c)** Demonstrați că funcția $f:G\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\frac{1}{x}-1$ este un izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $\left(\mathbb{R}_+^*,\cdot\right)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+1$.

5p **a)** Calculați $f'(5)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}\right)^n$.

5p **c)** Arătați că ecuația $f'(x)=0$ are exact trei soluții reale distincte.

2. Fie şirul $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n=\int_0^1\frac{\left(x^2+x+1\right)^n-x}{x^2+1}dx$.

5p **a)** Calculați I_0.

5p **b)** Verificați dacă $I_2-I_0\in\mathbb{Q}$.

5p **c)** Arătați că $I_{4n+1}\in\mathbb{Q}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

Prof. Ovidiu Bădescu

T105
2/1

$z = 1 - i\sqrt{3}$, se cere $|z|$

$E_1) \; |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$E_2) \; |z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$

Prof. Ovidiu Bădescu

T105
I/2

MODEL 2011/I/2

Fie $f(x)=x^2+x+1$, se cere mulțimea valorilor

E_1) mț. valorilor este imaginea funcției

E_2) $f'(x)=2x+1$

E_3) $f'(x)=0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

E_4)

x	$-\infty$				$-\frac{1}{2}$				∞
f'	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
f	∞	$\searrow$			$\frac{3}{4}$	$\nearrow$			∞

E_5) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=\infty$

$f(-\frac{1}{2})=(-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{4}-\frac{2}{4}+\frac{4}{4}=\frac{1-2+4}{4}=\frac{3}{4}$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+x+1)=\lim\limits_{x\to\infty} x^2=\infty$

E_6) $\mathrm{Im}f=$ reuniunea tuturor intervalelor de pe linia lui f pe care f este strict monotonă

$\mathrm{Im}f=[\frac{3}{4};\infty)\cup[\frac{3}{4};\infty)=[\frac{3}{4};\infty)$

Prof. Ovidiu Badescu

BAC 2011/MODEL/I/3

b_n progr. geometrică, $b_3 = 6$, $b_5 = 24$

se cere b_7

T105
I/3

$E_1)$ $b_7 = b_1 \cdot q^6$

$E_2)$ $b_3 = 6 \Rightarrow b_1 q^2 = 6$

$b_5 = 24 \Rightarrow b_1 \cdot q^4 = 24$

$E_3)$ împărțim $\Rightarrow \dfrac{b_1 q^2}{b_1 q^4} = \dfrac{6}{24} \Rightarrow \dfrac{1}{q^2} = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow q^2 = 4 \Rightarrow q = \pm 2$

$E_4)$ Caz I: $q = 2 \Rightarrow b_1 q^2 = 6 \Rightarrow b_1 \cdot 4 = 6$

$b_1 = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow b_7 = b_1 q^6 = \dfrac{3}{2} \cdot 2^6 = 3 \cdot 2^5 = 3 \cdot 32 = 96$

$E_5)$ Caz II: $q = -2 \Rightarrow b_1 q^2 = 6 \Rightarrow b_1 \cdot 4 = 6$

$\Rightarrow b_1 = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow b_7 = b_1 q^6 = \dfrac{3}{2} \cdot (-2)^6 = \dfrac{3}{2} \cdot 2^6 = 3 \cdot 2^5 = 96$

Prof. Ovidiu Bădescu

MODEL 2011 / I / 4

T10S
I/4

Găsiți $x=?$, $x>0$ pentru care

$$\log_a x = 2\log_a 3 - 3\log_a 2,\ a>0,\ a\neq 1$$

$E_1)$ $\log_a x = 2\log_a 3 - 3\log_a 2$

$E_2)$ $\log_a x = \log_a 3^2 - \log_a 2^3$

$\log_a x = \log_a 9 - \log_a 8$

$E_3)$ $\log_a x = \log_a \frac{9}{8}$

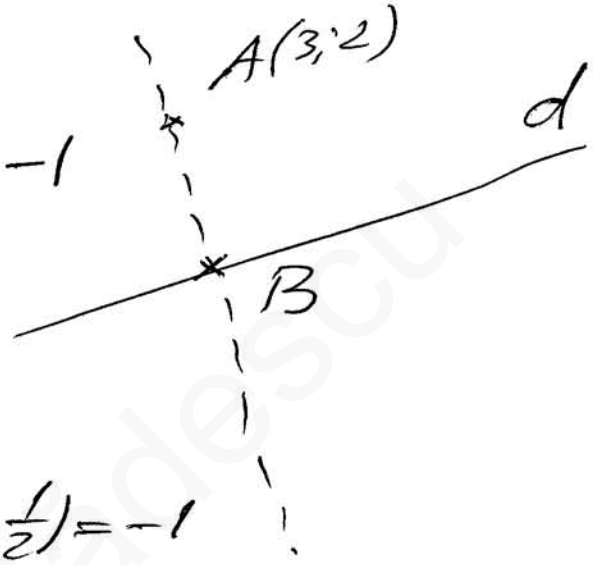
$E_4)$ Dar, funcția logaritm este injectivă

