EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Probă scrisă la matematică - Proba E c)

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_3=5$ și $a_5=11$. Calculați suma primilor șapte termeni ai progresiei.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$, $g(x)=x+3$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^2-1}=2$.

5p **4.** Calculați $a\cdot b$ știind că $a+b=150$ și numărul a reprezintă 25% din numărul b.

5p **5.** Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care punctele $A(2,3)$, $B(4,5)$ și $C(m+1,m^2)$ sunt coliniare.

5p **6.** Calculați $\cos x$, știind că $\sin x=\frac{1}{3}$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru $m\in\mathbb{R}$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} m & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & m\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} mx+y=-1\\ x+y+z=3\\ x+y+mz=0\end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei A.

5p **b)** Rezolvați sistemul pentru $m=0$.

5p **c)** Verificați dacă sistemul este incompatibil pentru $m=1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x*y=(x-4)(y-4)+4$.

5p **a)** Demonstrați că legea „$*$” este asociativă.

5p **b)** Demonstrați că $x*y\in(4,+\infty)$, oricare ar fi $x,y\in(4,+\infty)$.

5p **c)** Calculați $1*2*3*\ldots*2010$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$.

5p **b)** Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(2,5)$.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

2. Se consideră funcțiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ și $g(x)=2\sqrt{x}(\ln x-2)$.

5p **a)** Demonstrați că funcția g este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Calculați $\int_1^4 f(x)\,dx$.

5p **c)** Calculați $\int_1^{e^2} 2^{g(x)}\cdot f(x)\,dx$.

V105

$a_3 = 5$, $a_5 = 11$, progr. aritm., $n \in \overline{1,11}$

se cere S_7

E_1) folosim $a_n = a_1 + (n-1)r$

$\Rightarrow a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow a_1 + 2r = 5$

$a_5 = a_1 + 4r \Rightarrow a_1 + 4r = 11$

E_2) $\begin{cases} a_1 + 2r = 5 \\ a_1 + 4r = 11 \end{cases}$

" $-$ " : $\quad -2r = -6 \Rightarrow r = \frac{-6}{-2} = 3$

înlocuim în $a_1 + 2r = 5 \Rightarrow a_1 + 6 = 5$

$\Rightarrow a_1 = 5 - 6 \Rightarrow a_1 = -1$

E_3) $S_7 = \frac{(a_1 + a_7) \cdot 7}{2}$

$a_7 = a_1 + 6r = -1 + 6 \cdot 3 = -1 + 18 = 17$

$S_7 = \frac{(-1+17) \cdot 7}{2} = \frac{16 \cdot 7}{2} = 56$

Prof. Ovidiu Bădescu

V105

Fie $f(x)=2x-1$, $g(x)=x+3$. Se cere M ∈ I/2 coord pct de intersecție

---

E_1) de fiecare dată când apar funcții, în loc de $f(x)$ înlocuim cu y

$\Rightarrow$ pct de intersecție dintre $y=2x-1$ și $y=x+3$

E_2) Pct de intersecție se găsește rezolvând sistemul: $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=x+3 \end{cases} \Rightarrow x+3=2x-1$

$\Rightarrow 2x-1-x-3=0 \Rightarrow x-4=0$

$\Rightarrow x=4$

E_3) înlocuim în $y=2x-1 \Rightarrow y=7$

$\Rightarrow M(4;7)$

E_4)

Prof. Ovidiu Bădescu

V/105
I/3

Rezolvați: $\sqrt[3]{x^2-1}=2$

E_1) Cond.: $x \in \mathbb{R}$

E_2) $\sqrt[3]{x^2-1}=2 \mid (\,)^3$

$\Rightarrow x^2-1=8 \Rightarrow x^2=9$

$\Rightarrow x=\pm 3$

E_3) S_g: $x \in \{-3, 3\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați $a \cdot b = ?$ dacă $a+b=150$ și a este 25% din b 1/105 I/4

