Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

MODEL

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p 1. Determinați partea reală a numărului complex $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$.

5p 2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Calculați $(f\circ f)(512)$.

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\cos 2x+\sin x=0$.

5p 4. Se consideră mulțimea $M=\{0,1,2,3,4,5\}$. Determinați numărul tripletelor (a,b,c) cu proprietatea că $a,b,c\in M$ și $a<b<c$.

5p 5. Calculați distanța dintre dreptele paralele de ecuații $x+2y=6$ și $2x+4y=11$.

5p 6. Paralelogramul $ABCD$ are $AB=1$, $BC=2$ și $m(\sphericalangle BAD)=60^\circ$. Calculați produsul scalar $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru $a,b,c\in\mathbb{R}^*$, se consideră sistemul $\begin{cases} ax+by+cz=b \\ cx+ay+bz=a \\ bx+cy+az=c \end{cases}$, $x,y,z\in\mathbb{R}$.

5p a) Arătați că determinantul sistemului este $\Delta=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

5p b) Rezolvați sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

5p c) Știind că $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$, arătați că sistemul are o infinitate de soluții (x,y,z), astfel încât $x^2+y^2=z-1$.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix}\middle|\ a,b,c\in\mathbb{Z}_4\right\}$.

5p a) Determinați numărul elementelor mulțimii G.

5p b) Dați un exemplu de matrice $A\in G$ cu proprietatea că $\det A\neq\hat{0}$ și $\det A^2=\hat{0}$.

5p c) Determinați numărul soluțiilor ecuației $X^2=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X\in G$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}$.

5p a) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p b) Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p c) Demonstrați că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty,-1)$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=|\sin nx|$ și numerele $I_n=\int_\pi^{2\pi}\frac{f_n(x)}{x}dx$.

5p a) Calculați $\int_0^\pi f_2(x)dx$.

5p b) Arătați că $I_n\le\ln 2$.

5p c) Arătați că $I_n\ge\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$.

Prof. Ovidiu Gaosu

M1/2010
MODEL I/1

Se cere partea reala $(\sqrt{3}+i)^6$

E1) $N=\left[(\sqrt{3}+i)^2\right]^3=\left[(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}i+i^2\right]^3=$

$=(3+2\sqrt{3}i-1)^3=(2+2\sqrt{3}i)^3$

E2) Folosim $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

E3) $N=2^3+3\cdot 2^2(2\sqrt{3}i)+3\cdot 2(2\sqrt{3}i)^2+(2\sqrt{3}i)^3$

$N=8+24\sqrt{3}i+6\cdot 12i^2+8\cdot 3\sqrt{3}i^3$

E4) $N=8+24\sqrt{3}i-72-24\sqrt{3}i$

$N=-64 \Rightarrow \operatorname{Re} N=-64$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/201
MODEL I/2

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Calculați $(f\circ f)(512)$

$E_1)\ (f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}}=$

$=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt[9]{x}}}=1\cdot\sqrt[9]{x}=\sqrt[9]{x}$

$E_2)\ (f\circ f)(512)=\sqrt[9]{512}$

512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$\Rightarrow 512=2^9$

$E_3)\ (f\circ f)(512)=\sqrt[9]{2^9}=2^{\frac{9}{9}}=2$

---

mod II: $f(f(512))=f(f(2^9))=f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2^9}}\right)=f\left(\frac{1}{2^3}\right)=$

$=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2^3}}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2010
MODEL I/3

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\cos 2x + \sin x = 0$$

E1) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

E2) ec.: $1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0 \mid \cdot(-1)$

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

E3) not $\sin x = t \Rightarrow 2t^2 - t - 1 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \begin{cases} 1 \\ -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

E4) Cazul I: $t = 1 \Rightarrow \sin x = 1$. Deoarece $1 \in [-1, 1]$

$$\Rightarrow x \in \{\arcsin 1 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin 1 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$x \in \{\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Rightarrow x \in \{\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = S_I$$

E5) Cazul II: $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$. Deoarece $-\frac{1}{2} \in [-1, 1]$

$$\Rightarrow x \in \{\arcsin(-\tfrac{1}{2}) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin(-\tfrac{1}{2}) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$x \in \{-\arcsin\tfrac{1}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi + \arcsin\tfrac{1}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$x \in \{-\tfrac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\tfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = S_{II}$$

E6) $S_f = S_I \cup S_{II} = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup$

$$\cup \{-\tfrac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\tfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $M=\{0;1;2;3;4;5\}$, găsiți numărul tripletelor (a,b,c) cu proprietatea că $a,b,c\in M$ și $a<b<c$ | M1/2010 MODEL 1/4

