SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $C_3^2 + 3!$.

5p **2.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_5(3x+4) = 2$.

5p **3.** Să se calculeze $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - x - 2 = 0$.

5p **4.** Se consideră funcția $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$. Să se determine mulțimea valorilor funcției f.

5p **5.** Fie punctele $A(2,-1)$ și $B(-1,3)$. Să se determine numerele reale a și b astfel încât $\overrightarrow{AB} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 4, AC = \sqrt{7}$ și $BC = \sqrt{3}$. Să se calculeze măsura unghiului B.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sunt soluțiile ecuației $x^3 - 3x + 2 = 0$.

5p **a)** Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3$.

5p **b)** Să se arate că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$.

5p **c)** Să se calculeze valoarea determinantului d.

2. Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$.

5p **a)** Să se verifice că $x \circ y = (x+4)(y+4) - 4$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $x \circ (-4)$, unde x este număr real.

5p **c)** Știind că operația „$\circ$” este asociativă, să se calculeze $(-2009) \circ (-2008) \circ \cdots \circ 2008 \circ 2009$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

5p **a)** Să se calculeze derivata funcției *f*.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției *f*.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x) \le -4$ pentru orice $x < -1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + e^x, & x \le 0 \\ \sqrt{x} + 1, & x > 0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția *f* admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-1}^{0} x f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox* a graficului funcției $g:[0;1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$. Să se determine $f(-4)\cdot f(-3)\cdot\ldots\cdot f(3)\cdot f(4)$.

5p **2.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2(x+2)+\log_2 x=3$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi inecuația $x^2-5x+5\le 1$.

5p **4.** Să se demonstreze că pentru orice $x\in\mathbb{R}$ numerele 3^x-1, 3^{x+1} şi $5\cdot 3^x+1$ sunt termeni consecutivi într-o progresie aritmetică.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,-8)$ şi $B(6,3)$. Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că $AC=2$, $m(\sphericalangle BAC)=30^\circ$ şi $AB=4$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $d=\begin{vmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{vmatrix}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=2$, $b=1$ şi $c=-1$, să se calculeze determinantul d.

5p **b)** Să se verifice că $d=\frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$, oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\begin{vmatrix} 2^x & 3^x & 5^x\\ 5^x & 2^x & 3^x\\ 3^x & 5^x & 2^x\end{vmatrix}=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x\circ y=2xy-6x-6y+21$.

5p **a)** Să se arate că $x\circ y=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=11$.

5p **c)** Ştiind că operația "$\circ$" este asociativă, să se calculeze $1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2009}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-e^{-x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $S=g(0)+g(1)+\ldots+g(2009)$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f'(x)-f''(x)$.

2. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$ şi $F(x)=(x-1)e^x$.

5p **a)** Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f, axa Ox şi dreptele $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_1^x\frac{f(t)f''(t)-(f'(t))^2}{f^2(t)}dt=\frac{x+1}{x}-2$, pentru orice $x>1$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine al zecelea termen al şirului 1, 7, 13, 19, ...

5p **2.** Se consideră toate numerele naturale de trei cifre scrise cu elemente din mulțimea $\{1,2\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un astfel de număr, acesta sa fie divizibil cu 3.

5p **3.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\sqrt{2+x}=x$.

5p **4.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Să se calculeze $f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)$.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele $A(2,-1)$ şi $B(1,-2)$.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului *ABC*, ştiind că $AB=AC=\sqrt{2}$, $m(\sphericalangle A)=30°$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $d=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$ sunt soluțiile ecuației $x^3-2x=0$.

5p **a)** Să se calculeze $x_1+x_2+x_3$.

5p **b)** Să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

5p **c)** Să se calculeze determinantul d.

2. Se consideră polinoamele cu coeficienți reali $f=X^4+aX^3-28X^2+bX+96$, $g=X^2+2X-24$ şi $h=(X^2+2X-24)(X^2-4)$.

5p **a)** Să se scrie forma algebrică a polinomului h.

