EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010

Proba E c) TOAMNA, 2010

Probă scrisă la MATEMATICĂ **Varianta 6**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Care dintre numerele $2\sqrt[3]{6}$ și $3\sqrt[3]{3}$ este mai mare?

5p **2.** Determinați mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$.

5p **3.** Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația $x^2-x+m^2=0$ are două soluții reale egale.

5p **4.** Determinați numărul termenilor raționali din dezvoltarea $\left(1+\sqrt[4]{2}\right)^{41}$.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(-2,3)$, $C(1,-3)$ și $D(4,a)$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât dreptele AB și CD să fie paralele.

5p **6.** Fie mulțimea $A=\left\{0;\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2};\pi;\frac{3\pi}{2}\right\}$. Care este probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea A, acesta să fie soluție a ecuației $\sin^3 x+\cos^3 x=1$?

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\a&0&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, notăm $B_n=A^n+A^{n+1}+A^{n+2}$.

5p **a)** Arătați că $A^{2010}=a^{670}\cdot I_3$.

5p **b)** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(B_1)=0$.

5p **c)** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care toate matricele B_n, $n\in\mathbb{N}^*$ sunt inversabile.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea $x*y=2xy-3x-3y+m$, $m\in\mathbb{R}$. Fie mulțimea $M=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

5p **a)** Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*y\in M$, pentru orice $x,y\in M$.

5p **b)** Pentru $m=6$ arătați că $(M,*)$ este grup.

5p **c)** Pentru $m=6$, demonstrați că funcția $f:M\to\mathbb{R}^*$, $f(x)=2x-3$ este un izomorfism între grupurile $(M,*)$ și $(\mathbb{R}^*,\cdot)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}$.

5p **a)** Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției f spre $+\infty$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{-\sqrt[3]{2n+1}}\right)^{\sqrt[3]{2n}}$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1\frac{x^n dx}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Calculați $I_1+I_2+I_3$.

5p **b)** Arătați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Prof. Viorel Bădescu

MI/2010

V6/ I/1

Care din numerele: $2\sqrt[3]{6}$ și $3\sqrt[3]{3}$ este mai mare?

$E_1)$ $a = 2\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 6} = \sqrt[3]{8 \cdot 6} = \sqrt[3]{48}$

$b = 3\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{27 \cdot 3} = \sqrt[3]{81}$

$E_2)$ Deoarece $48 < 81 \Rightarrow \sqrt[3]{48} < \sqrt[3]{81} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sqrt[3]{6} < 3\sqrt[3]{3} \Rightarrow$ cel mai mare este $3\sqrt[3]{3}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1 2010

Găsiți mulțimea valorilor lui $f(x)=|x|$ I/2

E1) $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0 \\ x, & x>0 \end{cases}$

E2) $f_1:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=-x \Rightarrow f_1'(x)=-1<0$

$\Rightarrow f_1 \searrow$

$f_2:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_2(x)=x \Rightarrow f_2'(x)=1>0$

$\Rightarrow f_2 \nearrow$

E3)

	$-\infty$		0		∞
f'		$-$ $-$ $-$	$-(0)$	$+$ $+$ $+$	
f	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}|x|=\infty$

$f(0)=|0|=0$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}|x|=\infty$

E4) $\operatorname{Im} f=[0,\infty)\cup[0,\infty)=[0,\infty)$

<u>metoda II</u>: obs. că $|x|\ge 0 \Rightarrow \operatorname{Im} f=[0,\infty)$

Prof. Ovidiu Bădescu

M 7/2010

Determinați $m \in \mathbb{R}$ pt care ecuația $x^2 - x + m^2 = 0$ are 2 soluții reale egale

I 3

E_1) o ec. de gr II are 2 sol. reale egale

$\Leftrightarrow \Delta = 0$

E_2) $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m^2 = 1 - 4m^2$

E_3) $\Delta = 0 \Rightarrow 1 - 4m^2 = 0 \Rightarrow -4m^2 = -1 \Rightarrow m^2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow m = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow m \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

