EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010 TOAMNA, 2010

Probă scrisă la matematică - Proba E c)

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $-1 \le \frac{x+1}{3} \le 1$.

5p **2.** Determinați funcția de gradul al doilea al cărei grafic conține punctele $A(0,0), B(2,2), C(-1,2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+3) - \log_2 x = 2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând la întâmplare un element n din mulțimea $\{1,2,3,4\}$ acesta să verifice inegalitatea $2^n \ge n^2$.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,0), B(1,-1), O(0,0)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB = 6$ și $m(\sphericalangle ACB) = 30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei A.

5p **b)** Verificați dacă $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **c)** Rezolvați ecuația $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Fie polinomul $f \in \mathbb{Z}_3[X], f = X^3 + \hat{2}X^2$ și mulțimea $G = \left\{ g = aX^3 + bX^2 + cX + d \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.

5p **a)** Calculați $f(\hat{1})$.

5p **b)** Determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul elementelor mulțimii G.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:[0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{1+x}$.

5p **a)** Demonstrați că $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{x+1}$, oricare ar fi $x \in [0,1]$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $[0,1]$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{2}{e} \le \frac{1}{f(x)} \le 1$, oricare ar fi $x \in [0,1]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+3}, \text{ pentru } x \ge 1 \\ 2x, \text{ pentru } x < 1 \end{cases}$.

5p **a)** Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

5p **c)** Calculați $\int_1^{\sqrt{6}} x \cdot f(x)\,dx$.

Prof. Ovidiu Bădescu

Determinați $x \in \mathbb{Z}$, știind care

$$-1 \leq \frac{x+1}{3} \leq 1$$

$E_1)$ $-1 \leq \frac{x+1}{3} \leq 1 \mid \cdot 3 \Rightarrow -3 \leq x+1 \leq 3 \mid -1$

$\Rightarrow -4 \leq x \leq 2$

$\Rightarrow x \in [-4; 2]$

$E_2)$ Dar, $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in [-4; 2] \cap \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$

Prof. Ovidiu Badescu

Determinați funcția de gradul II al cărei grafic conține punctele $A(0;0)$, $B(2;2)$, $C(-1;2)$

$E_1)$ Fie $f(x)=ax^2+bx+c$

$E_2)$ $A(0;0)\in G_f \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=0$

$\Rightarrow \boxed{c=0}$

$B(2;2)\in G_f \Rightarrow f(2)=2 \Rightarrow a\cdot 2^2+b\cdot 2+c=2$

$\Rightarrow \boxed{4a+2b+c=2}$

$C(-1;2)\in G_f \Rightarrow f(-1)=2 \Rightarrow a\cdot(-1)^2+b(-1)+c=2$

$\Rightarrow \boxed{a-b+c=2}$

$E_3)$ Avem sistemul $\begin{cases} c=0 \\ 4a+2b+c=2 \\ a-b+c=2 \end{cases}$

înlocuind $c=0 \Rightarrow \begin{cases} 4a+2b+0=2 \\ a-b+0=2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 4a+2b=2 \mid :2 \\ a-b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=1 \\ a-b=2 \end{cases}$

„+": $3a=3 \Rightarrow \boxed{a=1}$

înlocuim în $2a+b=1 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow \boxed{f(x)=x^2-x+0}$

Prof. Oprea Badescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\log_2(x+3) - \log_2 x = 2$$

E1) Cond.: $\begin{cases} x+3>0 \Rightarrow x>-3 \Rightarrow x\in(-3;\infty) = I_1 \\ x>0 \Rightarrow x\in(0;\infty) = I_2 \end{cases}$

$I_C = I_1 \cap I_2 = (0;\infty)$

E2) Folosim $\log_b A - \log_b B = \log_b \frac{A}{B}$

$\Rightarrow$ ecuația: $\log_2 \frac{x+3}{x} = 2$

E3) Folosind $\log_b A = N \Leftrightarrow A = b^N$

din $\log_2 \frac{x+3}{x} = 2 \Rightarrow \frac{x+3}{x} = 2^2 \Rightarrow \frac{x+3}{x} = 4$