E_1) numărăm

E_2) $a=0 \Rightarrow b=1 \Rightarrow c$ are 4 variante
$b=2 \Rightarrow c$ are 3 variante
$b=3 \Rightarrow c$ are 2 variante
$b=4 \Rightarrow c$ are 1 variantă
$\Rightarrow$ pentru $a=0$ sunt $4+3+2+1=$ 10 numere

E_3) $a=1 \Rightarrow b=2 \Rightarrow c$ are 3 variante
$b=3 \Rightarrow c$ are 2 variante
$b=4 \Rightarrow c$ are 1 variantă
$\Rightarrow$ pentru $a=1$ sunt $3+2+1=$ 6 numere

E_4) $a=2 \Rightarrow b=3 \Rightarrow c$ are 2 variante
$b=4 \Rightarrow c$ are 1 variantă
3 numere

E_5) $a=3 \Rightarrow b=4 \Rightarrow c$ are 1 variantă

E_6) în total sunt $10+6+3+1=20$ numere

---

mod II: Dacă se cer mț strict ordonate de k elemente din n posibile $\Rightarrow C_n^k$

adică $C_5^3=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 2!}=$

Prof. Ovidiu Badescu

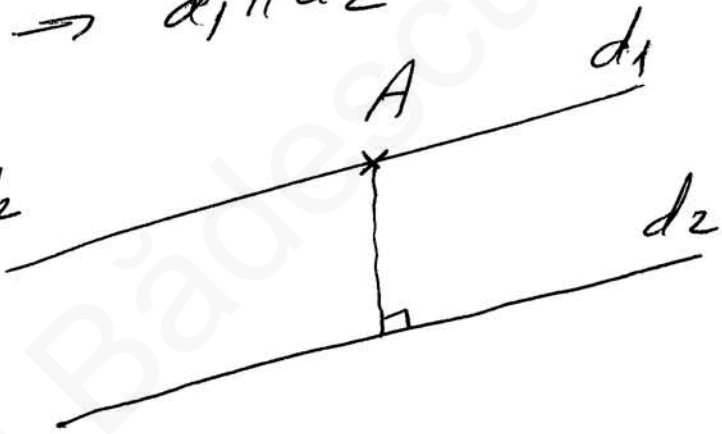
Fie $d_1: x+2y=6$ și $d_2: 2x+4y=11$ | M1/2010 MODEL I/5

Calculați distanța între d_1 și d_2

E_1) Studiem paralelismul dreptelor

$m_{d_1} = -\frac{a}{b} = -\frac{1}{2}$; $m_{d_2} = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow m_{d_1} = m_{d_2} \Rightarrow d_1 \parallel d_2$



E_2) distanța între d_1 și d_2 este egală cu distanța de la un pct de pe d_1 la d_2, pentru orice punct A

E_3) Vom a găsi un pct pe d_1, fie $x=0 \Rightarrow$

$0+2y=6 \Rightarrow y=3 \Rightarrow A(0;3) \in d_1$

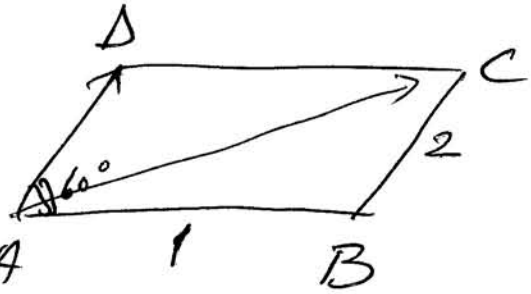
E_4) $dist(d_1, d_2) = dist(A, d_2) = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} =$

$= \frac{|2\cdot 0+4\cdot 3-11|}{\sqrt{2^2+4^2}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}/1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$

Prof. Ovidiu Bădescu

MOBEC 2010 I 16

Fie $ABCD$ paralelogram, $AB=1$, $BC=2$ și $m(B\hat{A}D)=60^\circ$. Calculați $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$



E1) Știm că: $\vec{u}\cdot\vec{v}=x_u x_v+y_u y_v$

sau $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\hat{u,v})$

E2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot\cos(\widehat{AC,AD})$

nu știm unghiul $\Rightarrow$ nu o putem aplica

E3) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ (paralelogram)

E4) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=$

$=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot\cos 60^\circ+|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot\cos 0^\circ$

$=1\cdot 2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot 2\cdot 1=1+4=5$

