MODEL BAC 2010
SPECIALIZAREA ȘTIINȚE ALE NATURII, TEHNOLOGIC

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p 1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1 = 3$ și $a_3 = 7$. Calculați suma primilor 10 termeni ai progresiei.

5p 2. Determinați numerele reale m pentru care punctul $A(m,-1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x+3) = 2$.

5p 4. Determinați numărul submulțimilor cu 3 elemente ale unei mulțimi care are 5 elemente.

5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(1,2)$ și $C(2,-1)$. Calculați distanța de la punctul C la mijlocul segmentului AB.

5p 6. Triunghiul ABC are $AB = 8$, $AC = 8$ și $m(\sphericalangle BAC) = 30^\circ$. Calculați aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și funcția $f:\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(X) = X^2 - 3X + I_3$, unde $X^2 = X\cdot X$.

5p a) Calculați $\det(I_3 + B)$.

5p b) Demonstrați că $f(A) = I_3 + B$.

5p c) Arătați că $(f(A))^3 = I_3 + 3B + 3B^2$, unde $(f(A))^3 = f(A)\cdot f(A)\cdot f(A)$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x * y = x + y - 3$ și $x \circ y = (x-3)(y-3)+3$,

5p a) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x \circ x = x * x$.

5p b) Determinați numărul întreg a care are proprietatea că $x \circ a = 3$, oricare ar fi numărul întreg x.

5p c) Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} x * (y+1) = 4 \\ (x-y)\circ 1 = 5 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$.

5p a) Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}^*$.

5p b) Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

5p c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$.

5p a) Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției f.

5p b) Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p c) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

V101

a_n progr aritmetică cu $a_1 = 3$ și $a_3 = 7$ /1

Se cere suma primilor 10 termeni

E1) $S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10^{5}}{2} = (a_1 + a_{10}) \cdot 5$

E2) $a_1 = 3$, $a_3 = 7$, folosim

$a_n = a_1 + (n-1) r \Rightarrow a_3 = a_1 + 2r$

$\Rightarrow 7 = 3 + 2r \Rightarrow 2r = 4 \Rightarrow r = 2$

E3) $a_1 = 3$, $r = 2 \Rightarrow a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{10} = 3 + 9 \cdot 2 = 3 + 18 = 21$

E4) $S_{10} = (3 + 21) \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120$

Prof. Ovidiu Badescu

V101
I/2

Se cere $m=?$ dacă $A(m,-1) \in G_f$ unde $f(x)=x^2-3x+1$

$E_1)$ $A(x_A, y_A) \in G_f \Leftrightarrow f(x_A)=y_A$

$E_2)$ În cazul nostru, $A(m,-1) \in G_f$

$\Rightarrow f(m)=-1$ $\Big\}\Rightarrow$

$E_3)$ $f(x)=x^2-3x+1$

$\Rightarrow f(m)=-1$

$\Rightarrow m^2-3m+1=-1 \Rightarrow m^2-3m+2=0$

$\Rightarrow m_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm 1}{2}\begin{matrix}^2\\ _1\end{matrix}$

$\Rightarrow m \in \{1;2\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația

$$\log_5(2x+3)=2$$

E_1) Cond.: $2x+3>0 \Rightarrow 2x>-3 \Rightarrow x>-\frac{3}{2}$

$\Rightarrow x\in\left(-\frac{3}{2},\infty\right)=I_C$

E_2) Folosim $\log_b A=N \Leftrightarrow A=b^N$

E_3) În cazul nostru,

$$\log_5(2x+3)=2 \Leftrightarrow 2x+3=5^2$$

$$\Rightarrow 2x+3=25 \Rightarrow 2x=22 \Rightarrow x=11\in I_C$$

$$S;\ x=11$$

Prof. Ovidiu Bădescu

V10'

Să se găsească numărul submulți- I/4
milor cu 3 elemente ale unei mț cu 5 elemente

---

met I (pt cei deștepți)

E_1) ca teorie, numărul submulțimilor cu
k elemente ale unei mț cu 5 elemente
este C_n^k, ,

E_2) în cazul nostru, $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} =$

$$= \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 1 \cdot 2} = \frac{20}{2} = 10$$

met II (pt ceilalți)

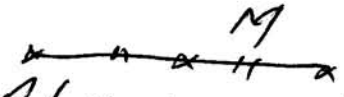
E_1) Fie $M = \{a; b; c; d; e\}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $A(-1;-2)$, $B(1;2)$, $C(2;-1)$. Calculați distanța de la C la mijlocul lui AB