$\Rightarrow x+3 = 4x \Rightarrow -3x = -3 \Rightarrow x = 1 \in I_C$

$\Rightarrow x = 1$ soluție

Prof. Ovidiu Badescu

Găsiți probabilitatea ca alegând un element n din $\{1; 2; 3; 4\}$, acesta să verifice $2^n \geq n^2$

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. cazuri posibile: toate elementele din mulțime, adică 4

$E_3)$ nr. caz favorabile: elementele din mulțime care verifică $2^n \geq n^2$

$n=1 \Rightarrow 2^1 \geq 1^2 \Leftrightarrow 2 \geq 1$ ok

$n=2 \Rightarrow 2^2 \geq 2^2 \Leftrightarrow 4 \geq 4$ ok

$n=3 \Rightarrow 2^3 \geq 3^2 \Leftrightarrow 8 \geq 9$ fals

$n=4 \Rightarrow 2^4 \geq 4^2 \Leftrightarrow 16 \geq 16$ ok

$\Rightarrow$ 3 favorabile

$E_4)$ $P = \dfrac{3}{4}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(2;0)$, $B(1;-1)$. Determinați coordonatele lui C dacă

$$\vec{OC} = 2\vec{OA} + \vec{OB}$$

$E_1)$ Folosim $\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$

$$\Rightarrow \vec{OC} = (x_C - x_O)\vec{i} + (y_C - y_O)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{OC} = x_C\vec{i} + y_C\vec{j}} \quad (1)$$

$E_2)$ $\vec{OA} = (x_A - x_O)\vec{i} + (y_A - y_O)\vec{j} =$

$$= (2-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} = 2\vec{i} + 0\cdot\vec{j} = 2\vec{i}$$

$$\vec{OB} = (x_B - x_O)\vec{i} + (y_B - y_O)\vec{j} =$$

$$= (1-0)\vec{i} + (-1-0)\vec{j} = \vec{i} - \vec{j}$$

$E_3)$ $2\vec{OA} + \vec{OB} = 2\cdot 2\vec{i} + (\vec{i} - \vec{j}) = 4\vec{i} + \vec{i} - \vec{j} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{2\vec{OA} + \vec{OB} = 5\vec{i} - \vec{j}} \quad /2)$$

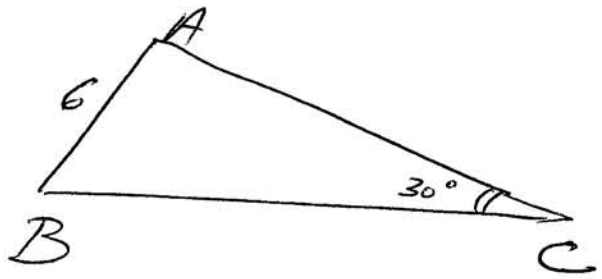
$E_4)$ Din $\vec{OC} = 2\vec{OA} + \vec{OB}$

$$\Rightarrow x_C\vec{i} + y_C\vec{j} = 5\vec{i} - \vec{j}$$

$$\Rightarrow x_C = 5,\ y_C = -1 \Rightarrow \boxed{C(5;-1)}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați raza cercului circumscris ΔABC cu $AB=6$, $m(\hat{ACB})=30^\circ$



E1) Din T sinusurilor

$$\Rightarrow \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = 2R$$

E2) Folosim $\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{6}{\sin 30^\circ} = 2R$

$$\Rightarrow \frac{6}{\frac{1}{2}} = 2R \Rightarrow 6 \cdot \frac{2}{1} = 2R \Rightarrow R = 6$$

Obs.: S-a folosit $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ (din tabel)

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculați $\det A$

$E_1)$ $\det A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0$

$=1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, verificați dacă

$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_1)\ \det A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0=1\neq 0$

$\Rightarrow \exists A^{-1}$

$E_2)\ A^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_3)\ A^*=\begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{13}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* \\ a_{31}^* & a_{32}^* & a_{33}^* \end{pmatrix}$ unde

