EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010

Proba E c) VARA, 2010

Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați $\left((1-i)(i-1)\right)^4$.

5p **2.** Arătați că funcția $f:(-3,3)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{3-x}{3+x}$ este impară.

5p **3.** Determinați soluțiile întregi ale inecuației $x^2+2x-8<0$.

5p **4.** Câte elemente din mulțimea $A=\{1,2,3,...,100\}$ sunt divizibile cu 4 sau cu 5?

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $M(1,-2)$, $N(-3,-1)$ și $P(-1,2)$. Determinați coordonatele punctului Q astfel încât $MNPQ$ să fie paralelogram.

5p **6.** Triunghiul ABC are $AB=6$, $AC=3$ și $BC=5$. Calculați lungimea înălțimii $[AD]$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie sistemul $\begin{cases} x-2y-8z=-65 \\ 3x+y-3z=22 \\ x+y+z=28 \end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$ și matricea asociată sistemului $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că rangul matricei A este egal cu 2.

5p **b)** Rezolvați sistemul în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați numărul soluțiilor sistemului din mulțimea $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

2. Fie mulțimea de matrice $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbb{Z}_5\right\}$.

5p **a)** Determinați numărul elementelor mulțimii A.

5p **b)** Arătați că există o matrice nenulă $M\in A$ astfel încât $\begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix}\cdot M=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea A ecuația $X^2=I_2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}$.

5p **a)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **b)** Studiați monotonia funcției f.

5p **c)** Determinați punctele de inflexiune ale funcției f.

2. Fie șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{2x-1}{x}dx$.

5p **a)** Arătați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

5p **b)** Arătați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} n(2-I_n)$.

Calculați: $((1-i)(i-1))^4$

$E_1)$ $N = ((1-i)(i-1))^4 = (i-1-i^2+i)^4 =$

$= (i-1+1+i)^4 = (2i)^4 = 2^4 \cdot i^4$

$E_2/$ Dar, $i^4 = 1 \Rightarrow N = 2^4 = 16$

Prof. Ovidiu Bădescu

Arătați că $f:(-3,3)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{3-x}{3+x}$ este impară

E1) f impară $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} D_f \text{ mț simetrică} \\ f(-x)=-f(x) \end{cases}$

E2) $D_f=(-3,3)$ mț simetrică (3)

E3) $f(-x)=\ln\frac{3+x}{3-x}=\ln(3+x)-\ln(3-x)$ (1)

$-f(x)=-(\ln(3-x)-\ln(3+x))=$

$=-\ln(3-x)+\ln(3+x)=\ln(3+x)-\ln(3-x)$ (2)

E4) Din (1)+(2) $\Rightarrow f(-x)=-f(x)$ (4)

E5) Din (3)+(4) $\Rightarrow f$ impară

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți soluțiile întregi ale: $x^2+2x-8<0$ 19 I 3

E1) $x^2+2x-8<0$, ec. atașată:

$$x^2+2x-8=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot(-8)}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}$$

$$=\frac{-2\pm6}{2}\begin{cases}\frac{4}{2}=2\\ \frac{-8}{2}=-4\end{cases}$$

E2)

x		-4		2	
x^2+2x-8	$++$	0	$---$	0	$++$

$$x^2+2x-8<0 \Leftrightarrow x\in(-4;2)\Rightarrow$$

Dar, $x\in\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow x\in(-4;2)\cap\mathbb{Z}=\{-3;-2;-1;0;1\}$$

Prof. Ovidiu Pădescu

Câte elemente din $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ sunt divizibile cu 4 sau cu 5?

$E_1)$ $M_4 = \{4, 8, 12, \ldots, 100\} \Rightarrow$ m. elemente progr aritm cu $a_1 = 4$; $a_n = 100$ și $r = 4$

$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 100 = 4 + (n-1)\cdot 4$

$100 = 4 + 4n - 4 \Rightarrow 4n = 100 \Rightarrow n = 25$

$E_2)$ $M_5 = \{5, 10, \ldots, 100\}$, analog

$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 100 = 5 + (n-1)\cdot 5$

$\Rightarrow 100 = 5 + 5n - 5 \Rightarrow 5n = 100 \Rightarrow n = 20$

$E_3)$ Dar, multiplii comuni apar și la M_4 și la M_5 (de exemplu 20), acestea sunt 5

