EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Probă scrisă la matematică - Proba E c)

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați $\log_2 \frac{1}{8} + \sqrt[3]{27}$.

5p **2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2x+3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2-3^{x^2-1}=1$.

5p **4.** Determinați câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4\}$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\overline{v_1}=2\vec{i}-\vec{j}$ și $\overline{v_2}=\vec{i}+3\vec{j}$. Determinați coordonatele vectorului $\overline{w}=2\overline{v_1}-\overline{v_2}$.

5p **6.** Un triunghi dreptunghic are catetele $AB=3$, $AC=4$. Determinați lungimea înălțimii duse din A.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați A^2-A.

5p **b)** Determinați inversa matricei A.

5p **c)** Rezolvați ecuația $A\cdot X=\begin{pmatrix}2010 & 2010\\ 2009 & 2010\end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_3[X]$, $f=X^2+X$, $g=X^2+\hat{2}X+a$, cu $a\in\mathbb{Z}_3$.

5p **a)** Calculați $f(\hat{0})+f(\hat{1})$.

5p **b)** Determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Demonstrați că $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})=g(\hat{0})+g(\hat{1})+g(\hat{2})$, pentru oricare $a\in\mathbb{Z}_3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\cdot e^x$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $[-2,0]$.

5p **c)** Demonstrați că $0\le f(x)+f(x^2)\le\frac{e^2+1}{e}$, oricare ar fi $x\in[-1,0]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=x+\frac{1}{x}$.

5p **a)** Calculați $\int_1^3\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx$.

5p **b)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)$.

5p **c)** Calculați $\int_1^e f(x)\cdot\ln x\,dx$.

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați $\log_2 \frac{1}{8} + \sqrt[3]{27}$

$E_1)$ $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 \frac{1}{2^3} = \log_2 2^{-3} =$

$= -3 \log_2 2 = -3$

$E_2)$ $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$

$E_3)$ $N = -3 + 3 = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți coordonatele vârfului parabolei

$f(x) = x^2 - 2x + 3$

$E_1)$ $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

$E_2)$ $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$

$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}{4 \cdot 1} = -\frac{4 - 12}{4} =$

$= -\frac{-8}{4} = \frac{8}{4} = 2$

$E_3)$ $x_V = 1$ $\Rightarrow V(1; 2)$

$y_V = 2$

Prof. Ovidiu Badescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$2-3^{x^2-1}=1$$

$E_1)$ $2-3^{x^2-1}=1$

$$-3^{x^2-1}=-1 \mid \cdot(-1) \Rightarrow 3^{x^2-1}=1$$

$E_2) \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1$

$$\Rightarrow x=\pm 1$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Câte numere de 3 cifre distincte se pot forma cu elemente din $\{1,2,3,4\}$

met I

$E_1)$ $N = \overline{abc}$ cu $a,b,c \in \{1,2,3,4\}$

$E_2)$ $a \to 4$ v

$b \to 3$ v (pt că distincte)

$c \to 2$ v (pt că cifrele distincte)

independ

în total $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ numere

met II:

le scriem pe toate $\Rightarrow$ 24 numere

met III:

contează ordinea, aleg 3 numere din 4 posibile $\Rightarrow$ $A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$

Prof. Ovidiu Băcescu

Fie $\vec{v_1} = 2\vec{i} - \vec{j}$ și $\vec{v_2} = \vec{i} + 3\vec{j}$

Determinați coordonatele lui

$$\vec{w} = 2\vec{v_1} - \vec{v_2}$$

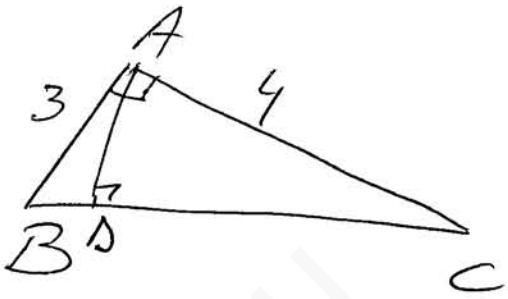
E1) $\vec{w} = 2(2\vec{i} - \vec{j}) - (\vec{i} + 3\vec{j}) =$

$= 4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{i} - 3\vec{j} \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{w} = 3\vec{i} - 5\vec{j}}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

ΔABC e dreptunghic cu catele $AB=3$ și $AC=4$. Determinați lungimea înălțimii din A



$E_1)\ \mathcal{A}_{\Delta dreptt} = \frac{C_1 \cdot C_2}{2}$

$E_2)\ \mathcal{A}_{\Delta} = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$E_3)\ \mathcal{A}_{\Delta dreptt} = \frac{baza \cdot înălț}{2} = \frac{BC \cdot AD}{2}$

$E_4)$ Cu Pitagora $\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\Rightarrow BC^2 = 9+16 = 25 \Rightarrow BC = 5$