Prof. Ovidiu Băcescu

Fie $(1+\sqrt[4]{2})^{41}$, găsiți n. term. raționali

E1) $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k \Rightarrow$

$T_{k+1} = C_{41}^k 1^{41-k} \cdot (\sqrt[4]{2})^k =$

$= C_{41}^k 2^{\frac{k}{4}}$

E2) $T_{k+1} \in \mathbb{Q} \rightarrow \frac{k}{4} \in \mathbb{Z}$ $\Big\} \Rightarrow$

Dar, $k \in \{0; 1; \dots; 41\}$

$\Rightarrow k \in \{0; 4; \dots; 40\}$

E3) obs. că poz. avem,

$a_1 = 0;\ a_n = 40,\ r = 4$

$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1) r$

$40 = 0 + (n-1) \cdot 4$

$40 = 4n - 4 \rightarrow 4n = 44 \rightarrow n = 11$

11 term. raționali

Prof. Ovidiu Bădescu

MT1/2010

Fie $A(2;1)$, $B(-2;3)$, $C(1;-3)$, $\Delta(4;a)$ V 15

Gasiti $a=?$ a.i. care $AB \parallel C\Delta$

E1) $AB \parallel C\Delta \Leftrightarrow m_{AB} = m_{C\Delta}$

E2) $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{-2-2} = \frac{2}{-4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$$m_{C\Delta} = \frac{y_\Delta - y_C}{x_\Delta - x_C} = \frac{a+3}{4-1} = \frac{a+3}{3}$$

E3) $m_{AB} = m_{C\Delta} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{a+3}{3} \quad / \cdot 3$

$\Rightarrow -3 = 2(a+3) \Rightarrow 2a = -9 \Rightarrow a = -\frac{9}{2}$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2010

Fie $A=\left\{0;\ \frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2}\right\}$, găsiți V6/I6
probabilitatea ca alegând un element din A, acesta să fie soluție pt: $\sin^3 x+\cos^3 x=1$

$E_1)\ P=\dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. caz posibile: 5

$E_3)$ nr. caz favorabile:

$x=0\Rightarrow \sin^3 0+\cos^3 0=1\Leftrightarrow 0+1=1$ adev. $\Rightarrow x=0$ sol.

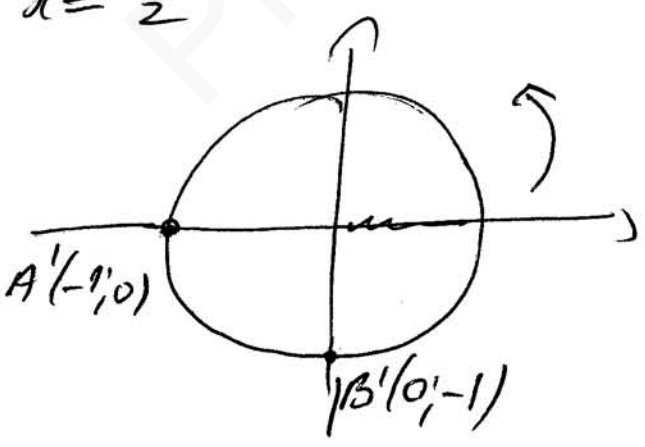
$x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow \sin^3\frac{\pi}{6}+\cos^3\frac{\pi}{6}=1\Leftrightarrow \frac{1}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}=1$ fals $\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}$ nu e sol.

$x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \sin^3\frac{\pi}{2}+\cos^3\frac{\pi}{2}=1\Leftrightarrow 1+0=1$ adev. $\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$ sol.

$x=\pi\Rightarrow \sin^3\pi+\cos^3\pi=1\Leftrightarrow 0+(-1)=1$ fals $\Rightarrow x=\pi$ nu e sol.