$\Rightarrow$ m. de elemente cerut este:

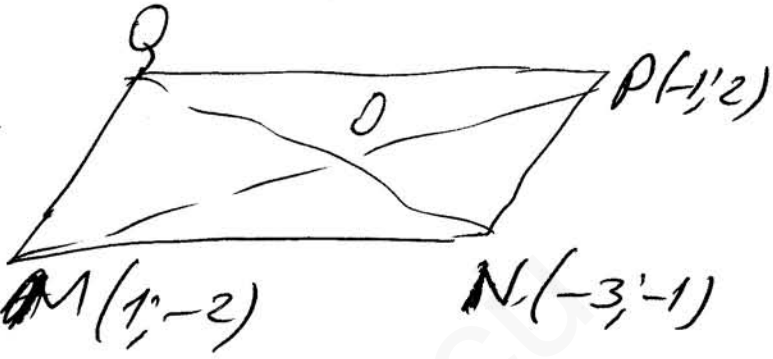
$m.(M_4) + m.(M_5) - m.(M_{20}) =$

$= 25 + 20 - 5 = 40$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $M(1;-2)$, $N(-3;-1)$, $P(-1;2)$.
Găsiți coord lui Q pt care MNPQ paralelogram

E_1) MNPQ paralelogram $\Leftrightarrow$ diag se înjumătățesc.



E_2) Fie O mijl MP

$\Rightarrow x_O = \frac{x_M + x_P}{2} \Rightarrow x_O = \frac{1-1}{2} = 0$ $\Rightarrow O(0;0)$

$y_O = \frac{y_M + y_P}{2} \Rightarrow y_O = \frac{-2+2}{2} = 0$

E_3) O mijl NQ

$\Rightarrow x_O = \frac{x_N + x_Q}{2} \Rightarrow 0 = \frac{-3+x_Q}{2} \Rightarrow x_Q = 0+3$

$x_Q = 3$

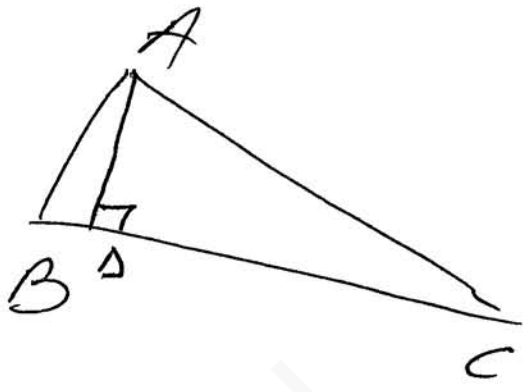
$y_O = \frac{y_N + y_Q}{2} \Rightarrow 0 = \frac{-1+y_Q}{2} \Rightarrow y_Q = 0+1 = 1$

$\Rightarrow Q(3;1)$

Prof. Ovidiu Radescu

În $\triangle ABC$, $AB=6$, $AC=3$ și $BC=5$. V9/I/6

Calculați lungimea înălțimii AD



E1) $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

E2) $p = \frac{6+3+5}{2} = \frac{14}{2} = 7$

E3) $\mathcal{A} = \sqrt{7(7-6)(7-3)(7-5)} = \sqrt{7 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2} =$

$= 2\sqrt{14}$ (1)

E4) $\mathcal{A} = \frac{AD \cdot BC}{2} = \frac{AD \cdot 5}{2}$ (2)

E5) Egalând (1)+(2)

$\Rightarrow 2\sqrt{14} = \frac{AD \cdot 5}{2} \Rightarrow 4\sqrt{14} = 5AD$

$\Rightarrow AD = \frac{4\sqrt{14}}{5}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, arătați că

rang $A=2$

$E_1)$ $\det A=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}= 1+6-24+8+3+6$

$= 24-24=0$

$\Rightarrow$ rang $A<3$

$E_2)$ $|1|=1\neq 0 \Rightarrow$ rang $A\geq 1 \Rightarrow$ bordăm

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}= 1+6=7\neq 0 \Rightarrow$ rang $A\geq 2 \Rightarrow$ bordăm

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\det A=0$ și este singurul determinant

posibil de ordin 3 $\Rightarrow$ rang $A=2$

Prof. Ovidiu Băgescu

Fie $\begin{cases} x-2y-8z=-65 \\ 3x+y-3z=22 \\ x+y+z=28 \end{cases}$

Rezolv. sistemul în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$E_1)\ \det S = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+6-24+8+3+6 = 0 \Rightarrow$ nu se poate aplica Cramer