Prof. Oliviu Bădescu

M1/2010
MODEL II (1a)

Fie $a,b,c \in \mathbb{R}^*$, sistemul

$$\begin{cases} ax+by+cz=b \\ cx+ay+bz=a \\ bx+cy+az=c \end{cases}$$

Arătați că $\det S=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$$E_1)\ \det S=\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \xrightarrow{l_3+l_2+l_1}$$

$$=\begin{vmatrix} a+b+c & b+a+c & c+b+a \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \xrightarrow[l_1]{\text{fact comun pe}}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=$$

$$=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$$

Prof. Ovidiu Bădescu

MODEL II 1b)

Fie $a,b,c \in \mathbb{R}^*$, $\begin{cases} ax+by+cz=b \\ cx+ay+bz=a \\ bx+cy+az=c \end{cases}$

cu $\det S = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

Rezolvați sistemul dacă știm că e compatibil determinat

E_1) sist compat determinat $\Leftrightarrow \det S \neq 0 \Rightarrow$ rezolvă cu Cramer

$E_2)$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} b & b & c \\ a & a & b \\ c & c & a \end{vmatrix} \overset{C_1=C_2}{=\!=} 0$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \det S$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & b \\ c & a & a \\ b & c & c \end{vmatrix} \overset{C_2=C_3}{=\!=} 0$

$E_3)$ $x = \frac{\Delta_x}{\det S} = \frac{0}{\det S} = 0$; $y = \frac{\Delta_y}{\det S} = \frac{\det S}{\det S} = 1$

$z = \frac{\Delta_z}{\det S} = \frac{0}{\det S} = 0$

$E_4)$ $x=0$; $y=1$, $z=0$

Prof. Ovidiu Bădescu

MI/2010 MODEL II (c)

Fie sistemul $\begin{cases} ax+by+cz=b \\ cx+ay+bz=a \\ bx+cy+az=c \end{cases}$ cu

$\det S = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$, $a,b,c \in \mathbb{R}^*$

Știind că $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=0$, arătați că sistemul are o infinitate de soluții (x,y,z) cu $x^2+y^2=z-1$

E_1) Din $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=0 \Rightarrow$

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac \mid \cdot 2$

$2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2bc+2ac$

$\Rightarrow (a^2+b^2-2ab)+(b^2+c^2-2bc)+(c^2+a^2-2ca)=0$

$\Rightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\Rightarrow a-b=0$ și $b-c=0$ și $c-a=0 \Rightarrow a=b=c$

E_2) Sist devine $\begin{cases} ax+ay+az=a \\ ax+ay+az=a \\ ax+ay+az=a \end{cases}$ și cum

sunt 3 ec. identice $\Leftrightarrow x+y+z=1$, așadar soluția verifică $x+y=1-z$. Dar ar trebui ca $x^2+y^2=z-1 \Leftrightarrow x^2+y^2=-x-y \Leftrightarrow x^2+x+y^2+y=0$

$\Leftrightarrow x^2+2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+y^2+2y\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4} \Leftrightarrow$

$(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x,y \in$ cerc de centru $M(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, rază $R=\sqrt{\frac{1}{2}}$ deci având o infinitate de variante, unde $z=x^2+y^2+1$

Prof. Ovidiu Baescu

M1/2010
Model II (2a)

Fie $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbb{Z}_4\right\}$

Determinați numărul elementelor mulțimii G

E1) $\mathbb{Z}_4=\{\hat{0};\hat{1};\hat{2};\hat{3}\}$

⇒ a are 4 valori
b are 4 valori
c are 4 valori
independente

⇒ G are $4\cdot4\cdot4=64$ elemente

Prof. Ovidiu Bădescu

M11/2010
MODEL II 2b)

Fie $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbb{Z}_4\right\}$, dați un exemplu de matrice $A \in G$ cu proprietatea că $\det A \neq \hat{0}$ și $\det A^2 = \hat{0}$

$E_1)$ $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{vmatrix} = ac - \hat{0} = ac$

$E_2)$ $A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ \hat{0} & c^2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det A^2 = a^2c^2 = (ac)^2$

$E_3)$ ar trebui găsite $a, c \in \mathbb{Z}_4$ cu $ac \neq \hat{0}$ și $(ac)^2 = \hat{0} \Rightarrow ac = \hat{2}$ și că $\hat{2} \neq \hat{0}$ și $\hat{2}^2 = \hat{4} = \hat{0}$

$E_4)$ Trebuie un exemplu, fie $a = \hat{1}$, $c = \hat{2}$ și b poate fi oricât, de exemplu $b = \hat{0}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$ are rost că $\det A = \hat{2} \neq \hat{0}$