5p **b)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât polinoamele f şi h să fie egale.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x+2\cdot 8^x-28\cdot 4^x-8\cdot 2^x+96=0$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$, pentru orice $x\in(0;+\infty)$.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției *f*.

5p **c)** Să se demonstreze că $3^{\sqrt{5}}\le 5^{\sqrt{3}}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} e\cdot e^x, & x\le -1 \\ 2+x, & x>-1 \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $g:[0,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$, $x\in[0,2]$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_{-2}^{0}\dfrac{x\,f(x)}{e}dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine soluțiile întregi ale inecuației $(x-1)^2+x-7<0$.

5p **2.** Să se calculeze suma primilor 5 termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=1$ și $a_2=3$.

5p **3.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-8x-3$, unde m este un număr real nenul. Să se determine m știind că valoarea maximă a funcției f este egală cu 5.

5p **4.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2(x+2)-\log_2(x-5)=3$.

5p **5.** Să se determine numărul real a știind că vectorii $\vec{u}=2\vec{i}+a\vec{j}$ și $\vec{v}=3\vec{i}+(a-2)\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $AB=3$ și $m(\sphericalangle C)=30°$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}4&-6\\2&-3\end{pmatrix}$ și $X(a)=I_2+aA$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze A^3, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

5p **b)** Să se verifice dacă $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)$, oricare ar fi numerele $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze suma $X(1)+X(2)+X(3)+...+X(2009)$.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6=\{\hat{0},\ \hat{1},\ \hat{2},\ \hat{3},\ \hat{4},\ \hat{5}\}$.

5p **a)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_6$ ecuația $\hat{2}x+\hat{5}=\hat{1}$.

5p **b)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix}\hat{1}&\hat{2}&\hat{3}\\\hat{2}&\hat{3}&\hat{1}\\\hat{3}&\hat{1}&\hat{2}\end{vmatrix}$ în $\mathbb{Z}_6$.

5p **c)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_6$ sistemul de ecuații $\begin{cases}\hat{2}x+y=\hat{4}\\x+\hat{2}y=\hat{5}\end{cases}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^{-x}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că f este descrescătoare pe $(-\infty,0]$ și crescătoare pe $[0,+\infty)$.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x+1)^3-3x^2-1$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 g(x)dx$.

5p **b)** Să se determine numărul real $a>1$ astfel încât $\int_1^a\left(g(x)-x^3\right)\cdot e^x dx=6e^a$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1\left(3x^2+3\right)\cdot g^{2009}(x)dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul elementelor mulțimii $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\mid |x+1|\le 2\right\}$.

5p **2.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\left\{\sqrt[3]{1},\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{3},...,\ \sqrt[3]{30}\right\}$, acesta să fie număr rațional.

5p **3.** Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=2x-1$. Să se determine soluția reală a ecuației $2f(x)+3g(x)=-5$.

5p **4.** După o reducere cu 20 %, prețul unui produs este 320 de lei. Să se determine prețul produsului înainte de reducere.

5p **5.** În reperul cartezian $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ se consideră vectorii $\vec{u}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ și $\vec{v}=5\vec{i}-\vec{j}$. Să se determine coordonatele vectorului $5\vec{u}+3\vec{v}$.

5p **6.** Fie triunghiul dreptunghic *ABC* și *D* mijlocul ipotenuzei *BC*. Să se calculeze lungimea laturii *AB*, știind că *AC* = 6 și *AD* = 5.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} x-3 & 1\\ 1 & x-3\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$. Se notează $A^2=A\cdot A$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine *x* real, știind că $\det(A)=0$.

5p **b)** Să se verifice egalitatea $A^2=(2x-6)A-\left(x^2-6x+8\right)\cdot I_2$.

5p **c)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $A^2=2A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x\circ y=xy-2(x+y)+6$.

5p **a)** Să se arate că $x\circ y=(x-2)(y-2)+2$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $x\circ 2=2$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Știind că legea de compoziție „$\circ$” este asociativă, să se calculeze valoarea expresiei $E=(-2009)\circ(-2008)\circ\ldots\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ 2\circ\ldots\circ 2009$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2009}-2009(x-1)-1$.