$E_1)$ a este 25% din b înseamnă

$$a = \frac{25}{100} \cdot b \Rightarrow a = \frac{b}{4}$$

$E_2)$ $a+b=150 \Rightarrow \frac{b}{4} + b = 150 \mid \cdot 4$

$\Rightarrow b + 4b = 600 \Rightarrow 5b = 600$

$b = \frac{600}{5} = 120 \Rightarrow \boxed{b=120}$

$E_3)$ $a = \frac{b}{4} \Rightarrow a = \frac{120}{4} \Rightarrow \boxed{a=30}$

$E_4)$ Se cere $a \cdot b = 30 \cdot 120 = 3600$

Prof. Ovidiu Bădescu

V105 I/5

Găsiți $m=?$ dacă $A(2,3)$, $B(4,5)$ și $C(m+1, m^2)$ sunt coliniare

---

$E_1)$ A, B, C coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$E_2)$ în cazul nostru $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ m+1 & m^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 10 + 4m^2 + 3(m+1) - 5(m+1) - 2m^2 - 12 = 0$

$10 + 4m^2 + 3m + 3 - 5m - 5 - 2m^2 - 12 = 0$

$\Rightarrow 2m^2 - 2m - 4 = 0 \mid :2$

$m^2 - m - 2 = 0$

$E_3)$ $m_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$

$= \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \begin{cases} \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{-2}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow m \in \{-1, 2\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V/105
I/6

Găsiți $\cos x = ?$ dacă

$$\sin x = \frac{1}{3} \text{ și } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

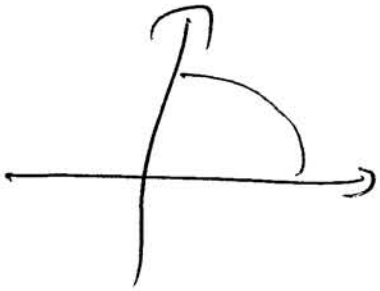
E_1) Folosim: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\cos^2 x = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

E_2) $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x \in$ cd I



$$\Rightarrow \cos x > 0$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Prof. Ovidiu Badescu

M2/V105
II/a)

Fie $A=\begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$, se cere

$\det A = ?$

$E_1)$ $\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^2+1+0-$
$-0-m-m$

$E_2)$ $\det A = m^2-2m+1$

Prof. Ovidiu Badescu

M2/V10S
II 16)

Fie $\begin{cases} mx+y=-1 \\ x+y+z=3 \\ x+y+mz=0 \end{cases}$

Rezolvați sistemul pentru $m=0$

E1) $m=0 \Rightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x+y+z=3 \\ x+y=0 \end{cases}$

E2) Din $\boxed{y=-1}$ și $x+y=0 \Rightarrow x-1=0$

$\Rightarrow \boxed{x=1}$

E3) Din $\left.\begin{array}{l} x+y+z=3, \\ y=-1 \\ x=1. \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1-1+z=3 \Rightarrow z=3$

E4) Soluția: $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M2/105

II 1c)

Fie $\begin{cases} mx+y=-1 \\ x+y+z=3 \\ x+y+mz=0 \end{cases}$

verificați dacă sistemul este incompatibil pentru $m=1$

$E_1)$ $m=1 \Rightarrow$ înlocuim $\begin{cases} x+y=-1 \\ x+y+z=3 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

$E_2)$ Din ec. (2) și (3) $\Rightarrow$ contradicție

$\Rightarrow$ sist incompatibil

Prof. Ovidiu Bănescu

Fie $x*y=(x-4)(y-4)+4$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Demonstrați că $*$ este asociativă

