EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Probă scrisă la matematică - Proba E c)

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați $\log_2\left(3+\sqrt{5}\right)+\log_2\left(3-\sqrt{5}\right)$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2+2x-5$. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care abscisa vârfului parabolei asociate funcției f este egală cu 2.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{1-x^2}=\frac{1}{27}$.

5p **4.** Calculați $C_6^2-A_4^2$.

5p **5.** În sistemul de coordinate xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(2,-2)$ și $B(6,8)$. Calculați distanța de la punctul O la mijlocul segmentului (AB).

5p **6.** Calculați $\cos 130^\circ+\cos 50^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru $m\in\mathbb{R}$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ m & 0 & 2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x-y-z=-2\\ x+3y-z=-2\\ mx+2z=4\end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei A.

5p **b)** Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care matricea A este inversabilă.

5p **c)** Rezolvați sistemul pentru $m=-1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=2xy-2x-2y+3$.

5p **a)** Demonstrați că $x\circ y=2(x-1)(y-1)+1$, pentru oricare $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii „$\circ$”.

5p **c)** Dați exemplu de două numere $a,b\in\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ pentru care $a\circ b\in\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+3}$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1,2)$.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n\ln x$.

5p **a)** Calculați $\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{f_1(x)}dx$.

5p **b)** Demonstrați că primitivele funcției f_1 sunt convexe pe intervalul $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

5p **c)** Calculați $\int_1^e\frac{f_{2009}(x)}{x^{2010}}dx$.

Calculați $\log_2(3+\sqrt{5}) + \log_2(3-\sqrt{5})$

E1) Folosim $\log_b A + \log_b B = \log_b (A \cdot B)$

E2) $\log_2(3+\sqrt{5}) + \log_2(3-\sqrt{5}) =$

$= \log_2 (3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) =$

$= \log_2 (3^2 - (\sqrt{5})^2) = \log_2 (9-5)$

$= \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \underbrace{\log_2 2}_{1} = 2$

Obs.: S-a mai folosit

$\log_b A^n = n \log_b A$ și că

$\log_b b = 1$

Prof. Ovidiu Băgescu

Fie $f(x) = mx^2 + 2x - 5$. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care vârful parabolei are abscisa egală cu 2

$E_1)$ $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_V = -\frac{b}{2a} \\ y_V = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$

$E_2)$ abscisa este valoarea lui x

$$\Rightarrow x_V = 2 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 2$$

$E_3)$

$$\Rightarrow -\frac{2}{2 \cdot m} = 2 \Rightarrow -2 = 4m \Rightarrow m = -\frac{2}{4}$$

$$\Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Prof. Ovidiu Băoșu

Rezolvați: $3^{1-x^2} = \frac{1}{27}$

E_1) Deoarece $a^{-x} = \frac{1}{a^x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$

E_2) Ecuația: $3^{1-x^2} = 3^{-3}$

$\Rightarrow 1-x^2 = -3 \Rightarrow 4 = x^2 \Rightarrow \boxed{x = \pm 2}$

$S_f: x \in \{-2; 2\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați:

$$C_6^2 - A_4^2$$

E1) Folosim $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ și

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

E2) $C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 4!} = 15$

$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{2!\cdot 3\cdot 4}{2!} = 12$

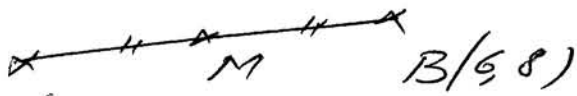
E3) $C_6^2 - A_4 = 15 - 12 = 3$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $A(2,-2)$, $B(6,8)$, calculați distanța de la O la mijlocul lui AB

$\Rightarrow O(0;0)$

$E_1)$ M mijlocul lui AB



$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{2+6}{2} = 4 \\ y_M = \frac{-2+8}{2} = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(4;3)$$