5p **a)** Să se calculeze $f(0)+f'(0)$.

5p **b)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției *f* în punctul $A(0;1)$.

5p **c)** Să se arate că funcția *f* este convexă pe $[0;+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^{-x}$.

5p **a)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției *f*, axa *Ox* și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **b)** Folosind faptul că $x^2+e^{-x^2}\ge 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, să se demonstreze că $\int_0^1 e^{-x^2}dx\ge\frac{2}{3}$.

5p **c)** Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+f(-x)$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze a^2+b^2, știind că numerele a și b au suma egală cu 4 și produsul egal cu 3.

5p **2.** Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+1$ și $g(x)=x+4$. Să se calculeze coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor *f* și *g*.

5p **3.** Să se determine valorile reale pozitive ale numărului *x*, știind că $\lg\sqrt{x}, \frac{3}{2}$ și $\lg x$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},...,\sqrt{10}\right\}$, acesta să fie rațional.

5p **5.** Să se determine numărul real a, știind că dreptele $2x-y+3=0$ și $ax+2y+5=0$ sunt paralele.

5p **6.** Se consideră triunghiul *ABC* cu *AB* = 1, *AC* = 2 și *BC* = $\sqrt{5}$. Să se calculeze $\cos B$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n,2^n)$, $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se demonstreze că punctele O, A_1, A_2 sunt coliniare.

5p **b)** Să se determine numărul de drepte care trec prin cel puțin două dintre punctele O, A_0, A_1, A_2.

5p **c)** Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, $n\in\mathbb{N}$.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{A_x \,\middle|\, x\in\mathbb{Z}\right\}$, unde matricea $A_x=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x&0&1\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se verifice că $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

5p **b)** Știind că mulțimea *G* împreună cu operația de înmulțire a matricelor formează o structură de grup, să se determine elementul neutru al grupului $(G,\cdot)$.

5p **c)** Să se arate că funcția $f:\mathbb{Z}\to G$, $f(x)=A_x$ este morfism între grupurile $(\mathbb{Z},+)$ și $(G,\cdot)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5p **b)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}$, oricare ar fi $x\geq 0$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\frac{1}{2}\leq f(x)\leq 2$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+e^x+1$.

5p **a)** Să se arate că orice primitivă a funcției *f* este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 x f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x}dx=e+\frac{1}{3}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_1x_2$, știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 2x - 2 = 0$.

5p **2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-4x$. Să se determine soluțiile reale ale inecuației $f(x)-1\geq 4x$.

5p **3.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $3^{x-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}$.

5p **4.** Să se calculeze $\log_3 27 - \log_2 8$.

5p **5.** Se consideră punctele $A(1,a)$, $B(2,-1)$, $C(3,2)$ și $D(1,-2)$. Să se determine numărul real a, știind că dreptele *AB* și *CD* sunt paralele.

5p **6.** Se consideră triunghiul *ABC* cu *AB* = 5, *AC* = 6 și *BC* = 7. Să se calculeze $\cos A$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze matricea B^2, unde $B^2 = B\cdot B$.

5p **b)** Să se verifice că $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se arate că $C^4 = 6^4\cdot I_2$, unde $C = B^2 + A^{-1}$ și $C^4 = C\cdot C\cdot C\cdot C$.

2. Fie polinoamele $f = X^3 + aX^2 + X + \hat{1}$ și $g = X + \hat{3}$ din inelul $\mathbb{Z}_5[X]$.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{Z}_5$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul *g*.

5p **b)** Pentru $a=\hat{1}$ să se arate că $f=(X+\hat{1})(X^2+\hat{1})$.

5p **c)** Pentru $a=\hat{1}$ să se rezolve în inelul $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ ecuația $f(x)=\hat{0}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^2$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f nu are asimptotă către $+\infty$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x(1+\ln x)}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^e f'(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $[1,+\infty)$.