$x=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow \sin^3\frac{3\pi}{2}+\cos^3\frac{3\pi}{2}=1\Leftrightarrow (-1)+0=1$ fals $\Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}$ nu e sol

favorabile $x\in\left\{0;\frac{\pi}{2}\right\}$



$E_4)\ P=\dfrac{2}{5}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1 2010
V6/II 1a)

Fie $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Arătați că $A^{2010} = a^{670} \cdot I_3$

E1) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$

E2) $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a \cdot I_3$

E3) Nu a calcula A^{2010}, folosesc: $2010 : 3 = 670$ rest 0

$\Rightarrow 2010 = 3 \cdot 670$

E4) $A^{2010} = A^{3 \cdot 670} = (A^3)^{670} = (aI_3)^{670} =$

$= a^{670} \cdot I_3^{670} = a^{670} \cdot I_3$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2020

Fie $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, găsiți $a \in \mathbb{R}$ V6/II 1b)

pentru care $\det B_1 = 0$ unde $B_n = A^n + A^{n+1} + A^{n+2}$

E1) $B_1 = A + A^2 + A^3$

E2) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

E3) $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a & a & a \end{pmatrix}$

E4) $\det B_1 = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a & a & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^3 + a^2 + a - a^2 - a^2 = 0$

$\Rightarrow a^3 - 2a^2 + a = 0$

$a(a^2 - 2a + 1) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{sau} \\ a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1 \end{cases}$

Prof. Ovidiu Bagdasar

Știm $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și că $A^3 = aI_3$

Dacă $B_n = A^n + A^{n+1} + A^{n+2}$, determinați

$a \in \mathbb{R}$ a.î. care B_n inversabile

$E_1)$ $B_n = A^n(I_3 + A + A^2)$

$E_2)$ $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$

$E_3)$ $I_3 + A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$

$E_4)$ B_n inversabilă $\Leftrightarrow \det B_n \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \det\left(A^n(I_3 + A + A^2)\right) \neq 0 \Leftrightarrow \det A^n \cdot \det(I_3 + A + A^2) \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $\det A^n \neq 0 \Leftrightarrow (\det A)^n \neq 0 \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$

și

$\det(I_3 + A + A^2) \neq 0 \Leftrightarrow 1 + a + a^2 - a - a - a \neq 0$

$\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \neq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 1$

$E_5)$ B_n inversabilă $\Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

Prof. Ovidiu Găgescu

Fie $x*y = 2xy - 3x - 3y + m$,
$M = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$. Determinați $m \in \mathbb{R}$
astfel încât $x*y \in M$, $\forall x, y \in M$

E_1) $\forall x, y \neq \frac{3}{2} \Rightarrow x*y \neq \frac{3}{2}$

E_2) (R.A.) Pp. $x*y = \frac{3}{2}$ și ar trebui
ca $x = \frac{3}{2}$ sau $y = \frac{3}{2}$

E_3) $x*y = \frac{3}{2} \Rightarrow 2xy - 3x - 3y + m = \frac{3}{2} \mid \cdot 2$

$4xy - 6x - 6y + 2m - 3 = 0$

$\underbrace{2x(2y-3)} - 3(2y-3) - 9 + 2m - 3 = 0$

$(2y-3)(2x-3) + 2m - 12 = 0$

E_4) Am obținut $x = \frac{3}{2}$ sau $y = \frac{3}{2}$
Trebuie ca $2m - 12 = 0 \Rightarrow m = 6$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2016

Pe $\mathbb{R}$ definim $x*y = 2xy - 3x - 3y + m$, $m \in \mathbb{R}$ și fie $M = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$. Pentru $m=6$, arătați că $(M, *)$ grup

---

E_1) $m=6 \Rightarrow x*y = 2xy - 3x - 3y + 6$

E_2) $*$ lege internă pe M: $\forall x, y \neq \frac{3}{2} \overset{(?)}{\Rightarrow} x*y \neq \frac{3}{2}$

(R.A.) Fie $x*y = \frac{3}{2} \Rightarrow 2xy - 3x - 3y + 6 = \frac{3}{2} \mid \cdot 2$

$\Leftrightarrow 4xy - 6x - 6y + 12 = 3 \Leftrightarrow 4xy - 6x - 6y + 9 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x(2y-3) - 3(2y-3) = 0 \Leftrightarrow (2y-3)(2x-3) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 2y-3=0 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \text{ fals} \\ \text{sau} \\ 2x-3=0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ fals} \end{cases} \Rightarrow \forall x, y \neq \frac{3}{2}$ avem $x*y \neq \frac{3}{2}$

E_3) $*$ comutativă (deși nu se cere, o folosim la el. neutru și la simetrizabile)

$\forall x, y \in M \Rightarrow x*y = y*x$, adev.