$E_2)$ rang $A = ?$

$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A \geq 1$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1+6 = 7 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A \geq 2$ $\Big\} \Rightarrow \text{rang } A = 2$

Dacă bordez $\Rightarrow \det A = 0$

$E_3)\ \Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0,\ \Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -65 \\ 3 & 1 & 22 \\ 1 & 1 & 28 \end{vmatrix} = \dots = 0$

$\Rightarrow$ sist compatibil $\Rightarrow$ sist principal

$\begin{cases} x-2y = -65+8\alpha \\ 3x+y = 22+3\alpha \end{cases} \Big| \cdot 2,\ z=\alpha$

$E_4)\ \begin{pmatrix} 7y \\ 7x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 217-21\alpha \\ -21+14\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow x = 2\alpha - 3$

$E_5)\ \begin{matrix} x-2y=-65+8\alpha \\ 3x+y=22+3\alpha \end{matrix} \Big| \cdot(-3)$

$7y = 217-21\alpha \Rightarrow y = -3\alpha+31$

$z=\alpha$

$S = \{(2\alpha-3,\ -3\alpha+31,\ \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

Fie sistemul $\begin{cases} x-2y-8z=-65 \\ 3x+y-3z=22 \\ x+y+z=28 \end{cases}$

Dacă sist are soluția $x=2\alpha-3$, $y=-3\alpha+31$, $z=\alpha$, determinați numărul soluțiilor din $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

E1) $x,y,z\in\mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 0 \Rightarrow 2\alpha-3\geq 0 \\ y\geq 0 \Rightarrow -3\alpha+31\geq 0 \\ z\geq 0 \Rightarrow \alpha\geq 0 \end{cases}$

E2) $\begin{cases} 2\alpha\geq 3 \Rightarrow \alpha\geq \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha\in\left[\frac{3}{2},\infty\right)=I_1 \\ -3\alpha\geq -31 \mid :(-3) \Rightarrow \alpha\leq \frac{31}{3} \Rightarrow \alpha\in\left(-\infty,\frac{31}{3}\right]=I_2 \\ \alpha\geq 0 \Rightarrow \alpha\in[0,\infty)=I_3 \end{cases}$

E4) $\alpha\in I_1\cap I_2\cap I_3=\left[\frac{3}{2},\frac{31}{3}\right]$ (1)

E5) Dar, $x,y,z\in\mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha-3\in\mathbb{N} \\ -3\alpha+31\in\mathbb{N} \\ \alpha\in\mathbb{N} \end{cases}$

Din $\alpha\in\mathbb{N} \overset{(1)}{\Rightarrow} \alpha\in\{2,3,\dots,10\}$

A 4 valoare a lui $\alpha\in\{2,3,\dots,10\}$ e evident că $-3\alpha+31$ ar trebui $\in\mathbb{N}$, $2\alpha-3\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow$ 9 soluții

Fie $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{Z}_5\right\}$

Determinați numărul elementelor lui A

$E_1)$ $\mathbb{Z}_5=\{\hat{0};\hat{1};\hat{2};\hat{3};\hat{4}\} \Rightarrow \mathbb{Z}_5$ are 5 elemente

$E_2)$ a are 5 variante
b are 5 variante
independ

---

total $\Rightarrow 5\cdot 5=25$ matrici

$E_3) \Rightarrow$ 25 elemente

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{Z}_5\right\}$. Arătați că există o matrice nenulă $M \in A$ astfel încât

$$\begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$$

E_1) Fie $M=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \hat{3}a-b & \hat{3}b+a \\ -a-\hat{3}b & -b+\hat{3}a \end{pmatrix}$$

E_2) Dar, $\begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{3}a-b=\hat{0} \Rightarrow \hat{3}a=b \ (1) \\ \hat{3}b+a=\hat{0} \Rightarrow a=-\hat{3}b \xrightarrow{\mathbb{Z}_5} \\ -a-\hat{3}b=\hat{0} \qquad\qquad a=\hat{2}b \ (2) \\ -b+\hat{3}a=\hat{0} \end{cases}$$