$\Rightarrow x = \frac{9}{8}$

Prof. Ovidiu Bădescu

BAC 2011 / MODEL / I 5

Se cere ec. dreptei ce trece prin $A(3;2)$ și este perpendiculară pe $d: x+2y+5=0$



$E_1)$ $AB \perp d \Rightarrow m_{AB} \cdot m_d = -1$

$E_2)$ $m_d = -\frac{a}{b} = -\frac{1}{2}$

$E_3)$ $m_{AB} \cdot m_d = -1 \Rightarrow m_{AB} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

$\Rightarrow m_{AB} = 2$

$E_4)$ Știm $A(3;2)$, știm $m_{AB} = 2$, folosim

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y - 2 = 2(x-3) \Rightarrow y - 2 = 2x - 6$$

$$2x - y - 4 = 0$$

Prof. Ovidiu Badescu

MODEL 2014 I / 6

T105
I/6

Dacă $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ și $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, să se

calculeze $\cos x$

E_1) folosim: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

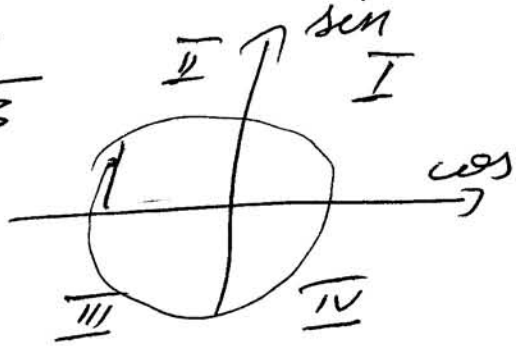
$$\Rightarrow \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{8}{9} + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

E_2) $\cos x = \pm \frac{1}{3}$

E_3) $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow x \in c.II \Rightarrow \cos x < 0$

$$\Rightarrow \cos x = -\frac{1}{3}$$



Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & -2x & 4x^2 \\ 0 & 1 & -4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculați $(A(2)-A(0))^{2010}$

$E_1)\ A(2)-A(0)=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 16 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 16 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{not}{=\!=} B$

$E_2)\ B^2=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 16 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 16 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B^3=B^2\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 16 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$E_3)$ Deci $B^3=O_3 \Rightarrow B^n=O_3,\ \forall n\geq 3$

$\Rightarrow B^{2010}=O_3 \Rightarrow (A(2)-A(0))^{2010}=O_3$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & -2x & 4x^2 \\ 0 & 1 & -4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$

E1) $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix} 1 & -2x & 4x^2 \\ 0 & 1 & -4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2y & 4y^2 \\ 0 & 1 & -4y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 1 & -2y-2x & 4y^2+8xy+4x^2 \\ 0 & 1 & -4y-4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 0 & -2(x+y) & 2(x+y)^2 \\ 0 & 1 & -4(x+y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$

$=A(x+y)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & -2x & 4x^2 \\ 0 & 1 & -4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Arătați că $A(x)$ e inversabilă și calculați inversa sa

$E_1)$ $\det A(x)=\begin{vmatrix} 1 & -2x & 4x^2 \\ 0 & 1 & -4x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0$
$=1\neq 0$

$\det A(x)\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$E_2)$ $A^t(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2x & 1 & 0 \\ 4x^2 & -4x & 1 \end{pmatrix}$

$E_3)$ $a^*_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4x & 1 \end{vmatrix}=1$; $a^*_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -2x & 0 \\ 4x^2 & 1 \end{vmatrix}=$
$=2x$

$a^*_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -2x & 1 \\ 4x^2 & -4x \end{vmatrix}=8x^2-4x^2$ $a^*_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -4x & 1 \end{vmatrix}=0$
$=4x^2$

$a^*_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4x^2 & 1 \end{vmatrix}=1$; $a^*_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4x^2 & -4x \end{vmatrix}=4x$

$a^*_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0$; $a^*_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2x & 0 \end{vmatrix}=0$, $a^*_{33}=1$

$E_4)$ $A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2x & 4x^2 \\ 0 & 1 & 4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2x & 4x^2 \\ 0 & 1 & 4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V105
II 2a)