5p **c)** Să se determine numărul real $a\in(1,e^2)$ astfel încât aria suprafeței plane, determinate de graficul funcției *f*, axa *Ox*, dreptele de ecuații $x=a$ și $x=e^2$, să fie egală cu $\ln\frac{3}{2}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine suma elementelor mulțimii $A=\{1,3,5,...,13\}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Să se determine punctul care aparține graficului funcției f și are abscisa egală cu ordonata.

5p **3.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $2^x+2^{x+3}=36$.

5p **4.** Să se calculeze $A_4^4+C_4^4$.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care conține punctul $A(1,1)$ și este paralelă cu dreapta $4x+2y+5=0$.

5p **6.** Să se calculeze $\sin^2 130^\circ+\cos^2 50^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $X=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Definim matricele $A=X\cdot Y^t$ și $B(a)=aA+I_3$, unde $a\in\mathbb{R}$ și Y^t este transpusa matricei Y.

5p **a)** Să se arate că matricea $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&4&-6\\3&6&-9\end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **c)** Să se arate că matricea $B(a)$ este inversabilă, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_5[X]$, $f=(\hat{3}a+\hat{3}b)X^2+\hat{2}X+\hat{2}a+\hat{3}b$ și $g=\hat{2}X^2+\hat{2}X+\hat{3}a+\hat{2}b$.

5p **a)** Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}_5$ astfel încât cele două polinoame să fie egale.

5p **b)** Pentru $a=b=\hat{2}$ să se calculeze în $\mathbb{Z}_5$ suma $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})+f(\hat{3})+f(\hat{4})$.

5p **c)** Pentru $a=b=\hat{2}$ să se rezolve în $\mathbb{Z}_5$ ecuația $f(x)=\hat{0}$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\setminus\{e\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1+\ln x}{1-\ln x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

5p **b)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{2}{x(1-\ln x)^2}$, oricare ar fi $x\in(0;+\infty)\setminus\{e\}$.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcțiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ și $g(x)=\frac{1}{x}$.

5p **a)** Să se determine mulțimea primitivelor funcției $f+g$.

5p **b)** Să se arate că $\int_1^2 (f^2(x)+g^2(x))\,dx=\frac{e^4-e^2+1}{2}$.

5p **c)** Folosind eventual faptul că $2ab\le a^2+b^2$, pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$, să se demonstreze că $\int_1^2 e^x\cdot\frac{1}{x}\,dx\le\frac{e^4-e^2+1}{4}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se verifice că $\log_3 9 - \log_2 8 = \log_4 \frac{1}{4}$.

5p **2.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x^2 + 2mx + 4m = 0$ să aibă soluții reale.

5p **3.** Să se rezolve în mulțime numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^2 - x - 3} = -1$.

5p **4.** O sumă de 1000 de lei a fost depusă la o bancă şi după un an s-a obținut o dobândă de 80 de lei. Să se calculeze rata dobânzii.

5p **5.** Să se determine coordonatele punctului *B*, ştiind că $A(3,4)$ şi $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + \vec{j}$.

5p **6.** Să se calculeze aria unui paralelogram *ABCD*, ştiind că $AB = 3$, $AD = \sqrt{3}$ şi $m(\sphericalangle BAD) = 120^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine numerele întregi a, b, c, d astfel încât $A + 2I_2 = O_2$.

5p **b)** Să se calculeze determinantul matricei $B = A - A^t$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $A + A^t = 2I_2$, atunci determinantul matricei $A - A^t$ este un număr divizibil cu 4.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = (x-4)(y-4) + 4$.

5p **a)** Să se determine elementul neutru al legii de compoziție.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x \circ x = x$.

5p **c)** Să se determine două numere $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(ax^2 + bx + c)$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a = 1, b = c = 0$, să se calculeze $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

5p **b)** Să se verifice că $f'(0) - f(0) = b$.

5p **c)** Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ şi $f''(0) = 4$.

2. Se consideră integralele $I_n = \int_0^1 \frac{x^n + 1}{x + 1}\, dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Folosind, eventual, faptul că $x^2 \le x$ pentru orice $x \in [0,1]$, să se demonstreze că $I_2 \le I_1$.