E_3) înlocuind $a=\hat{2}b$ în $\hat{3}a=b \Rightarrow \hat{3}\cdot\hat{2}b=b \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{6}b=b \xrightarrow{\mathbb{Z}_5} b=b$ adev., deci b poate fi oarecare din $\mathbb{Z}_5$. Se cere M nenulă, fie $b=\hat{1}$ și din $\hat{3}a=b \Rightarrow 3a=\hat{1}$, din tabelă

	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$

$\Rightarrow a=\hat{2}$

verificăm și $a=\hat{2}b$, adevărat $a=\hat{2}, b=\hat{1}$

$\Rightarrow$ un exemplu de matrice este $M=\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{Z}_5\right\}$

Rezolv în A ecuația $X^2 = I_2$

$E_1)\ X \in A \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

$E_2)\ X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-b^2 & \hat{2}ab \\ -\hat{2}ab & -b^2+a^2 \end{pmatrix}$

$E_3)\ X^2 = I_2 \Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2=\hat{1} \\ \hat{2}ab=\hat{0} \end{cases}$

$E_4)$ Caz I: $a=\hat{0} \Rightarrow \begin{cases} -b^2=\hat{1} \\ \hat{0}=\hat{0} \end{cases}$

$b=\hat{0} \Rightarrow -b^2=\hat{0}\neq\hat{1}$ fals

$b=\hat{1} \Rightarrow -b^2=-\hat{1}=\hat{4}\neq\hat{1}$ fals

$b=\hat{2} \Rightarrow -b^2=-\hat{4}=\hat{1}$ adev.

$b=\hat{3} \Rightarrow -b^2=-\hat{9}=\hat{1}$ adev.

$b=\hat{4} \Rightarrow -b^2=-\hat{16}=\hat{4}\neq\hat{1}$ fals

$\Rightarrow a=\hat{0},\ b\in\{\hat{2},\hat{3}\} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ -\hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{3} \\ -\hat{3} & \hat{0} \end{pmatrix}$

$E_5)$ Caz II: $a=\hat{1} \Rightarrow \begin{cases} \hat{1}-b^2=\hat{1} \\ \hat{2}b=\hat{0} \Rightarrow b=\hat{0} \end{cases} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$

$E_6)$ Caz III: $a=\hat{2} \Rightarrow \begin{cases} \hat{4}-b^2=\hat{1} \Rightarrow b^2=\hat{3} \\ \hat{4}b=\hat{0} \Rightarrow b=\hat{0} \end{cases}$ fals

$E_7)$ Contrar: $a=\hat{3} \Rightarrow$ fals

Caz IV: $a=\hat{4} \Rightarrow \begin{matrix} 1-b^2=\hat{1} \\ b=\hat{0} \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{4} \end{pmatrix}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f: \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}$

Determinați ecuația asimptotei spre ∞ la G_f

E_1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1} =$

$\underline{\underline{\operatorname{arctg} t}}\ \frac{\pi}{4} \in \mathbb{R} \Rightarrow y = \frac{\pi}{4}$ as. orizontală spre ∞

E_2) Deoarece G_f are as. oriz spre $\infty \Rightarrow G_f$ nu are as. oblică spre ∞

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}$.

Studiați monotonia funcției f

$E_1)$ $f'(x)=\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right)'=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)'=$

$=\frac{1}{1+\frac{x^2}{x^2+2x+1}}\cdot\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}=$

$=\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+1+x^2}\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2}{2x^2+2x+1}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}$

$=\frac{1}{2x^2+2x+1}$

$E_2)$ $f'(x)=0\Rightarrow\frac{1}{2x^2+2x+1}=0\Rightarrow 1=0$ fals

Dt a găsi semnul lui $f'(x)$, facem tabel de semne, $2x^2+2x+1=0$, $x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2\cdot 2}$ dar

$\Delta<0\Rightarrow x_{1,2}\in\mathbb{R}$

$E_3)$

x						
1	+	+	+	+	+	+
$2x^2+2x+1$	+	+	+	+	+	+
$\frac{1}{2x^2+2x+1}$	+	+	+	+	+	+

$\Rightarrow f'(x)>0,\ \forall x\in D_f\Rightarrow$

$\Rightarrow f\nearrow,\ \forall x\in D_f$

Prof. Ovidiu Bădescu

$f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1}$ 19/R1 9c)

Găsiți pct de inflexiune al lui f

E1) $f'(x) = \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)' =$

$= \frac{1}{1+\frac{x^2}{x^2+2x+1}} \cdot \frac{1\cdot(x+1) - x\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1}{2x^2+2x+1} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$