$\det A^2 = \hat{4} = \hat{0}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2010 MOBEC II/2 c1

Fie $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{Z}_4\right\}$, determinați numărul soluțiilor ecuației $X^2=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$ unde $X \in G$

$E_1)$ $X \in G \Rightarrow X=\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix} \Rightarrow X^2=\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow X^2=\begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ \hat{0} & c^2 \end{pmatrix}$$

$E_2)$ ecuația $X^2=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$ conduce la

$$\begin{cases} a^2=\hat{1} \\ ab+bc=\hat{0} \\ c^2=\hat{0} \end{cases}$$

$E_3)$ $a^2=\hat{1}$, pt. $a=\hat{0} \Rightarrow \hat{0}=\hat{1}$ fals
pt $a=\hat{1} \Rightarrow \hat{1}^2=\hat{1}$ adev.
pt $a=\hat{2} \Rightarrow \hat{2}^2=\hat{1}$ fals
pt $a=\hat{3} \Rightarrow \hat{3}^2=\hat{1}$ adev.

$E_4)$ Caz I: $a=\hat{1} \Rightarrow \begin{cases} ab+bc=\hat{0} \\ c^2=\hat{0} \end{cases} \Rightarrow c \in \{\hat{0};\hat{2}\}$

Caz I 1: $c=\hat{0} \Rightarrow \hat{1}\cdot b+\hat{0}=\hat{0} \Rightarrow b=\hat{0}$
Caz I 2: $c=\hat{2} \Rightarrow \hat{1}\cdot b+\hat{2}b=\hat{0} \Rightarrow \hat{3}b=\hat{0} \Rightarrow b \in \{\hat{0}\}$

Caz II: $a=\hat{3} \Rightarrow \begin{cases} ab+bc=\hat{0} \\ c^2=\hat{0} \Rightarrow c \in \{\hat{0};\hat{2}\} \end{cases} \Rightarrow$ 4 soluții

Caz II 1: $c=\hat{0} \Rightarrow \hat{3}b=0 \Rightarrow b=\hat{0}$
$\hat{1}\cdot\hat{b}=\hat{0} \Rightarrow \hat{2}b=\hat{0} \Rightarrow b=\hat{0}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ | M1/2010 MODEL III (1a)

Găsiți ecuația asimpt. spre ∞ pentru G_f

E_1) <u>as. orizontale spre ∞</u>

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x+1}\overset{grP>grQ}{=}\infty\notin\mathbb{R}$$

$\Rightarrow \nexists$ as. oriz spre ∞ a G_f

E_2) <u>as. oblică spre ∞</u> este $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+x+1}{x+1}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x+1}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+x}=1\in\mathbb{R}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x+1}-1\cdot x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x+1}-\frac{x+1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1-x^2-x}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}\overset{\frac{1}{\infty}}{=}0\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow \exists$ as. oblică spre ∞ dreapta $y=mx+n$

$$y=1\cdot x+0\Rightarrow y=x$$

Prof. Viriu Radescu

M1/2010
MODEL III 16)

Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$

Calculați $f'(x)$

E1) $f'(x)=\left(\dfrac{x^2+x+1}{x+1}\right)'=\dfrac{(x^2+x+1)'(x+1)-(x^2+x+1)(x+1)'}{(x+1)^2}=$

E2) $f'(x)=\dfrac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x+1)\cdot 1}{(x+1)^2}$

E3) $f'(x)=\dfrac{2x^2+2x+x+1-x^2-x-1}{(x+1)^2}$

$$f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2010
MODEL III 1c)

Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$

Arătați că f concavă pe $(-\infty;-1)$

$E_1)$ f concavă $\Leftrightarrow f''(x)\le 0$

$E_2)$ $f'(x)=\left(\dfrac{x^2+x+1}{x+1}\right)'=\dfrac{(x^2+x+1)'(x+1)-(x^2+x+1)(x+1)'}{(x+1)^2}=$

$=\dfrac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x+1)}{(x+1)^2}=$

$=\dfrac{2x^2+2x+x+1-x^2-x-1}{(x+1)^2}=$

$=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

$E_3)$ $f''(x)=\left(\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}\right)'=\dfrac{(x^2+2x)'(x+1)^2-(x^2+2x)[(x+1)^2]'}{[(x+1)^2]^2}$