5p **c)** Să se demonstreze că $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1} + 2\ln 2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine al patrulea termen al unei progresii geometrice, știind că rația este egală cu $\frac{1}{3}$ și primul termen este 27.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $f^2(x)+2f(x)-3=0$.

5p **3.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $4^x-3\cdot 2^x+2=0$.

5p **4.** Să se compare numerele $a=C_4^1+C_4^3$ și $b=C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{v}=3\vec{i}+4\vec{j}$ și $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$. Să se determine coordonatele vectorului $\vec{w}=2\vec{v}-3\vec{u}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul *ABC*, având aria egală cu 15. Să se calculeze $\sin A$, știind că *AB* = 6 și *AC* = 10.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}$. Se notează $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ și $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot ...\cdot A}_{de\ n\ ori}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei *A*.

5p **b)** Să se arate că $A^2+A^3=O_2$.

5p **c)** Să se calculeze suma $A+2\cdot A^2+...+10\cdot A^{10}$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=(X-1)^{10}+(X-2)^{10}$ și $g=X^2-3X+2$.

5p **a)** Să se descompună polinomul g în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

5p **b)** Să se demonstreze că polinomul f nu este divizibil cu polinomul g.

5p **c)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2-x,\ x\geq 1\\ -x^2+x,\ x<1\end{cases}$.

5p **a)** Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=1$.

5p **b)** Să se calculeze $f'(0)+f'(2)$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este concavă pe $(-\infty;1)$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^x}$ și $g(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^x}$.

5p **a)** Să se verifice că funcția *g* este o primitivă a funcției *f*.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_0^1 f'(x)g'(x)dx=\int_0^1 f(x)g(x)dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $C_5^4 + A_5^4$.

5p **2.** Să se calculeze suma $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}$.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$. Să se determine numerele reale *a* și *b* știind că $3f(x)+2=3x+5$, pentru oricare $x\in\mathbb{R}$.

5p **4.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_3\left(x^2-2x\right)=\log_3(2x-3)$.

5p **5.** În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $A(1,2)$, $B(-1,1)$, $C(3,5)$ și $D(5,a)$, $a\in\mathbb{R}$. Să se determine a, știind că $AB\parallel CD$.

5p **6.** Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului *ABC* știind că *BC* = 8 și $m(\sphericalangle A)=45^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $U=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$ și $V=\begin{pmatrix}v & 9\\ 1 & v\end{pmatrix}$ cu $v,x,y\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $X\cdot V=U$, atunci $x\cdot(v^2-9)=0$.

5p **b)** Să se determine valorile reale ale numărului *v* pentru care determinantul matricei V este nenul.

5p **c)** Să se determine trei soluții distincte ale sistemului de ecuații $\begin{cases}3x+y=0\\ 9x+3y=0\end{cases}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x\circ y=\sqrt[3]{x^3+y^3-1}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x\circ(-x)=-1$, oricare ar fi *x* real.

5p **b)** Să se arate că legea de compoziție "$\circ$" este asociativă.

5p **c)** Să se calculeze $(-4)\circ(-3)\circ\ldots\circ 3\circ 4$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=-\frac{2}{x^3}-\frac{2}{(x+1)^3}$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 f'(x)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}+x$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^e (f(x)-\frac{\ln x}{x})\,dx$.

5p **b)** Să se verifice că $\int_1^e f(x)\,dx=\frac{e^2}{2}$.

5p **c)** Să se arate că șirul care are termenul general $I_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left(f(x)-x\right)dx$, $n\geq 1$ este o progresie aritmetică cu rația 1.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-25$. Să se calculeze $f(-5)\cdot f(-4)\cdot ...\cdot f(0)\cdot ...\cdot f(4)\cdot f(5)$.

5p **2.** Să se rezolve ecuația $C_n^2=28$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

5p **3.** Știind că $\log_3 2=a$, să se verifice dacă $\log_3 8+\log_3 100-\log_3 25=5a$.