$\times C(2;-1)$

E_1) Fie M mijlocul lui AB



$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{-1+1}{2} = 0 \\ y_M = \frac{-2+2}{2} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow M(0;0)$

E_2) distanța de la C la M este lungimea segmentului CM

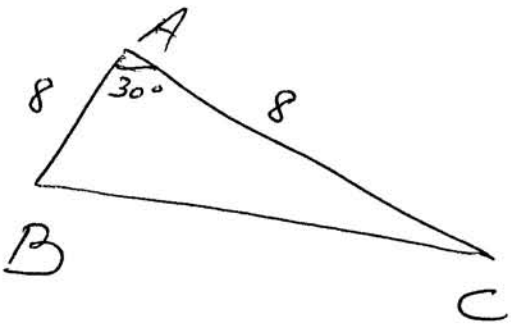
$E_3) CM = \sqrt{(x_M - x_C)^2 + (y_M - y_C)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow CM = \sqrt{(0-2)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

În $\triangle ABC$ avem $AB=8$, $AC=8$ și $m(\hat{BAC})=30^\circ$.

Calculați aria $\triangle ABC$



E1) $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2}$

$$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{8 \cdot 8 \cdot \sin 30^\circ}{2} = \frac{64 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{32}{2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_{\triangle ABC} = 16$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calculați

$\det(I_3+B)$

$E_1)\ I_3+B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_2)\ \det(I_3+B)=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0$

$=1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Arătați că $f(A)=I_3+B$, unde

$$f(x)=x^2-3x+I_3$$

$E_1)\ f(A)=A^2-3A+I_3$

$E_2)\ A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

$E_3)\ f(A)=\begin{pmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_4)\ I_3+B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ egalitate $\Rightarrow f(A)=I_3+B$

Prof. Ovidiu Pascu

Fie $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Se știe că $f(x)=X^2-3X+I_3$ și că

$f(A)=I_3+B$.

Se cere $(f(A))^3=I_3+3B+3B^2$

$E_1)(f(A))^3=(I_3+B)^3$ și deoarece $I_3\cdot B=B\cdot I_3$

putem folosi formula

$E_2)\Rightarrow(f(A))^3=(I_3+B)^3=(I_3)^3+3(I_3)^2B+3I_3B^2+B^3$

$\Rightarrow(f(A))^3=I_3+3B+3B^2+B^3$

$E_3)$ Dar, $B^2=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B^3=B^2\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=O_3$

$E_4)\Rightarrow(f(A))^3=I_3+3B+3B^2$

Prof. Ovidiu Pădesșu

Pe $\mathbb{Z}$ definim: $x * y = x + y - 3$ și

$x \circ y = (x-3)(y-3) + 3$

Rezolvați în $\mathbb{Z}$: $x \circ x = x * x$

$E_1)$ $x \circ x = x * x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-3)(x-3) + 3 = x + x - 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 3x + 9 + 3 = 2x - 3$

$x^2 - 6x + 12 = 2x - 3$

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$E_2)$ $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot 1} = \dfrac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2}$

$= \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \dfrac{8 \pm 2}{2} \begin{cases} \frac{10}{2} = 5 \in \mathbb{Z} \\ \frac{6}{2} = 3 \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$E_3)$ $S_8 : x \in \{3; 5\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Pe $\mathbb{Z}$ definim $x \circ y = (x-3)(y-3)+3$

Determinați numărul întreg a pt care

$x \circ a = 3, \forall x \in \mathbb{Z}$

$E_1)$ $x \circ a = 3 \Rightarrow (x-3)(a-3)+3 = 3$

$\Rightarrow (x-3)(a-3) = 0$

$E_2)$ Cz I: $x-3=0 \Rightarrow x=3$ relație adev. doar pt $x=3$ fals pt că relația este adev. pt $\forall x \in \mathbb{Z}$

Cz II: $a-3=0 \Rightarrow a=3 \Rightarrow$ relația este adev pt $\forall x \in \mathbb{Z}$

$S_f: a=3$

Prof Ovidiu Bădescu

Pe $\mathbb{Z}$ avem: $x * y = x + y - 3$ și

$x \circ y = (x-3)(y-3) + 3$

Rezolvați $\begin{cases} x * (y+1) = 4 \\ (x-y) \circ 1 = 5 \end{cases}$ cu $x, y \in \mathbb{Z}$