$a_{11}^*=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$; $a_{12}^*=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0$

Analog $a_{13}^*=0$; $a_{21}^*=0$; $a_{22}^*=1$; $a_{23}^*=0$;

$a_{31}^*=-1$; $a_{32}^*=0$; $a_{33}^*=1$

$\Rightarrow A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_4)\ A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ e adevărată relația din concluzie

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se știe că

$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Rezolvați ecuația

$$A \cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

E_1) Din $A \cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Big| \cdot A^{-1}$

$\Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

E_2) $\Rightarrow X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^3 + \hat{2}X^2$

Calculați $f(\hat{1})$

$E_1)$ $f(\hat{1}) = \hat{1}^3 + \hat{2} \cdot \hat{1}^2$

$E_2)$ $f(\hat{1}) = \hat{1} + \hat{2} \cdot \hat{1} = \hat{1} + \hat{2} = \hat{3} = \hat{0}$

$\Rightarrow f(\hat{1}) = \hat{0}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^3 + \hat{2}X^2$

Determinați rădăcinile lui f

E_1) Vom folosi că dacă $f(\alpha) = \hat{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \alpha$ e rădăcină pentru f

E_2) $x = \hat{0} \Rightarrow f(\hat{0}) = \hat{0}^3 + \hat{2} \cdot \hat{0}^2 = \hat{0} + \hat{2} \cdot \hat{0} = \hat{0}$

$\Rightarrow x = \hat{0}$ e rădăcină

$x = \hat{1} \Rightarrow f(\hat{1}) = \hat{1}^3 + \hat{2} \cdot \hat{1}^2 = \hat{1} + \hat{2} \cdot \hat{1} = \hat{1} + \hat{2} = \hat{0}$

$\Rightarrow x = \hat{1}$ e rădăcină

$x = \hat{2} \Rightarrow f(\hat{2}) = \hat{2}^3 + \hat{2} \cdot \hat{2}^2 = 8^{\hat{}} + \hat{2} \cdot \hat{4} = 8^{\hat{}} + 8^{\hat{}} = 16^{\hat{}} = \hat{1} \neq \hat{0}$

$\Rightarrow x = \hat{2}$ nu e rădăcină

E_3) rădăcinile sunt $\{\hat{0}; \hat{1}\}$

Prof. Ovidiu Băjesu

Fie $G=\{g=ax^3+bx^2+cx+d \mid a,b,c,d\in\mathbb{Z}_3\}$.
Determinați numărul elementelor lui G.

E_1) $g=ax^3+bx^2+cx+d$, $a,b,c,d\in\mathbb{Z}_3$

E_2) Deoarece $\mathbb{Z}_3=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2}\}$ și cum nu se precizează că g are gradul 3 $\Rightarrow$ a poate fi și zero

E_3) a are 3 var
b are 3 var
c are 3 var
d are 3 var
independente

$\Rightarrow 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=81$ polinoame g

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=\frac{e^x}{1+x}$, arătați că

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x}{x+1},\ \forall x\in[0,1]$$

$E_1)$ $f'(x)=\left(\frac{e^x}{1+x}\right)'=\frac{(e^x)'(1+x)-e^x\cdot(1+x)'}{(1+x)^2}$

$=\frac{e^x(1+x)-e^x}{(1+x)^2}=\frac{e^x+e^x\cdot x-e^x}{(1+x)^2}=\frac{x\cdot e^x}{(1+x)^2}$

$E_2)$ $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\frac{xe^x}{(1+x)^2}}{\frac{e^x}{1+x}}=\frac{xe^x}{(1+x)^2}\cdot\frac{1+x}{e^x}=\frac{x}{1+x}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{1+x}$

Arătați că f este crescătoare pe $[0;1]$

$E_1)$ $f'(x)=\left(\frac{e^x}{1+x}\right)'=\frac{(e^x)'(1+x)-e^x(1+x)'}{(1+x)^2}=$

$=\frac{e^x(1+x)-e^x\cdot 1}{(1+x)^2}=\frac{e^x+xe^x-e^x}{(1+x)^2}=\frac{xe^x}{(1+x)^2}$