E_4) $*$ asociativă: $\forall x, y, z \in M \Rightarrow x*(y*z) = (x*y)*z$

$M_1 = x*(y*z) = x*(2yz - 3y - 3z + 6) =$

$= 2x(2yz - 3y - 3z + 6) - 3x - 3(2yz - 3y - 3z + 6) + 6 =$

$= 4xyz - 6xy - 6xz + 12x - 3x - 6yz + 9y + 9z - 18 + 6 =$

$= 4xyz - 6xy - 6xz - 6yz + 9x + 9y + 9z - 12$

Analog se calc. M_2 și iese aceeași expresie

E_5) $*$ are el neutru: $\exists e \in M$ a.î. $\forall x \in M \Rightarrow x*e = e*x = x$

Din $x*e = x \Rightarrow 2xe - 3x - 3e + 6 = x \Rightarrow e(2x-3) = 4x - 6$

Deoarece $x \neq \frac{3}{2} \Rightarrow e = \frac{2(2x-3)}{2x-3} = 2 \in M$. Din $*$ comut $\Rightarrow x*e = e*x$

$\Rightarrow e = 2$ el neutru

E_6) $*$ are toate el simetr: $\forall x \in M \; \exists x' \in M$ cu $x*x' = x'*x = e$

$x*x' = e \Rightarrow 2xx' - 3x - 3x' + 6 = 2 \Rightarrow x'(2x-3) = 3x - 4$, $x \neq \frac{3}{2}$

$\Rightarrow x' = \frac{3x-4}{2x-3}$. Dacă $\frac{3x-4}{2x-3} = \frac{3}{2} \Rightarrow 6x - 8 = 6x - 9$ fals $\Rightarrow x' \in M$

$*$ comut $\Rightarrow x'$ el neut

Fie $x*y=2xy-3x-3y+6$, $M=\mathbb{R}\setminus\{\frac{3}{2}\}$, arătați că $f:M\to\mathbb{R}^*$, $f(x)=2x-3$ este izomorfism între $(M,*)$ și $(\mathbb{R}^*_+,\cdot)$

E1) ar trebui arătat că: $\begin{cases} f(x*y)=f(x)\cdot f(y) \\ f \text{ bijectivă} \end{cases}$

E2) $f(x*y)=f(2xy-3x-3y+6)=2(2xy-3x-3y+6)-3=$

$=4xy-6x-6y+9$ (1)

$f(x)f(y)=(2x-3)(2y-3)=4xy-6x-6y+9$ (2)

Din (1)+(2) $\Rightarrow$ f morfism (5)

E3) f bijectivă: $f'(x)=2>0\Rightarrow f\nearrow\Rightarrow f$ injectivă (3)

Dacă $\operatorname{Im}f=\mathrm{Cd}f\Rightarrow f$ surjectivă (?)

$f:(-\infty;\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2};\infty)\to(-\infty;0)\cup(0;\infty)$

$f(x)=2x-3\Rightarrow f'(x)=2>0\Rightarrow f\nearrow$

x	$-\infty$					$\frac{3}{2}$					∞
f'	+	+	+	+	+	|	−	−	−	−	−
f	$-\infty$	↗	↗	↗	↗	0 | 0	↗	↗	↗	↗	∞

$\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-3)=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3}{2}\\ x<\frac{3}{2}}}(2x-3)=0$,

$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3}{2}\\ x>\frac{3}{2}}}(2x-3)=0$; $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$

$\Rightarrow \mathrm{Cd}f=(-\infty;0)\cup(0;\infty)=\operatorname{Im}f\Rightarrow f$ surj (4)

Din (3)+(4) $\Rightarrow$ f bijectivă $\overset{(5)}{\Rightarrow}$ f izomorfism

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}$

Scrieți ec. tangentei la G_f în $x=0$ (M1 2018 var 1 a)

