EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010

Proba E c) VARA REZERVA, 2010

Probă scrisă la MATEMATICĂ **Varianta 10**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $i\sqrt{2}-1$ este soluție a ecuației $z^2+2z+3=0$.

5p **2.** Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+a$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x^2-a$. Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care $(f\circ g)(x)>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-2x+1}=x+1$.

5p **4.** Determinați numărul elementelor mulțimii $A=\left\{1,3^3,3^6,3^9,...,3^{2010}\right\}$.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(3,5)$, $B(-2,5)$ și $C(6,-3)$. Scrieți ecuația medianei corespunzătoare laturii $[BC]$, în triunghiul ABC.

5p **6.** Calculați $\sin\frac{\pi}{12}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie sistemul $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+2ay+z=-1 \\ 2ax+y+(a+1)z=0 \end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$ și a este parametru real.

5p **a)** Rezolvați sistemul pentru $a=0$.

5p **b)** Verificați dacă pentru $a=-1$ sistemul este compatibil.

5p **c)** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

2. Fie $m,n\in\mathbb{R}$ și polinomul $f=X^3-3X^2+mX-n$ care are rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Determinați valorile reale m și n pentru care $x_1=2+i$.

5p **b)** Determinați valorile reale m și n pentru care restul împărțirii polinomului f la polinomul $(X-1)^2$ este egal cu 0.

5p **c)** Arătați că, dacă toate rădăcinile polinomului f sunt reale și $m>0$, $n>0$, atunci x_1,x_2,x_3 sunt strict pozitive.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

5p **a)** Arătați că dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică pentru graficul funcției f spre $+\infty$.

5p **b)** Studiați derivabilitatea funcției f în punctul $x=-2$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\cos x}{2-\cos^2 x}$.

5p **a)** Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Calculați $\int_0^{2\pi} x\cdot f(x)dx$.

Prof. Ovidiu Bădescu

Arătați că $i\sqrt{2}-1$ este soluție pentru

$$z^2+2z+3=0$$

$E_1)$ $\alpha = i\sqrt{2}-1$ este soluție a unei ecuații $\Leftrightarrow$ α verifică ecuația

$E_2)$ În cazul nostru, înlocuind $\Rightarrow$

$$(i\sqrt{2}-1)^2+2(i\sqrt{2}-1)+3=0 \Leftrightarrow$$

$$(i\sqrt{2})^2-2i\sqrt{2}+1+2i\sqrt{2}-2+3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2i^2+2=0 \Leftrightarrow -2+2=0 \text{ adev.}$$

$\Rightarrow \alpha = i\sqrt{2}-1$ este soluție pentru

$$z^2+2z+3=0$$

Prof. Ovidiu Băescu

V 104
I 2

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$ si

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-a$.

Gasiti $a\in\mathbb{R}$ a.i. care $(f\circ g)(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$E_1)$ $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+a)=$

$=2(x^2-a)+a=2x^2-2a+a=2x^2-a$

$E_2)$ $(f\circ g)(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$2x^2-a>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Cond.: $\begin{cases}2>0 \text{ ader}\\ \Delta<0\Rightarrow 0-4\cdot 2\cdot(-a)<0\end{cases}$

$8a<0\Rightarrow a<0\Rightarrow a\in(-\infty;0)$

Obs.: 1-a folosit: $ax^2+bx+c>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Cond.: $\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$

Prof. Ovidiu Badescu

Rezolvați: $\sqrt{x^2-2x+1} = x+1$

E_1) Cond.: $\begin{cases} x^2-2x+1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 \geq 0 \text{ adev. } \forall x \in \mathbb{R} = I_1 \\ x \geq -1 \Rightarrow x \in [-1, \infty) = I_2 \end{cases}$

$I_C = I_1 \cap I_2 = [-1, \infty)$

E_2) $\sqrt{x^2-2x+1} = x+1 \mid (\,)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1 = (x+1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1 = x^2+2x+1$

$\Leftrightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \in I_C$

$\Rightarrow x = 0$ soluție

Prof. Ovidiu Badescu

Determinați numărul elementelor mulțimii

$$A=\{1; 3^3; 3^6; 3^9; \dots; 3^{2010}\}$$

E1) Mulțimea poate fi scrisă

$$A=\{3^0; 3^3; 3^6; 3^9; \dots; 3^{2010}\}$$

⇒ ne interesează câte elemente are

$$B=\{0; 3; 6; 9; \dots; 2010\}$$

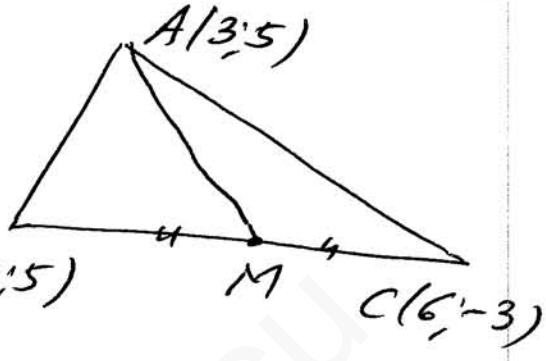
E2) Observăm că elementele lui B sunt în progresie aritmetică cu $a_1=0$, $a_n=2010$ și $r=3$ ⇒ $a_n=a_1+(n-1)\cdot 3$ adică