E_1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ ar trebui ca

$$(x*y)*z = x*(y*z)$$

E_2) Pentru a nu vă încurca, scriem legea sub altă formă:

$$x*y=(x-4)(y-4)+4 \Rightarrow x*y = xy-4x-4y+16+4$$

$$\Rightarrow x*y = xy-4x-4y+20$$

E_3) $(x*y)*z = \underbrace{(xy-4x-4y+20)}_{x} * \underbrace{z}_{y} =$

$$= (xy-4x-4y+20)\cdot z - 4(xy-4x-4y+20) - 4z + 20$$

$$= xyz-4xz-4yz+20z-4xy+16x+16y-80-4z+20$$

$$= xyz-4xz-4yz-4xy+16x+16y+16z-60 \quad (1)$$

E_4) $x*(y*z) = \underbrace{x}_{x} * (\underbrace{yz-4y-4z+20}_{y}) =$

$$= x(yz-4y-4z+20)-4x-4(yz-4y-4z+20)+20 =$$

$$= xyz-4xy-4xz+20x-4x-4yz+16y+16z-80+20 =$$

$$= xyz-4xy-4xz-4yz+16x+16y+16z-60 \quad (2)$$

E_5) Din (1) și (2) $\Rightarrow *$ asociativă

Obs.: cei inteligenți foloseau forma restrânsă, cea dată în ipoteză

Prof. Ovidiu Ladescu

Pe $\mathbb{R}$ definim $x * y = (x-4)(y-4)+4$.

Arătați că $x * y \in (4;\infty), \forall x, y \in (4;\infty)$

$E_1)$ $x \in (4;\infty) \Rightarrow x > 4 \Rightarrow x - 4 > 0$

$y \in (4;\infty) \Rightarrow y > 4 \Rightarrow y - 4 > 0$

$E_2)$ înmulțim $\Rightarrow (x-4)(y-4) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow xy - 4x - 4y + 16 > 0 \mid +4$

$\Rightarrow xy - 4x - 4y + 20 > 4$

$\Rightarrow x * y \in (4;\infty)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x*y=(x-4)(y-4)+4$

Calculați $1*2*3*\ldots*2010$

E_1) Din $x*y=(x-4)(y-4)+4$ observăm că

$x*4=(x-4)(4-4)+4 \Rightarrow x*4=4$ și că

$4*x=(4-4)(x-4)+4 \Rightarrow 4*x=4$

E_2) Fie $N=1*2*3*\ldots*2010 \Rightarrow$

$\Rightarrow N=(1*2*3)*4*(5*6*\ldots*2010)$

E_3) Folosind $x*4=4, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$\underbrace{(1*2*3)}_{x}*4=4 \Rightarrow N=4*(5*6*\ldots*2010)$

E_4) Folosind $4*x=4, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow N=4*\underbrace{(5*6*\ldots*2010)}_{x}=4$

$\Rightarrow 1*2*\ldots*2010=4$

Prof. Ovidiu Bădescu

M2/M05

Fie $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ III 1 a)

Se cere $f'(x)$

$E_1)$ $f'(x) = \left(x^2 + \frac{2}{x}\right)' = (x^2)' + \left(\frac{2}{x}\right)' =$

$E_2)$ $f'(x) = 2x + 2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' =$

$= 2x + 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$= 2x - \frac{2}{x^2}$

Prof. Ovidiu Băgescu

M2/V105

Fie $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ III 16)

Găsiți ec. tangentei în $A(2; 5)$

E_1) ec. tangentei în $x = \alpha$ este

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

E_2) în cazul nostru $\alpha = 2$

$$\Rightarrow y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

E_3) $f(2) = 2^2 + \frac{2}{2} = 4 + 1 = 5$

E_4) Mai a calcula $f'(2)$, calculez $f'(x)$ și după aceea înlocuim pe x cu 2

$$f'(x) = \left(x^2 + \frac{2}{x}\right)' = 2x + 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= 2x - \frac{2}{x^2} \Rightarrow f'(2) = 4 - \frac{2}{4} = \frac{2}{4} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f'(2) = \frac{7}{2}$$

E_5) ec. tg.: $y - 5 = \frac{7}{2}(x - 2) \mid \cdot 2$

$$\Rightarrow 2x - 14 \Rightarrow \boxed{7x - 2y - 4 = 0}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