E2) $f'(x) = \frac{1}{2x^2+2x+1}$

E3) $f''(x) = \left(\frac{1}{2x^2+2x+1}\right)' = \frac{0\cdot(2x^2+2x+1) - 1\cdot(4x+2)}{(2x^2+2x+1)^2} =$

$= -\frac{4x+2}{(2x^2+2x+1)^2}$

E4) $f''(x) = 0 \Rightarrow 4x+2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

E5)

x		$-\frac{1}{2}$	
f''	$+ + + + +$	0	$- - - - -$
f	$\cup$	$-\frac{\pi}{4}$	$\cap$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ pct de inflexiune

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \operatorname{arctg} \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \operatorname{arctg} \frac{-1}{1} = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $I_n = \int_n^{n+1} \frac{2x-1}{x}\,dx$

Arătați că I_n ↗

E1) $I_n = \int_n^{n+1} \frac{2x-1}{x}\,dx = \int_n^{n+1} \left(\frac{2x}{x} - \frac{1}{x}\right)dx =$

$= \int_n^{n+1} 2\,dx - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$

E2) $I_n = 2x\Big|_n^{n+1} - \ln|x|\Big|_n^{n+1} =$

$= 2(n+1-n) - \left(\ln(n+1) - \ln n\right)$

E3) $I_n = 2 - \ln\frac{n+1}{n}$

E4) $I_{n+1} - I_n = \left(2 - \ln\frac{n+2}{n+1}\right) - \left(2 - \ln\frac{n+1}{n}\right)$

$= -\ln\frac{n+2}{n+1} + \ln\frac{n+1}{n} = \ln\frac{n+1}{n} - \ln\frac{n+2}{n+1} =$

$= \ln\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}} = \ln\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n+2}\right) = \ln\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}$

E5) Dar, $\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1 \Rightarrow \ln\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > \ln 1 = 0$

$\Rightarrow I_n$ ↗

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $I_n = \int_n^{n+1} \frac{2x-1}{x}\,dx$, se știe că

I_n s ↗, se știe că $I_n = 2 - \ln\frac{n+1}{n}$

Se cere I_n mărginit, $n \geq 1$

E1) Din I_n s ↗ $\Rightarrow I_n \geq I_1 \Rightarrow I_n$ mărg inferior (1)

E2) Rămâne să găsim cealaltă margine,

fie $f(x) = 2 - \ln\frac{x+1}{x}$, $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$

E3) $f'(x) = 0 - \frac{1}{\frac{x+1}{x}} \cdot \left(\frac{x+1}{x}\right)' =$

$$= -\frac{x}{x+1} \cdot \frac{1\cdot x - (x+1)\cdot 1}{x^2} = -\frac{-1}{x(x+1)}$$

$f'(x) = \frac{1}{x(x+1)} > 0,\ \forall x > 0 \Rightarrow f$ s ↗

E4)

x	0		∞
f'	//	$+$ $+$ $+$ $+$	
f	//	↗	2

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(2 - \ln\frac{x+1}{x}\right) \overset{2-0}{=\!=} 2$

f s ↗ $\Rightarrow f(x) < 2 \Rightarrow I_n < 2 \Rightarrow I_n$ mărg sup (2)

+ ⇒ Din (1)+(2) $\Rightarrow I_n$ mărginit

Prof. Ovidiu Bădescu

III 2c)

$$I_n = \int_n^{n+1} \frac{2x-1}{x}\,dx$$

Calculați $\lim_n n(2-I_n)$

E1) $I_n = \int_n^{n+1} \frac{2x-1}{x}\,dx = \int_n^{n+1} \left(2-\frac{1}{x}\right)dx =$

$= 2x\Big|_n^{n+1} - \ln|x|\Big|_n^{n+1} =$

$= 2(n+1-n) - (\ln|n+1| - \ln|n|)$

$= 2 - \ln\frac{n+1}{n}$

E2) $l = \lim_n n\left(2-\left(2-\ln\frac{n+1}{n}\right)\right) =$

$= \lim_n n\left(\ln\frac{n+1}{n}\right) \overset{\infty\cdot 0}{=\!=}$

$= \lim_n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \ln\left(\lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)$

E3) $l_1 = \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

E4) $l = \ln e = 1$

Prof. Ovidiu Bădescu