$$2010=0+(n-1)\cdot 3 \Rightarrow 2010=3n-3$$

$$\Rightarrow 2013=3n \mid :3 \Rightarrow n=\frac{2013}{3}=671$$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $A(3;5)$, $B(-2;5)$, $C(6;-3)$. Scrieți ecuația medianei corespunzătoare lui BC



E_1) Fie M mijlocul lui $BC \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2 \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{5+(-3)}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow M(2;1)$

E_2) Știm $A(3;5)$, știm $M(2;1)$

$$\Rightarrow AM: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_M & y_M & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 5x + 2y + 3 - 10 - x - 3y = 0$$

$$\Rightarrow 4x - y - 7 = 0$$

Prof. Ovidiu Badescu

Calculați $\sin \frac{\pi}{12}$

$E_1)$ $\sin \frac{\pi}{12} = \sin \frac{180^\circ}{12} = \sin 15^\circ$

$E_2)$ $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+2ay+z=-1 \\ 2ax+y+(a+1)z=0 \end{cases}$

Rezolvați sistemul pentru $a=0$

E1) $a=0 \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 & (1) \\ x+z=-1 & (2) \\ y+z=0 & (3) \end{cases}$

E2) Se rezolvă metoda de rezolvare, folosim substituția.

Din $x+y=1 \Rightarrow x=1-y$ și înlocuim în (2) și (3)

$\Rightarrow \begin{cases} 1-y+z=-1 \\ y+z=0 \end{cases}$

„+": $1+2z=-1 \Rightarrow 2z=-2 \Rightarrow \boxed{z=-1}$

Folosim $y+z=0 \Rightarrow y-1=0 \Rightarrow \boxed{y=1}$

Dar, $x=1-y \Rightarrow x=1-1 \Rightarrow \boxed{x=0}$

E3) $(x,y,z) \in \{(0;1;-1)\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+2ay+z=-1 \\ 2ax+y+(a+1)z=0 \end{cases}$

Verificați dacă pentru $a=-1$ sistemul este compatibil

$E_1)\ a=-1 \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ x-2y+z=-1 \\ -2x+y=0 \end{cases}$

$E_2)\ \det S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-2-1+4-1-0 = 0 \Rightarrow$ nu se poate aplica Cramer

$E_3)\ \operatorname{rang} A = ?,\ |1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 1$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2-1 = -3 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \det A = 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$

$E_4)\ \Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+2+1-4+1-0 = 0-0=0$

Deoarece $\nexists \det \Delta_c \Rightarrow$ sist compatibil

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+2ay+z=-1 \\ 2ax+y+(a+1)z=0 \end{cases}$

Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică

E_1) S are sol unică $\Leftrightarrow \det S \neq 0$

E_2) $\det S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2a & 1 \\ 2a & 1 & a+1 \end{vmatrix} =$

$= 2a(a+1)+2a+a-4a^3-1-(a+1) =$

$= 2a^2+2a+2a+a-4a^3-1-a-1 =$

$= -4a^3+2a^2+4a-2 = -2(2a^3-a^2-2a+1)$

E_3) $\det S \neq 0 \Leftrightarrow 2a^3-a^2-2a+1 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a(a^2-1)-(a^2-1) \neq 0 \Leftrightarrow (a^2-1)(2a-1) \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \\ \text{și} \\ 2a-1 \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \end{cases}$

$\Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1; \frac{1}{2}\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $m, n \in \mathbb{R}$ și $f = X^3 - 3X^2 + mX - n$ cu
rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$
Găsiți $m, n \in \mathbb{R}$ știind că $x_1 = 2+i$

E_1) $x_1 = 2+i$ rădăcină $\Leftrightarrow f(x_1) = 0$

E_2) $f(x_1) = 0 \Leftrightarrow (2+i)^3 - 3(2+i)^2 + m(2+i) - n = 0$

$\Rightarrow 2^3 + 3 \cdot 2^2 i + 3 \cdot 2 i^2 + i^3 - 3(4 + 4i + i^2) + 2m + mi - n = 0$