$f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ M12/N105 III 1c)

Se cere ec. asimpt verticale la G_f

$E_1)$ $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$E_2)$ <u>as. verticale</u> se calculează în capetele deschise și finite ale D_f, adică în cazul nostru în $x = 0$

$E_3)$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) \overset{0 + \frac{2}{0^-}}{=\!=\!=} -\infty$

$\Rightarrow x = 0$ as. vert. la stg

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) \overset{0 + \frac{2}{0^+}}{=\!=\!=} \infty$

$\Rightarrow x = 0$ as. vert la dr.

Prof Ovidiu Badescu

V105
Fie $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ și $g(x)=2\sqrt{x}(\ln x-2)$ (a)

Arătați că g este primitiva lui f

E_1) g primitiva lui $f \Leftrightarrow \begin{cases} g \text{ derivabilă (adev)} \\ g'(x)=f(x) \end{cases}$

E_2) $g'(x)=\left(2\sqrt{x}(\ln x-2)\right)'=$

$=2\left((\sqrt{x})'(\ln x-2)+\sqrt{x}\cdot(\ln x-2)'\right)=$

$=2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x-2)+\sqrt{x}\cdot\left(\frac{1}{x}-0\right)\right)=$

$=2\left(\frac{\ln x-2}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)$

E_3) Dar, $x=(\sqrt{x})^2 \Rightarrow$

$g'(x)=2\left(\frac{\ln x-2}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2}\right)$

$=2\left(\frac{\ln x-2}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=2\cdot\frac{\ln x-2+2}{2\sqrt{x}}$

$=2\cdot\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=f(x)$

Prof. Ovidiu Badescu

V105

Fie $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ și $g(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)$ (VII 26)

Se știe că g este primitiva lui f, să se

calc $\int_1^4 f(x)\,dx$

E_1) Dacă F primitiva lui $f \Rightarrow \begin{cases} F \text{ derivabilă} \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = F(x)$$

E_2) în cazul nostru, g este primitiva lui f

$$\Rightarrow \int_1^4 f(x)\,dx = g(x)\Big|_1^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)\Big|_1^4 =$$

$$= 2\sqrt{4}(\ln 4 - 2) - 2\sqrt{1}(\underbrace{\ln 1}_{0} - 2)$$

$$= 2\sqrt{4}\ln 4 - 4 + 4 = 2\sqrt{4}\ln 4 =$$

$$= 4\ln 4 = 4\ln 2^2 =$$

$$= 8\ln 2$$

Prof. Ovidiu Bădescu

V105

Fie $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ și $g(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)$ (II 20)

Se știe că g este primitiva lui f, pe care

$$I = \int_1^{e^2} 2^{g(x)} \cdot f(x)\,dx$$

E1) g primitiva lui $f \Rightarrow \begin{cases} g \text{ derivabilă} \\ g'(x) = f(x) \end{cases}$

E2) $I = \int_1^{e^2} 2^{g(x)} \cdot f(x)\,dx$

not $t = g(x) \mid (\,)' \Rightarrow dt = g'(x)\,dx$

$\Rightarrow dt = f(x)\,dx$

$x = 1 \Rightarrow t = g(1) \Rightarrow t = 2\sqrt{1}(\underbrace{\ln 1}_{0} - 2) = -4$

$x = e^2 \Rightarrow t = g(e^2) \Rightarrow t = 2\sqrt{e^2}(\ln e^2 - 2) = 2e(2-2) = 0$

E3) $I = \int_{-4}^{0} 2^t\,dt = \frac{2^t}{\ln 2}\Big|_{-4}^{0} =$

$= \frac{1}{\ln 2}\left(2^0 - 2^{-4}\right) = \frac{1}{\ln 2}\left(1 - \frac{1}{2^4}\right) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{15}{16}$

Prof. Ovidiu Dădescu