$E_1)$ $\begin{cases} x + (y+1) - 3 = 4 \\ (x-y-3)(1-3) + 3 = 5 \end{cases}$

$E_2)$ $\begin{cases} x + y = 6 \\ (x-y-3)(-2) = 2 \quad | :(-2) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ x-y-3=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ x-y=2 \end{cases}$

„+"

$E_3)$ adun $\Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{2} = 4 \in \mathbb{Z}$

înlocuiesc în $x + y = 6 \Rightarrow 4 + y = 6 \Rightarrow y = 2 \in \mathbb{Z}$

$E_4)$ $S_8 : \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$

Calculați $f'(x)$

E1) $f'(x) = \left(x^3 + \frac{3}{x}\right)' = 3x^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' =$

$= 3x^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$

Calculați: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

E1) Vom folosi: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

$\Rightarrow$ în cazul nostru, $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$

E2) $f'(x) = \left(x^3 + \frac{3}{x}\right)' = 3x^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$

E3) $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - \frac{3}{1^2} = 3 - 3 = 0$

E4) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$

Determinați intervalele de monotonie pentru f

$E_1)$ $f'(x)=\left(x^3+\frac{3}{x}\right)'=3x^2+3\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=3x^2+3\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$\Rightarrow f'(x)=3x^2-\frac{3}{x^2}=\frac{3x^4-3}{x^2}$

$E_2)$ $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^4-3=0 \Rightarrow 3x^4=3 \Rightarrow x^4=1$

$\Rightarrow x=\pm 1$

$E_3)$

x		-1		0		1	
f'	$+++$	0	$---$	$\nexists$	$---$	0	$+++$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$f'(-2)=\frac{3\cdot(-2)^4-3}{(-2)^2}=\frac{3\cdot 16-3}{4}>0 \Rightarrow f'(x)>0$ pe $(-\infty;-1)$

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^4-3}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\frac{3}{16}-3}{\frac{1}{16}}<0 \Rightarrow f'(x)<0$ pe $(-1;0)$

Analog, $f'\left(\frac{1}{2}\right)<0$ și $f'(2)>0 \Rightarrow$ monotonia

$\Rightarrow f_{\searrow}$ pe $(-\infty;-1]\cup[-1;\infty)$

$f_{\searrow}$ pe $[-1;0)\cup(0;1]$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{2-x^2}$

Calculați volumul corpului generat de f

E_1) Folosim formula:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

E_2) $V=\pi\int_0^1\left(x\sqrt{2-x^2}\right)^2dx=$

$$=\pi\int_0^1 x^2(2-x^2)\,dx=$$

$$=\pi\int_0^1\left(2x^2-x^4\right)dx$$

E_3) $V=\pi\left(2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1-\frac{x^5}{5}\Big|_0^1\right)=$

$$=\pi\left[\frac{2}{3}\left(1^3-0^3\right)-\frac{1}{5}\left(1^5-0^5\right)\right]=$$

$$=\pi\left(\frac{5/2}{3}-\frac{3/1}{5}\right)=\frac{7\pi}{15}$$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{2-x^2}$

Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$

$E_1)$ $I=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}\,dx$

$E_2)$ $t=2-x^2\ |\ (\,)' \Rightarrow dt=-2x\,dx$

$\Rightarrow x\,dx=-\frac{dt}{2}$

sch. capetele: $x=0\Rightarrow t=2-0^2\Rightarrow t=2$

$x=1\Rightarrow t=2-1^2\Rightarrow t=1$

$E_3)$ $I=\int_2^1 \sqrt{t}\left(\frac{-dt}{2}\right)=-\frac{1}{2}\int_2^1 \sqrt{t}\,dt$

$=\frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\int_1^2 t^{\frac{1}{2}}dt=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_1^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^2$

$=\frac{1}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{2}{3}\left(\sqrt{2^3}-1\right)=\frac{2}{3}\sqrt{8}$

Prof. Ovidiu Badescu

V/101
III 2a

Fie $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{2-x^2}$

Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$

E1) $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{l'H}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x f(t)dt\right)'}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x}$

E2) $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{2-x^2}}{2x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Obs.: s-au folosit:

$\int_a^a f(t)dt=0$ și

$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$

Prof. Ovidiu Bădescu