$\Rightarrow 8 + 12i - 6 - i - 12 - 12i + 3 + 2m + mi - n = 0$

$\Rightarrow (8 - 6 - 12 + 3 + 2m - n) + (-i + mi) = 0$

$\Rightarrow (-7 + 2m - n) + (m-1)i = 0$

E_3) Dar, $m, n \in \mathbb{R} \Rightarrow -7 + 2m - n \in \mathbb{R}$, $m - 1 \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -7 + 2m - n = 0 \\ m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -7 + 2 - n = 0 \\ \Rightarrow n = -5 \end{matrix}$$

Așadar, $m = 1$, $n = -5$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f = X^3 - 3X^2 + mX - n$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$

Determinați m și n pentru care restul lui f : $(x-1)^2$ este egal cu 0

---

met I : restul lui $f : (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow f \vdots (x-1)^2$

E1) $f \vdots g \Leftrightarrow$ toate rădăcinile lui g sunt rădăcini și ale lui f

rădăcinile lui $g = (x-1)^2$ sunt $x = 1$ dar e rădăcină multiplă deoarece $g'(x) = 2(x-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow g'(1) = 0$ și $g(1) = 0$

$\Rightarrow$ ar trebui că $x = 1$ să fie rădăcină dublă pentru f

E2) $\begin{cases} f(1) = 0 \Rightarrow 1 - 3 + m - n = 0 \quad (1) \\ f'(1) = 0 \Rightarrow \text{calc. } f'(x) = 3x^2 - 6x + m \end{cases}$

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 - 6 + m = 0 \Rightarrow \boxed{m = 3}$

înlocuim în $(1) \Rightarrow -2 + 3 - n = 0 \Rightarrow \boxed{n = 1}$

met II :

E1) $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$

$X^3 - 3X^2 + mX - n \;\big|\; X^2 - 2X + 1$

$-X^3 + 2X^2 - X \qquad\qquad X - 1$

$\backslash\; -X^2 + (m-1)X - n$

$X^2 - 2X + 1$

$\backslash\; (m-1-2)X - n + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-3)X - n + 1 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} m - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 3} \\ -n + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{n = 1} \end{cases}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f = X^3 - 3X^2 + mX - n$, știm că toate rad lui f sunt reale și $m > 0$, $n > 0$.
Arătați că x_1, x_2, x_3 strict pozitive

E_1) Reducem absurd

Caz I: dacă vreuna din rădăcini este 0

$\Rightarrow x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0 \xrightarrow{\text{VIETE}} x_1 x_2 x_3 = -\frac{-n}{1} = n$

$\Rightarrow n = 0$ fals pt că în ip $n > 0$

Caz II: dacă o rad < 0, celelalte > 0

fie $x_1 < 0$, $x_2, x_3 > 0$

$\Rightarrow S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 3$

$S_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = m$

$S_3 = x_1 x_2 x_3 = n \Rightarrow n < 0$ fals cu ip

Caz III: dacă 2 rad < 0, o rad > 0

$\Rightarrow x_1 x_2 x_3 > 0$ (COMPLICAT!)

Prof. Ovidiu Bădescu

T 109

III 9a)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$

Arătați că dreapta $y=x$ este as. oblică spre ∞

E_1) <u>as. orizontală spre ∞:</u>

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3-3x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\sqrt[3]{1-\underbrace{\left(\frac{3}{x^2}\right)}_{\to 0}+\underbrace{\left(\frac{2}{x^3}\right)}_{\to 0}} = \infty \notin \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \nexists$ as. orizontale

E_2) <u>as. oblice spre ∞:</u>

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3-3x+2}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}}{x} = 1 \in \mathbb{R} \left(\begin{array}{c}\text{nu merge cu}\\ \text{l'Hopital}\end{array}\right)$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(f(x)-mx\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3-3x+2}-x\right) =$$

$$\overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x+2-x^3}{\sqrt[3]{(x^3-3x+2)^2}+\sqrt[3]{x^3-3x+2}\cdot x + x^2}$$

$$\overset{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(-3+\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}\right)}{x^2\left[\sqrt[3]{\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}+1\right]}$$

$$\overset{\frac{-3}{\infty}}{=} 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow y = mx+n \Rightarrow y=x \text{ as. oblică}$$

Prof. Oniuri Ridesu

T104
III 16)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$, studiați derivabilitatea lui f în $x=-2$

E1) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-3x+2}-0}{x+2}$

E2) $\ell\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to-2}\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x+2}{(x+2)^3}}$

E3) $\ell_1=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3-3x+2}{(x+2)^3}\overset{\frac{0}{0}\ \text{l'H}}{=\!=}\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2-3}{3(x+2)^2\cdot 1}$