$E_2)$ distanța de la O la M este lungimea lui $OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} =$

$$= \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați

$$\cos 130^\circ + \cos 50^\circ$$

E1) scriem cu unghi în funcție de celălalt

$E_1)\ \cos 130^\circ = \cos(180^\circ - 50^\circ) =$

$= \underbrace{\cos 180^\circ}_{-1} \cos 50^\circ + \underbrace{\sin 180^\circ}_{0} \sin 50^\circ =$

$= -\cos 50^\circ$

$E_3)\ \cos 130^\circ + \cos 50^\circ = -\cos 50^\circ + \cos 50^\circ = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3$

Arătați că $x \circ y = 2(x-1)(y-1)+1$

---

met I:

E_1) Calculăm

$$2(x-1)(y-1)+1 =$$

$$= 2(xy - x - y + 1) + 1 =$$

$$= 2xy - 2x - 2y + 2 + 1 = 2xy - 2x - 2y + 3$$

$$= x \circ y$$

met II: (dacă nu știm rezultatul)

E_1) $x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3 =$

$$= 2x(y-1) - 2(y-1) + 1 =$$

$$= (y-1)(2x-2) + 1 =$$

$$= (2x-2)(y-1) + 1 =$$

$$= 2(x-1)(y-1) + 1$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3$, $x, y \in \mathbb{R}$

Găsiți elementul neutru

E_1) $\exists e \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in \mathbb{R}$ să avem:

$$x \circ e = e \circ x = x$$

E_2) $x \circ e = x \Rightarrow 2xe - 2x - 2e + 3 = x$

$$2e(x-1) = 3x - 3$$

$2e(x-1) = 3(x-1)$ adev. $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 2e = 3 \Rightarrow e = \frac{3}{2} \in \mathbb{R}$

E_3) arăt o comutativă

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ avem: $x \circ y = y \circ x$

$x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3$ } egalitate

$y \circ x = 2yx - 2y - 2x + 3$

E_4) Din $x \circ e = x \to e = \frac{3}{2}$ } $\to e = \frac{3}{2}$ este

Știu o comutativă

el neutru $x \circ e \in \mathbb{R}$

Prof Ovidiu Bădescu

Fie $x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3$, se știe că

$$x \circ y = 2(x-1)(y-1)+1, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Dați exemplu de 2 numere $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care $a \circ b \in \mathbb{Z}$

E_1) Folosim $x \circ y = 2(x-1)(y-1)+1$

E_2) Ar trebui găsite 2 paranteze $(a-1)$ și $(b-1)$ din $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ cu $(a-1)(b-1) \in \mathbb{Z}$

E_3) Fie $\begin{cases} a-1 = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3}+1 = \frac{5}{3} \\ b-1 = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2}+1 = \frac{5}{2} \end{cases}$

E_4) Evident, $a = \frac{5}{3} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $b = \frac{5}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

și $a \circ b = 2\left(\frac{5}{3}-1\right)\left(\frac{5}{2}-1\right)+1$

$$\Rightarrow a \circ b = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} + 1 \Rightarrow a \circ b = 3 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{3} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases}$$ este un exemplu de numere cu această proprietate

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$, calculați $\det A$

E1) $\det A=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ m & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6+m+0+3m-0+2$

$= 4m+8$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$, găsiți $m \in \mathbb{R}$ pentru care A este inversabilă

E_1) A inversabilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

E_2) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ m & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6+m+0+3m-0+2 =$

$= 4m+8$

E_3) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow 4m+8 \neq 0 \Leftrightarrow 4m \neq -8$

$\Leftrightarrow m \neq -\frac{8}{4} \Leftrightarrow m \neq -2$

E_4) A inversabilă $\Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $\begin{cases} x - y - z = -2 \\ x + 3y - z = -2 \\ mx + 2z = 4 \end{cases}$

Rezolvați sistemul pentru $m = -1$

$E_1)\ m = -1 \Rightarrow \begin{cases} x - y - z = -2 \\ x + 3y - z = -2 \\ -x + 2z = 4 \end{cases}$

$E_2)\ \det S = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 - 0 - 3 - 0 + 2 =$