5p **4.** Să se determine soluțiile reale ale inecuației $\frac{2x+3}{x^2+x+1}\geq 1$.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care conține punctele $A(2,3)$ și $B(-3,-2)$.

5p **6.** Se consideră triunghiul *ABC* de arie egală cu 6, cu *AB* = 3 și *BC* = 8. Să se calculeze $\sin B$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. Se notează cu $X\cdot X=X^2$.

5p **a)** Să se verifice că $A=I_3+B$.

5p **b)** Să se calculeze suma A^2+B^2.

5p **c)** Să se calculeze inversa matricei A^2.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+7(x+y)+42$.

5p **a)** Să se calculeze $\sqrt{2}\circ(-\sqrt{2})$.

5p **b)** Să se verifice că $x\circ y=(x+7)(y+7)-7$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Știind că legea de compoziție „$\circ$” este asociativă, să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x\circ x=x$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2\ln x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Să se arate că $f(x)\geq \ln\frac{e^2}{4}$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f_m:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=m^2x^2+(m^2-m+1)x+1$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int f_1(x)\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 e^x f_0(x)\,dx$.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $\int_0^1 f_m(x)\,dx=\frac{3}{2}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul tuturor submulțimilor de 2 elemente care se pot forma cu elemente din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-3x+1$ și $g(x)=x-1$. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $f(x)=-g(x)$.

5p **3.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_3\left(x^2-4x+4\right)=2$.

5p **4.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ știind că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+m-1$ este tangentă axei Ox.

5p **5.** Să se calculeze aria triunghiului echilateral ABC știind că $A(-1,1)$ și $B(3,-2)$.

5p **6.** Să se calculeze $\cos x$, știind că $\sin x=\frac{4}{5}$ și x este măsura unui unghi ascuțit.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $D(a)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 9\\ 1 & a & a^2\end{vmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Să se calculeze determinantul $D(9)$.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $D(a)=0$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $D\left(3^x\right)=0$.

2. Se consideră mulțimea $M=[k;+\infty)\subset\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{R}$ și operația $x*y=xy-k(x+y)+k^2+k$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $k\in\mathbb{R}$ astfel încât $2*3=2$.

5p **b)** Pentru $k=2$ să se rezolve în M ecuația $x*x=6$.

5p **c)** Să se demonstreze că pentru orice $x,y\in M$, rezultă că $x*y\in M$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{xe^x}{(x+1)^2}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x>-1$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ se consideră $I_n=\int_e^{e^2}\frac{\ln^n x}{x}dx$.

5p **a)** Să se verifice că $I_0=1$.

5p **b)** Să se calculeze I_1.

5p **c)** Folosind, eventual, faptul că $1\leq\ln x\leq 2$ oricare ar fi $x\in\left[e,e^2\right]$, să se demonstreze că $1\leq\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\leq 2^n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se demonstreze că dacă $a\in\mathbb{R}^*$, atunci ecuația $ax^2-(2a+1)x+a+1=0$ are două soluții reale distincte.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-11x+30$. Să se calculeze $f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(6)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+3}-2^x=28$.

5p **4.** Să se efectueze $A_6^2-2C_6^4$.

5p **5.** Să se calculeze lungimea segmentului determinat de punctele $A(2,3)$ și $B(5,-1)$.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC știind că $AB=2$, $BC=4$ și $m(\sphericalangle B)=60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}5&0\\0&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se notează $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ n\ ori}$.

5p **a)** Să se calculeze A^2+A.

5p **b)** Știind că $A^n=\begin{pmatrix}5^n&0\\0&1\end{pmatrix}$, pentru oricare $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, să se rezolve ecuația $\det(A^n)=2\cdot 5^n-125$.

5p **c)** Să se determine transpusa matricei $B=A+A^2+\ldots+A^{2009}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+mX^2+n$, unde $m,n\in\mathbb{R}$. Rădăcinile polinomului sunt x_1,x_2,x_3,x_4.

5p **a)** Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$, știind că polinomul f admite rădăcinile $x_1=0$ și $x_2=1$.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile polinomului să verifice relația $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=2$.