Pe $G_7=(0,1)$ definim $x \circ y = \frac{xy}{2xy-x-y+1}$

Arătați că $e=\frac{1}{2}$ este el neutru pt $\circ$

$E_1)$ $\exists e \in G$ a.î. $\forall x \in G$ să avem

$$x \circ e = e \circ x = x$$

$E_2)$ $x \circ e = x \Rightarrow \frac{xe}{2xe-x-e+1} = x \Leftrightarrow$

$$xe = 2x^2e - x^2 - ex + x \Leftrightarrow$$

$$2xe - 2x^2e = -x^2 + x \Leftrightarrow (2x-2x^2)e = -x^2+x$$

Ar trebui împărțit cu $2x-2x^2$, însă trebuie arătat că e nenul. Dacă $2x-2x^2=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x(1-x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \notin G \\ \text{sau} \\ x=1 \notin G \end{cases} \Rightarrow 2x-2x^2 \neq 0$$

$$\Rightarrow e = \frac{-x^2+x}{2x-2x^2} = \frac{x(-x+1)}{2x(1-x)} = \frac{1}{2} \in G_7 \quad (1)$$

$E_3)$ Analog, din $e \circ x = x$ prin calcule asemănătoare se ajunge la $e=\frac{1}{2} \in G$ (2)

Din (1) și (2) $\rightarrow e=\frac{1}{2}$ el. neutru pt $\circ$

Obs: Deoarece ni s-a dat în enunț $e=\frac{1}{2}$ puteam direct verifica dacă $x \circ \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \circ x = x$ și era mai simplu, însă nu e metodă generală.

Obs 2: se putea arăta că $\circ$ comutativă și scăpa de $x \circ e$.

Prof. Ovidiu Bădescu

V105
II 26

Fie $G=(0;1)$ cu $x \circ y = \dfrac{xy}{2xy-x-y+1}$ cu $e=\dfrac{1}{2}$ element neutru. Arătați că orice element din G este simetrizabil în raport cu o

---

$E_1)$ $\forall x \in G$, $\exists x' \in G$ a.î. $x \circ x' = x' \circ x = e$

$E_2)$ $x \circ x' = e \Rightarrow \dfrac{xx'}{2xx'-x-x'+1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2xx' = 2xx' - x - x' + 1 \Leftrightarrow x' = 1-x$

Deoarece $x \in (0;1) \Rightarrow 1-x \in (0;1) \Rightarrow x' \in G$

$\Rightarrow x' = 1-x$ este simetricul lui x, $\forall x \in G$

$E_3)$ Arătăm că o comutativă:

$\forall x, y \in G \Rightarrow x \circ y = y \circ x$

$\Leftrightarrow \dfrac{xy}{2xy-x-y+1} = \dfrac{yx}{2yx-y-x+1}$ adev.

$\Rightarrow x \circ x' = x' \circ x \Rightarrow x' = 1-x$ simetricul lui x, $\forall x \in G$

Prof. Ovidiu Badescu

V/105
II 2c)

Fie $G=(0,1)$ cu $x \circ y = \dfrac{xy}{2xy-x-y+1}$.

Dovediți că $f: G \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ este un izomorfism de la $(G, \circ)$ la $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$

E_1) f izomorfism $\Leftrightarrow$ f morfism și f bijectivă

E_2) f morfism $\Leftrightarrow \forall x, y \in G \to f(x \circ y) = f(x) \cdot f(y)$

E_3) $f(x \circ y) = f\left(\dfrac{xy}{2xy-x-y+1}\right) = \dfrac{2xy-x-y+1}{xy} - 1$

$$\Rightarrow f(x \circ y) = \frac{xy-x-y+1}{xy} \quad (1)$$

E_4) $f(x) \cdot f(y) = \left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right) = \dfrac{1-x}{x} \cdot \dfrac{1-y}{y} = \dfrac{1-x-y+xy}{xy}$

$$\Rightarrow f(x) \cdot f(y) = \frac{1-x-y+xy}{xy} \quad (2)$$

E_5) Din (1) și (2) $\to$ egalitate $\Rightarrow f$ morfism

Prof. Ovidiu Băcoșu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+1$

Calculați $f'(5)$

E_1) Folosim $(f_1 f_2 \cdots f_n)' = f_1' f_2 f_3 \cdots f_n + f_1 f_2' f_3 \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_{n-1} f_n'$

E_2) $f'(x) = 1\cdot(x-3)(x-4)(x-5) + (x-2)(x-4)(x-5) + (x-2)(x-3)(x-5) + (x-2)(x-3)(x-4) + 0$

E_3) $f'(5) = 2\cdot1\cdot0 + 3\cdot1\cdot0 + 3\cdot2\cdot0 + 3\cdot2\cdot1 = 6$

met II

$f(x) = [(x-2)(x-3)(x-4)]\cdot(x-5)+1$

$\Rightarrow f'(x) = [(x-2)(x-3)(x-4)]'(x-5) + [(x-2)(x-3)(x-4)]\cdot(x-5)' + 1'$