$E_5)$ Egalând ariile $\Rightarrow$

$6 = \frac{5 \cdot AD}{2} \Rightarrow 12 = 5AD$

$\Rightarrow AD = \frac{12}{5}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$. Calculați A^2-A

$E_1)$ $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$

$E_2)$ $A^2-A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, calculați inversa matricii A

$E_1)\ \det A=\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=0-1=-1\neq 0\Rightarrow \exists A^{-1}$

$E_2)\ A^t=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$

$E_3)\ A^*=\begin{pmatrix}a_{11}^* & a_{12}^*\\ a_{21}^* & a_{22}^*\end{pmatrix}$

$a_{11}^*=(-1)^{1+1}\cdot|0|=0$

$a_{12}^*=(-1)^{1+2}\cdot|1|=-1$

$a_{21}^*=(-1)^{2+1}\cdot|1|=-1$

$a_{22}^*=(-1)^{2+2}\cdot|1|=1$

$E_4)\ A^*=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

$E_5)\ A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $A\cdot X=\begin{pmatrix}2010&2010\\2009&2010\end{pmatrix}$

E_1) Ec. de tipul $AX=B$, dacă $\exists A^{-1}$ se rezolvă astfel: $AX=B\,/\cdot_S A^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}B$

E_2) $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\det A=0-1=-1\neq 0\Rightarrow \exists A^{-1}$

$A^t=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, $A^*=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$

E_3) $A\cdot X=\begin{pmatrix}2010&2010\\2009&2010\end{pmatrix}\Big/\cdot_S A^{-1}$

$\Rightarrow X=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2010&2010\\2009&2010\end{pmatrix}\Rightarrow$

$X=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2010&2010\\2009&2010\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}2009&2010\\1&0\end{pmatrix}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^2 + X$.

Calculați $f(\hat{0}) + f(\hat{1})$

$E_1)$ $f(\hat{0}) = \hat{0}^2 + \hat{0} = \hat{0} + \hat{0} = \hat{0}$

$f(\hat{1}) = \hat{1}^2 + \hat{1} = \hat{1} + \hat{1} = \hat{2}$

$E_2 / f(\hat{0}) + f(\hat{1}) = \hat{0} + \hat{2} = \hat{2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^2 + X$, $f \in \mathbb{Z}_3[X]$.

Calculați rădăcinile lui f

E1) $\mathbb{Z}_3 = \{\hat{0}; \hat{1}; \hat{2}\}$

E2) $x = \hat{0} \Rightarrow f(\hat{0}) = \hat{0}^2 + \hat{0} = \hat{0} + \hat{0} = \hat{0} \Rightarrow$

$x = \hat{0}$ e rădăcină

$x = \hat{1} \Rightarrow f(\hat{1}) = \hat{1}^2 + \hat{1} = \hat{1} + \hat{1} = \hat{2} \neq \hat{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \hat{1}$ nu e rădăcină

$x = \hat{2} \Rightarrow f(\hat{2}) = \hat{2}^2 + \hat{2} = \hat{4} + \hat{2} = \hat{6} = \hat{0}$

$\Rightarrow x = \hat{2}$ e rădăcină

E3) rădăcinile lui f sunt

$x \in \{\hat{0}; \hat{2}\}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^2 + X$ și $g = X^2 + \hat{2}X + a$

Arătați că $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = g(\hat{0}) + g(\hat{1}) + g(\hat{2})$

E_1) $f(\hat{0}) = \hat{0}^2 + \hat{0} = \hat{0}$

$f(\hat{1}) = \hat{1}^2 + \hat{1} = \hat{2}$

$f(\hat{2}) = \hat{2}^2 + \hat{2} = \hat{6} = \hat{0}$

$\Rightarrow \boxed{f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = \hat{2}}$ (1)

E_2) $g(\hat{0}) = \hat{0}^2 + \hat{2} \cdot \hat{0} + a = a$

$g(\hat{1}) = \hat{1}^2 + \hat{2} \cdot \hat{1} + a = \hat{2} + a$

$g(\hat{2}) = \hat{2}^2 + \hat{2} \cdot \hat{2} + a = \hat{6} + a = a$

$\Rightarrow g(\hat{0}) + g(\hat{1}) + g(\hat{2}) = \hat{2} + \hat{3}a$

Dar, $\hat{3} = \hat{0} \Rightarrow \hat{3}a = \hat{0}$

$\Rightarrow \boxed{g(\hat{0}) + g(\hat{1}) + g(\hat{2}) = \hat{2}}$ (2)

E_3) Din (1) + (2) $\Rightarrow$ egalitate

Prof. Ovidiu Băgescu

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot e^x$

Calculați $f'(x)$

E1) $f'(x) = (x^2 e^x)' = (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)' =$

$= 2x e^x + x^2 \cdot e^x$

$= e^x (x^2 + 2x)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=x^2\cdot e^x$, arătați că f este descrescătoare pe $[-2,0]$