5p **c)** Pentru $m=1$ și $n=1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(e)$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ a graficului funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că $x^e\leq e^x$, pentru orice $x>0$.

2. Se consideră funcția $f:[-4,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{16-x^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^4 f^2(x)\,dx$.

5p **b)** Să se verifice că $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\dfrac{x}{f(x)}dx=0$.

5p **c)** Să se demonstreze că $0\leq\int_0^m f(x)\,dx\leq 8$, oricare ar fi $m\in[0,2]$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4\}$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $125^x = \frac{1}{5}$.

5p **3.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+5x+m+6$. Să se determine valorile reale ale lui *m* știind că $f(x)\geq 0$, pentru oricare $x\in\mathbb{R}$.

5p **4.** Să se determine numărul real x, știind că 2^x-1, 4^x și $2^{x+1}+3$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **5.** Să se calculeze $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$, știind că *A*, *B* și *C* sunt vârfurile unui triunghi.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul triunghiului *ABC*, știind că $AB=5$, $AC=4$ și $m(\sphericalangle A)=60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se verifice că $AB=BA$.

5p **b)** Să se calculeze A^2+B^2, unde $A^2=A\cdot A$ și $B^2=B\cdot B$.

5p **c)** Să se arate că $C^4=5^4\cdot I_2$, unde $C=A+B$ și $C^4=C\cdot C\cdot C\cdot C$.

2. Se consideră polinoamele cu coeficienți raționali $f=X^4+aX^3+bX^2-5X+6$ și $g=X^3+X-2$.

5p **a)** Să se determine $a,b\in\mathbb{Q}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g.

5p **b)** Pentru $a=-3$ și $b=1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x}-3^{2x+1}+3^x-5+6\cdot 3^{-x}=0$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=e^{-x}-1$ și $f_{n+1}(x)=f_n'(x)$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să determine $f_1(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ a graficului funcției f_0.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_2(x)+x-1}{x^2}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Să se verifice că $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=e-1$.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=xe^{-x}f(x)$, axa *Ox* și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_{-1}^1 \sqrt{x^2+1}\cdot f(x)\,dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $C_8^3 - C_8^5$.

5p **2.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2(x+5)=3$.

5p **3.** Să se determine o ecuație de gradul al II-lea ale cărei soluții x_1 și x_2 verifică relațiile $x_1+x_2=1$ și $x_1x_2=-2$.

5p **4.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$. Să se calculeze $f(f(0))-f(2)$.

5p **5.** Să se determine coordonatele punctului C, simetricul punctului $A(5,4)$ față de punctul $B(-2,1)$.

5p **6.** Triunghiul ABC are $AB=3$, $AC=4$ și $BC=5$. Să se calculeze lungimea înălțimii duse din vârful A.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} mx+y+z=m^2-3 \\ 5x-2y+z=-2 \\ (m+1)x+2y+3z=-2 \end{cases}$, unde m este un parametru real.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$, știind că $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ m+1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-12$.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită soluția $(1,2,-3)$.

5p **c)** Pentru $m=-1$ să se rezolve sistemul de ecuații.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-9X^2-X+9$ care are rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la X^2-1.

5p **b)** Să se verifice că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=9(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-18$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f(3^x)=0$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} e^x-1, & x<0 \\ x^2+x+a, & x\geq 0 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0=0$.

5p **b)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(-1;\frac{1}{e}-1\right)$.

5p **c)** Să se arate că funcția f' este crescătoare pe $(0;+\infty)$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră $I_n=\int_2^3 \frac{x^n}{x^2-1}dx$, $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se verifice că $I_0=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

5p **b)** Să se calculeze I_1.

5p **c)** Să se demonstreze că $I_{n+2}-I_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $2\log_3 4 - 4\log_3 2$.

5p **2.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $2^{x-1} + 2^x = 12$.

5p **3.** Să se determine numărul natural n, $n \geq 1$ știind că $A_n^1 + C_n^1 = 10$.

5p **4.** Fie funcția $f:[0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 3$. Să se determine mulțimea valorilor funcției f.