$= 8 - 4 = 4 \neq 0$

$\Rightarrow$ Cramer

$E_3)\ \Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 + 4 + 0 + 12 - 0 - 4 =$

$= 0$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 2 - 4 + 2 + 4 + 4 = 0$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 - 0 - 6 - 0 + 4 =$

$= 8$

$E_4)\ x = \frac{\Delta_x}{\det S} = \frac{0}{4} = 0;\quad y = \frac{\Delta_z}{\det S} = 0;\quad z = \frac{\Delta_z}{\det S} = \frac{8}{4} = 2$

$S_f: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+3}$

Calculați $f'(x)$

E1) Folosim $(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$

E2) $f'(x)=(\sqrt{x^2+3})'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}\cdot(x^2+3)'=$

$=\frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

Prof. Ovidiu Bagescu

Fie $f(x)=\sqrt{x^2+3}$, calculați ecuația tangentei la G_f în $A(1;2)$

E_1) ec. tg în $x=\alpha$ este $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$

E_2) în cazul nostru, $y-f(1)=f'(1)(x-1)$

E_3) $f(x)=\sqrt{x^2+3} \Rightarrow f(1)=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

E_4) Rămâne a calcula $f'(1)$, calculăm întâi

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+3}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}\cdot(x^2+3)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}\cdot 2x$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$E_4)\ f'(1)=\frac{1}{\sqrt{1^2+3}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$$

E_5) înlocuind în $y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$$\Rightarrow y-2=\frac{1}{2}(x-1)\ \Big|\cdot 2$$

$$2y-4=x-1 \Rightarrow \boxed{x-2y+3=0}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+3}$, găsiți ecuația asimptotei oblice spre ∞ pentru G_f

---

E_1) as. oblică are ec $y = mx + n$ unde

E_2) $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{l'H}{=}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3})'}{x'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x\sqrt{x^2+3}} \cdot 2x}{1}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \Rightarrow$ nu se poate folosi l'H

E_3) Căutăm altă metodă,

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x} = 1 \in \mathbb{R}$

$n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+3} - x) \overset{\infty-\infty}{=}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x} \overset{\frac{3}{\infty}}{=} 0 \in \mathbb{R}$

E_4) ec. asimpt oblice: $y = mx + n$

$\Rightarrow y = x$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \ln x$

Calculați $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{f_1(x)} dx$

E1) $I = \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{f_1(x)} dx = \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x \ln x} dx$

$= \int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_e^{e^2} =$

$= \ln|e^2| - \ln|e| =$

$= \ln e^2 - \ln e = 2 \ln e - 1 =$

$= 2 - 1 = 1$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f_n : (0;\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \cdot \ln x$

Arătați că primitivele lui f_1 sunt convexe pe $\left[\frac{1}{e}; \infty\right)$

E_1) Dacă F este o primitivă a lui $f \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F(x) = \int f_1(x)\,dx$ și

$F'(x) = f_1(x)$

E_2) Știm a arăta că F convexă $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F''(x) \geq 0$

E_3) Folosim $F'(x) = f_1(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow F''(x) = f_1'(x)$

$F''(x) = (x \cdot \ln x)' =$

$= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

E_4) $F''(x) = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1$

$\Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$	
F''	∄	$-$	0	$+$
F	∄	∩		∪

E_5) $\Rightarrow F$ convexă

pe $\left[\frac{1}{e}; \infty\right)$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f_n:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n\cdot\ln x$ III 2.c)

Se cere $\int_1^e \frac{f_{2009}(x)}{x^{2010}}\,dx$

E1) $I=\int_1^e \frac{x^{2009}\cdot\ln x}{x^{2010}}\,dx=$

$=\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

E2) $t=\ln x\,|()'\Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$

$x=1\Rightarrow t=\ln 1\Rightarrow t=0$

$x=e\Rightarrow t=\ln e\Rightarrow t=1$

E3) $I=\int_0^1 t\,dt=\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{0}{2}=\frac{1}{2}$

Prof. Ovidiu Badescu