$\overset{\frac{9}{0_+}}{=\!=}\infty\notin\mathbb{R}$

E4) $f'(-2)=\sqrt[3]{\infty}=\infty\notin\mathbb{R}\Rightarrow f$ nu e deriv. în $x=-2$ dar are derivată

Prof. Ovidiu Badescu

T 104
III 1 c)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$

Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln f(x)}{\ln x}$

E1) $l=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\sqrt[3]{x^3-3x+2}}{\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{l'H}{=}}$

E2) $l=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-3x+2}}\cdot\left(\sqrt[3]{x^3-3x+2}\right)'}{\frac{1}{x}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3-3x+2}}\cdot\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x^3-3x+2)^2}}\cdot(x^3-3x+2)'=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}}\cdot\dfrac{3x^2-3}{3x^2\sqrt[3]{\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)^2}}$

($\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}\to 1$)

$=\lim\limits_{x\to\infty}1\cdot\dfrac{3x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{3x^2\cdot\sqrt[3]{\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)^2}}=1$

Prof. Ovidiu Bădescu

T104
III 2a)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\cos x}{2-\cos^2 x}$

Calculați $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$

$E_1)$ $I=\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\cos x}{2-\cos^2 x}\,dx$

$E_2)$ Dacă ar fi să folosim metoda schimbării de variabilă, ar trebui să notăm o expresie cu t astfel încât derivata ei să apară tot în integrală și, dacă am nota $t=\cos x|()'\Rightarrow dt=-\sin x\,dx$, nu e OK

$E_3)$ Din $\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow \cos^2 x=1-\sin^2 x$

$E_4)$ $I=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\cos x}{2-(1-\sin^2 x)}\,dx=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

$E_5)$ notăm $t=\sin x|()'\Rightarrow dt=\cos x\,dx$

$x=0\Rightarrow t=\sin 0\Rightarrow t=0$

$x=\pi/2\Rightarrow t=\sin\pi/2\Rightarrow t=1$

$E_6)$ $I=\int_0^1\dfrac{dt}{1+t^2}=\dfrac{1}{1}\operatorname{arctg}\dfrac{t}{1}\Big|_0^1=$

$=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\dfrac{\pi}{4}-0=\dfrac{\pi}{4}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\cos x}{2-\cos^2 x}$

Arăt. că o primitivă a lui f este $\uparrow$ pe $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

E_1) Fie F o primitivă a lui $f \Rightarrow \begin{cases} F'(x)=f(x) \\ F \text{ derivabilă} \end{cases}$

E_2) $F'(x)=\dfrac{\cos x}{2-\cos^2 x}$

$x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos x \geq 0$

$2-\cos^2 x > 0$ și că $\cos x \in [-1;1]$

$\Rightarrow \dfrac{\cos x}{2-\cos^2 x} \geq 0 \Rightarrow F'(x)\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F\nearrow$ (1)

E_3) Deoarece $F'(x)=0$ doar în $x=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow F'(x)\geq 0$ și $F'(x)=0$ în. finit de ori

$\Rightarrow F_s\nearrow$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x) = \frac{\cos x}{2-\cos^2 x}$

Calculați $\int_0^{2\pi} x f(x)\,dx$

E1) $I = \int_0^{2\pi} x \cdot \frac{\cos x}{2-\cos^2 x}\,dx$ $\left|\begin{array}{l} t = 2\pi + 0 - x \\ dt = -dx \end{array}\right.$

$x = 0 \Rightarrow t = 2\pi - 0 = 2\pi$

$x = 2\pi \Rightarrow t = 2\pi - 2\pi = 0$

$= \int_{2\pi}^{0} (2\pi - t) \cdot \frac{\cos(2\pi - t)}{2-\cos^2(2\pi - t)}(-dt)$

$E_2) I = \int_0^{2\pi} (2\pi - t) \cdot \frac{\cos(-t)}{2-\cos^2(-t)}\,dt \overset{\text{cos par}}{=}$

$= \int_0^{2\pi} (2\pi - t) \cdot \frac{\cos t}{2-\cos^2 t}\,dt$

$E_3) \int_0^{2\pi} x \cdot \frac{\cos x}{2-\cos^2 x}\,dx = \int_0^{2\pi} (2\pi - x)\frac{\cos x}{2-\cos^2 x}\,dx$

$\int_0^{2\pi} x \cdot \frac{\cos x}{2-\cos^2 x}\,dx = \int_0^{2\pi} 2\pi \cdot \frac{\cos x}{2-\cos^2 x}\,dx - \int_0^{2\pi} x \cdot \frac{\cos x}{2-\cos^2 x}\,dx$

$2I = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{2-(1-\sin^2 x)}\,dx, \quad t = \sin x$