$E_2)$ $f'(x)=0\Rightarrow xe^x=0\to x=0$ sau $e^x=0$ fals

$E_3)$

x	$[0$		$1]$
f'		0	
f	1		

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}>0\Rightarrow f'(x)>0,\ \forall x\in(0;1)$

$\Rightarrow f_s\nearrow$ pe $[0;1]$

Prof. Viorel Badescu

Fie $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{1+x}$

Arătați că $\frac{2}{e}\le\frac{1}{f(x)}\le 1,\ \forall x\in[0;1]$

E_1) pentru a situa funcția f între 2 numere, facem tabelul de variație al funcției

E_2) $f'(x)=\left(\frac{e^x}{1+x}\right)'=\frac{e^x(1+x)-e^x\cdot 1}{(1+x)^2}=\frac{e^x+xe^x-e^x}{(1+x)^2}$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{xe^x}{(1+x)^2}$

E_3) $f'(x)=0\to xe^x=0\Rightarrow x=0$

x	0		1
f'	0	$+$	$+$
f	1	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}>0\to f'(x)>0,\ \forall x\in[0;1]$

$\Rightarrow f$ ↑ pe $[0;1]$

E_4) $f(0)=\frac{e^0}{1+0}=1;\quad f(1)=\frac{e^1}{1+1}=\frac{e}{2}$

E_5) $\Rightarrow 1\le f(x)\le\frac{e}{2}$ și cum f pozitivă

inversând $\Rightarrow\frac{2}{e}\le\frac{1}{f(x)}\le 1$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+3}, & x\geq 1\\ 2x, & x<1\end{cases}$

Se cere f are primitive pe $\mathbb{R}$

E_1) Arătăm că f continuă pe $\mathbb{R}$

E_2) f continuă pe $(-\infty;1)$ și pe $(1;\infty)$ ca și fct elementară (1)

E_3) studiem dacă f continuă în $x=1$

$l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(2x)=2$

$l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt{x^2+3}=2$

$f(1)=\sqrt{1^2+3}=2$

$\Rightarrow f$ cont în $x=1$ (2)

E_4) Din (1)+(2) $\Rightarrow f$ cont pe $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ are primit pe $\mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+3}, & x\geq 1\\ 2x, & x<1\end{cases}$

Se cere volumul corpului obținut prin rotirea G_g în jurul lui Ox, $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$

$E_1)\ V=\pi\int_a^b g^2(x)\,dx$

$E_2)\ g:[1,2]\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)\Rightarrow g(x)=\sqrt{x^2+3}$

$E_3)\ V=\pi\int_1^2\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2dx=\pi\int_1^2(x^2+3)\,dx$

$=\pi\left(\frac{x^3}{3}\Big|_1^2+3\cdot x\Big|_1^2\right)=$

$=\pi\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}+3(2-1)\right)=$

$=\pi\left(\frac{7}{3}+3\right)=\frac{16\pi}{3}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+3}, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1 \end{cases}$

Se cere $\int_1^{\sqrt{6}} x \cdot f(x)\,dx$

E1) $I = \int_1^{\sqrt{6}} x \cdot \sqrt{x^2+3}\,dx$

E2) $t = x^2+3 \mid ()' \Rightarrow dt = 2x\,dx$

$\Rightarrow x\,dx = \frac{dt}{2}$

schimb capetele: $x = 1 \Rightarrow t = 1^2+3 = 4$

$x = \sqrt{6} \Rightarrow t = (\sqrt{6})^2+3 = 9$

E3) $I = \int_4^9 \sqrt{t} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_4^9 \sqrt{t}\,dt =$

$= \frac{1}{2}\int_4^9 t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_4^9 =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_4^9 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[2]{t^3} \cdot \frac{2}{3}\Big|_4^9 =$

$= \frac{1}{3}\sqrt{t^3}\Big|_4^9 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{9^3} - \sqrt{4^3}\right) =$

$= \frac{1}{3}(27-8) = \frac{1}{3} \cdot 19 = \frac{19}{3}$

Prof. Ovidiu Bădescu