$E_1)$ $f'(x)=(x^2e^x)'=(x^2)'e^x+x^2\cdot(e^x)'=$

$=2xe^x+x^2e^x=e^x(x^2+2x)$

$E_2)$ $f'(x)=0\Rightarrow$ $\begin{cases} e^x=0 \text{ fals} \\ \text{sau} \\ x^2+2x=0\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-0}}{2}= \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-2 \end{cases}$

$E_3)$

x		$[-2$		$0]$
f'		0	$---$	0
f			$\searrow$	

Ne interesează doar $x\in[-2,0]$, de aceea hașurăm restul

$E_4)$ $f'(-1)=e^{-1}((-1)^2+2\cdot(-1))=\frac{1}{e}(1-2)<0$

$\Rightarrow f'(x)<0, \forall x\in(-2,0)$

$\Rightarrow f\searrow$ pe $[-2,0]$

Prof. Ovidiu Pădescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\cdot e^x$

Demonstrați că $0\le f(x)+f(x^2)\le \frac{e^2+1}{e}$, $\forall x\in[-1,0]$

E_1) Vom face tabel de variație pentru $f(x)$ și pentru $f(x^2)$

E_2) $f(x)=x^2e^x \Rightarrow f'(x)=(x^2e^x)'=2xe^x+x^2e^x$

$= e^x(x^2+2x)$

$f'(x)=0 \Rightarrow$ $e^x=0$ fals sau $x(x+2)=0 \Rightarrow$ $x=-2$ sau $x=0$

x		-2		$[-1$		$0]$
f'			$-$	$-$	$-$	
f				$\searrow$		

$f'(-\frac{1}{2})=e^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{4}+2\cdot(-\frac{1}{2}))=\frac{1}{\sqrt{e}}(\frac{1}{4}-1)<0$

$\Rightarrow f'(x)<0,\ \forall x\in[-1,0]\Rightarrow f\searrow$ pe $[-1,0]$

$\Rightarrow f(-1)\ge f(x)\ge f(0)\Rightarrow f(0)\le f(x)\le f(-1)$

$\Rightarrow \boxed{0\le f(x)\le \frac{1}{e}}$ (1)

E_3) fie $g(x)=f(x^2)=x^4e^{x^2}\Rightarrow f'(x^2)=4x^3e^{x^2}+x^4e^{x^2}\cdot 2x$

$\Rightarrow g'(x)=x^3e^{x^2}(4+2x^2)\le 0,\ \forall x\in[-1,0]$

$\Rightarrow$ descresc $\Rightarrow g(-1)\ge g(x)\ge g(0)\Rightarrow g(0)\le g(x)\le g(-1)$

$\Rightarrow 0\le g(x)\le e \Rightarrow \boxed{0\le f(x^2)\le e}$ (2) Din (1)+(2) $\Rightarrow$ E.e.d.

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Calculați: $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) dx$

$$I = \int_1^3 \left(x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= \int_1^3 x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 =$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Prof. Ovidiu Băgescu

Fie $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Găsiți volumul corpului generat de $\mathcal{G}$ unde $g:[1;2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$

E1) $V = \pi \int_a^b g^2(x)\,dx$

E2) $V = \pi \cdot \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx =$

$= \pi \int_1^2 \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$

$= \pi \int_1^2 \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) dx =$

$= \pi \left(\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 + 2x\Big|_1^2 + \int_1^2 x^{-2}\,dx \right)$

$= \pi \left[\frac{1}{3}(2^3 - 1^3) + 2(2-1) + \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^2 \right] =$

$= \pi \left(\frac{7}{3} + 2 - \frac{1}{x}\Big|_1^2 \right) = \pi \left(\frac{13}{3} - \ln|x|\Big|_1^2 \right)$

$= \pi \left(\frac{13}{3} - (\ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{0}) \right) = \pi \left(\frac{13}{3} - \ln 2 \right)$

Prof. Ovidiu Bădescu

V104
III c)

Fie $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

Calculați $\int_1^e f(x) \ln x \, dx$

E1) $I = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x \, dx =$

$= \underbrace{\int_1^e x \ln x \, dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx}_{I_2}$

E2) $I_1 = \int_1^e x \cdot \ln x \, dx$

$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

$g'(x) = x \Rightarrow g(x) = \int x \, dx = \frac{x^2}{2}$

$\Rightarrow I_1 = (\ln x) \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx$

$= (\ln e) \frac{e^2}{2} - (\ln 1) \frac{1^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{1}{4}(e^2 - 1)$

E3) $I_2 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx, \quad t = \ln x \,|()' \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$

$x = 1 \Rightarrow t = \ln 1 \Rightarrow t = 0; \quad x = e \Rightarrow t = \ln e \Rightarrow t = 1$

$I_2 = \int_0^1 t \, dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \Rightarrow I = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2 - 1) + \frac{1}{2}$

$= \dots$

Prof. Ovidiu Bădescu