$\Rightarrow f'(5) = [\quad]'\cdot 0 + 3\cdot2\cdot1\cdot1 + 0 = 6$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+1$

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}\right)^n$

$E_1)\ l=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1-2)(n+1-3)(n+1-4)(n+1-5)+1-1}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)+1-1}\right)^n=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}\right)^n=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n-5}\right)^n \overset{1^\infty}{=\!=}$

$E_2)\ l \overset{1^\infty}{=\!=} \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n-5}-1\right)^{\frac{n-5}{n-5}\cdot n}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1-n+5}{n-5}\right)^n=\lim\limits_{n}\left(1+\frac{4}{n-5}\right)^n=$

$=\lim\limits_{n}\left[\left(1+\frac{4}{n-5}\right)^{\frac{n-5}{4}}\right]^{\frac{4}{n-5}\cdot n}=$

$=e^{\lim\limits_{n}\frac{4n}{n-5}}=e^4$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+1$

Arătați că ecuația $f'(x)=0$ are exact 3 soluții reale distincte

---

E_1) Ne gândim la T. Rolle:

„Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cu f cont. pe $[a,b]$, f derivabilă pe (a,b) și dacă $f(a)=f(b)\Rightarrow \exists\, c\in(a,b)$ cu $f'(c)=0$"

E_2) Fie $f_1:[2,3]\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+1$

$\Rightarrow f_1$ cont. pe $[2,3]$, f_1 derivabilă pe $(2,3)$.

$f_1(2)=0+1=1$, $f_1(3)=0+1=1\Rightarrow f(2)=f(3)$

$\Rightarrow \exists\, c_1\in(2,3)$ cu $f_1'(c_1)=0\Rightarrow f'(c_1)=0$, $c_1\in(2,3)$

E_3) Analog se obține $f'(c_2)=0$, $c_2\in(3,4)$ și $f'(c_3)=0$, $c_3\in(4,5)$ și cum $c_1\in(2,3)$, $c_2\in(3,4)$, $c_3\in(4,5)\Rightarrow$ sunt distincte $\Rightarrow$

ec. $f'(x)=0$ are cel puțin 3 rad. distincte

E_4) Deoarece gr $f'=3\Rightarrow f'$ are cel mult 3 rădăcini $\xrightarrow{(1)}$ ec. $f'(x)=0$ are exact 3 rad. distincte

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{(x^2+x+1)^n - x}{x^2+1}\,dx$

Calculati I_0

E1) $I_0 = \int_0^1 \frac{(x^2+x+1)^0 - x}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{1-x}{x^2+1}\,dx$

E2) $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx =$

$= \frac{1}{1}\operatorname{arctg}\frac{x}{1}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\cdot\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$

$= (\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx =$

$= \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - \frac{1}{2}\cdot \ln|x^2+1|\Big|_0^1 =$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{0}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$

Obs.: S-a folosit $\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + C$

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{(x^2+x+1)^n - x}{x^2+1}\,dx$

Verificați dacă $I_2 - I_0 \in \mathbb{Q}$

E1) $I_2 - I_0 = \int_0^1 \frac{(x^2+x+1)^2 - x}{x^2+1}\,dx - \int_0^1 \frac{1-x}{x^2+1}\,dx$

$= \int_0^1 \frac{(x^2+x+1)^2 - 1}{x^2+1}\,dx$. Folosind $a^2-b^2 = (a-b)(a+b) \Rightarrow$

E2) $I_2 - I_0 = \int_0^1 \frac{(x^2+x+1-1)(x^2+x+1+1)}{x^2+1}\,dx =$

$= \int_0^1 \frac{(x^2+x)(x^2+x+2)}{x^2+1}\,dx =$

$= \int_0^1 \frac{x^4+x^3+2x^2+x^3+x^2+2x}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^4+2x^3+3x^2+2x}{x^2+1}\,dx$

E3) $x^4+2x^3+3x^2+2x \,/\, x^2+1$

$-x^4 \quad -x^2$

$2x^3+2x^2+2x$

$-2x^3 \quad -2x$

$2x^2$

$-2x^2-2$

-2

E4) $I_2 - I_0 = \int_0^1 (x^2+2x+2)\,dx - 2\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx =$

$= \left(\frac{x^3}{3} + 2\cdot\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_0^1 - 2\arctg\frac{x}{1}\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3}+1+2\right) - 0 - 2(\arctg 1 - \arctg 0)$

$\notin \mathbb{Q}$