$=\dfrac{(2x+2)(x+1)^2-(x^2+2x)2(x+1)}{(x+1)^4}=$

$=\dfrac{(x+1)[2(x+1)(x+1)-2(x^2+2x)]}{(x+1)^3}=$

$=\dfrac{(x+1)(2x^2+4x+2-2x^2-4x)}{[x+1]^4}=\dfrac{2}{(x+1)^3}$

$x\in(-\infty;-1)\Rightarrow x+1<0\Rightarrow (x+1)^3<0$ $\Big\}$ $f''(x)<0$ $\Rightarrow f$ concavă

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2010
MODELUL III 2a)

Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = |\sin nx|$ și numerele $I_n = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{f_n(x)}{x}\,dx$. Calculați $\int_0^{\pi} f_2(x)\,dx$

E1) $f_2(x) = |\sin 2x| \Rightarrow I = \int_0^{\pi} |\sin 2x|\,dx$

E2) $x \in [0;\pi] \to 2x \in [0;2\pi]$

pt $2x \in [0;\pi] \Rightarrow \sin 2x \geq 0$, aici $x \in [0;\frac{\pi}{2}]$

pt $2x \in [\pi;2\pi] \to \sin 2x \leq 0$, aici $x \in [\frac{\pi}{2};\pi]$

E3) $I = \int_0^{\pi/2} \sin 2x\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} -\sin 2x\,dx$

E4) Dar, $\int_a^b \sin 2x\,dx = -\frac{\cos 2x}{2}\Big|_a^b$ (se verifică prin derivare deoarece $\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)' = \frac{1}{2}(-\cos 2x)' =$

$= \frac{1}{2} \cdot \sin 2x \cdot 2 = \sin 2x$

E5) $I = -\frac{\cos 2x}{2}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\cos 2x}{2}\Big|_{\pi/2}^{\pi} =$

$= -\frac{1}{2}(\cos\pi - \cos 0) + \frac{1}{2}(\cos 2\pi - \cos\pi)$

$= -\frac{1}{2}(-1-1) + \frac{1}{2}(1+1) = 1+1 = 2$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1 | 2016
MODEL
III 2/6

Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = |\sin nx|$ și numerele

$$I_n = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{f_n(x)}{x}\, dx.$$

Arătați că $I_n \leq \ln 2$

$$E_1)\ I_n = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{|\sin nx|}{x}\, dx$$

$E_2)$ Atunci când se cere compararea unei integrale cu o funcție, se compară interiorul integralei, apoi se integrează relația

$E_3)$ $\sin nx \in [-1,1] \to |\sin nx| \in [0,1] \Rightarrow$

$\Rightarrow |\sin nx| \leq 1 \;\big|\; : x$ pozitiv

$$\frac{|\sin nx|}{x} \leq \frac{1}{x} \;\Big|\; \int_{\pi}^{2\pi} \dots\, dx$$

$$\Rightarrow I_n \leq \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{x}\, dx \Rightarrow I_n \leq \ln|x| \Big|_{\pi}^{2\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_n \leq \ln 2\pi - \ln \pi$$

$$I_n \leq \ln \frac{2\pi}{\pi} \Rightarrow I_n \leq \ln 2$$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2010
MODEL III 2c)

Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = |\sin nx|$ și numerele

$$I_n = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{f_n(x)}{x}\, dx.$$

Arătați că $I_n \geq \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$

E1) $I_n = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{|\sin nx|}{x}\, dx$, notăm $t = nx \Rightarrow dt = n\,dx$

$\Rightarrow dx = \frac{dt}{n}$

$x = \pi \Rightarrow t = n\pi$; $x = 2\pi \Rightarrow t = 2n\pi$

$$I_n = \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin t|}{\frac{t}{n}} \cdot \frac{dt}{n} = \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt$$

E2) $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt + \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt + \dots + \int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt$

E3) Fie $J_1 = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt \Rightarrow n\pi \leq t \leq (n+1)\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{|\sin t|}{(n+1)\pi} \Rightarrow J_1 \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\, dt$

Dacă n par $\Rightarrow \sin t \geq 0 \Rightarrow |\sin t| = \sin t \Rightarrow$

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\, dt = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin t\, dt = -\cos t \Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi} = -(-1-1) = 2$$

Dacă n impar $\Rightarrow \sin t \leq 0 \Rightarrow |\sin t| = -\sin t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\, dt = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} -\sin t\, dt = \cos t \Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi} = 1+1 = 2$$

E4) $\Rightarrow J_1 \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \cdot 2 \Rightarrow J_1 \geq \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

Analog pentru celelalte $\Rightarrow$ S.e.d.

Prof. Ovidiu Badescu