E1) ec. tang în $x=\alpha$: $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$

E2) ec. tg în $x=0 \Rightarrow y-f(0)=f'(0)(x-0)$

E3) $f(0)=\sqrt[3]{-1}-\sqrt[3]{1}=-1-1=-2$

E4) Nu a calcula $f'(0)$, calculăm $f'(x)=\dots$, apoi înlocuim x cu 0

E5) folosim $\left(\sqrt[3]{u}\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\cdot u'=\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$

E6) $f'(x)=\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)'=$

$$=\frac{(2x-1)'}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}-\frac{(2x+1)'}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}=$$

$$=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}-\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$$

E7) $f'(0)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0$

$\Rightarrow$ e tg.: $y-(-2)=0(x-0)\Rightarrow$

$y=-2$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}$

Găsiți ec. asimptotei la Gf spre ∞

E_1) <u>as. orizontală</u>:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right) \overset{\infty-\infty}{=\!=}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1-2x-1}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}} \overset{\frac{-2}{\infty}}{=\!=} 0$$

$\Rightarrow y=0$ as. oriz. spre ∞

E_2) Gf are as. oriz spre $\infty \Rightarrow$ Gf nu are asimpt. oblică spre ∞

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}$ III 1c)

Sa se calc. $\lim_n \left(\frac{f(1)+f(2)+\dots+f(n)}{-\sqrt[3]{2n+1}}\right)^{\sqrt[3]{2n}}$

E1) $f(1)=\sqrt[3]{+1}-\sqrt[3]{3}$

$f(2)=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}$

$\dots\quad\dots\quad\dots$

$f(n)=\sqrt[3]{2n-1}-\sqrt[3]{2n+1}$

E3) $S=1-\sqrt[3]{2n+1}$

E4) $l=\lim_n \left(\frac{1-\sqrt[3]{2n+1}}{-\sqrt[3]{2n+1}}\right)^{\sqrt[3]{2n}}=$

$=\lim_n \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}+1\right)^{\sqrt[3]{2n}}$ $\quad 1^{\infty}$

$=\lim_n \left[\left(1+\frac{-1}{\sqrt[3]{2n+1}}\right)^{\frac{\sqrt[3]{2n+1}}{-1}}\right]^{\frac{-1}{\sqrt[3]{2n+1}}\cdot\sqrt[3]{2n}}=$

$=e^{\lim_n -\sqrt[3]{\frac{2n}{2n+1}}}=e^{-\sqrt[3]{\frac{2}{2}}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{x^2+x+1}$

Calculați $I_1+I_2+I_3$

E1) $I_1+I_2+I_3 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+x+1}dx + \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+x+1}dx + \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+x+1}dx =$

$$= \int_0^1 \frac{x+x^2+x^3}{x^2+x+1}dx = \int_0^1 \frac{x(1+x+x^2)}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{x^2+x+1}$

Arătați că I_n ↘

E1) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+x+1} dx - \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+x+1} dx$

$= \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{x^2+x+1} - \frac{x^n}{x^2+x+1} \right) dx =$

$= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x^2+x+1} dx$

E2) $x \in [0,1] \Rightarrow \begin{cases} x^n \geq 0 \\ x-1 \leq 0 \\ x^2+x+1 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{x^n(x-1)}{x^2+x+1} \leq 0 \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x^2+x+1} dx \leq 0$

$\Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$

$\Rightarrow I_n$ ↘

Prof. Ovidiu Bădescu

VI 111 2c)

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{x^2+x+1}$

Calculați $\lim_n I_n$

E1) Atunci când x are limita unei integrale, încadrăm interiorul între 2 Sd, integrăm și folosim criteriul cleștelui

E2) $0 \le \frac{x^n}{x^2+x+1} \le x^n, \forall x \in [0;1]$

E3) $0 \le \frac{x^n}{x^2+x+1} \le x^n \Big| \int_0^1 -- dx \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \le I_n \le \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} - 0$

E4) $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$

$\searrow 0 \qquad \swarrow 0$

$\Rightarrow \lim_n I_n = 0$

Prof. Ovidiu Badescu