5p **5.** Se consideră triunghiul echilateral ABC înscris într-un cerc de centru O. Să se arate că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{O}$.

5p **6.** Să se calculeze $\sin 135°$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n, 2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.

5p **a)** Să se determine ecuația dreptei A_1A_2.

5p **b)** Să se calculeze aria triunghiului OA_1A_2.

5p **c)** Să se arate că toate punctele $A_n(n, 2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$ sunt coliniare.

2. Se consideră mulțimea $M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$.

5p **a)** Să se verifice dacă $A(a) \cdot A(b) = A(2ab)$, oricare ar fi numerele reale a și b.

5p **b)** Să se arate că $A\left(\frac{1}{2}\right)$ este element neutru față de operația de înmulțire a matricelor pe M.

5p **c)** Să se determine simetricul elementului $A(1) \in M$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor pe mulțimea M.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este descrescătoare pe $(0,2]$.

5p **c)** Să se arate că $2e^{\sqrt{3}} \leq 3e^{\sqrt{2}}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - x$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^2 (x - f(x) + \ln x)^2 \, dx$.

5p **b)** Să se demonstreze că orice primitivă F a funcției f este concavă pe intervalul $(1,+\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h:[1,e] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + x$, axa Ox și dreptele $x = 1$ și $x = e$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\log_2 3+\log_2 \frac{1}{3}$.

5p **2.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $\{0,1,2,3,4,5\}$, acesta să verifice inegalitatea $n!<50$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x-14\cdot 2^{-x}=-5$.

5p **4.** Să se demonstreze că pentru orice număr real *a*, ecuația de gradul al doilea $x^2-(2\sin a)x+1-\cos^2 a=0$ admite soluții reale egale.

5p **5.** În reperul cartezian *xOy* se consideră vectorii $\overrightarrow{OA}(2,-3)$ și $\overrightarrow{OB}(1,-2)$. Să se determine numerele reale α și β pentru care vectorul $3\overrightarrow{OA}-5\overrightarrow{OB}$ are coordonatele (α,β).

5p **6.** Raza cercului circumscris triunghiului *ABC* este $\frac{3}{2}$, iar $BC=3$. Să se calculeze $\sin A$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{A=\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \middle|\ a,b\in\mathbb{Z},\ a^2=1\right\}$.

5p **a)** Să se verifice dacă matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și respectiv $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparțin mulțimii *G*.

5p **b)** Să se determine matricea $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}=aI_2+bB$, oricare $a, b\in\mathbb{Z}$.

5p **c)** Să se demonstreze că inversa oricărei matrice din *G* este tot o matrice din *G*.

2. Se consideră polinomul cu coeficienți raționali $f=X^3+aX^2-5X+14$ și suma $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$, $n\in\mathbb{N}^*$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **a)** Să se determine numărul rațional a astfel încât polinomul f să admită rădăcina $x_1=-2$.

5p **b)** Pentru $a=-4$ să se rezolve ecuația $f(x)=0$.

5p **c)** Pentru $a=-4$ să se demonstreze egalitatea $S_3+42=4S_2+5S_1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)^2+(x-1)^2$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=4x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.

5p **c)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$.

2. Se consideră funcția $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\ln x$.

5p **a)** Știind că $g:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-\ln x$, să se verifice că $\int g(x)dx=g(x)+C$, $x>0$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^e f(x)dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_1^e xf\left(x^2\right)dx=\frac{e^{e^2}+e^2-e+1}{2}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\log_6 24 - \log_6 4$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$. Să se calculeze $f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(2009)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-5}=2$.

5p **4.** Să se determine numărul natural n, $n\geq 5$, știind că $\frac{(n-3)!}{(n-5)!}=6$.

5p **5.** Să se determine numerele reale a, știind că lungimea segmentului determinat de punctele $A(-1,2)$ și $B(4-a,4+a)$ este egală cu 5.

5p **6.** Să se calculeze $\cos^2 45^\circ+\sin^2 135^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A_n\left(\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ \log_3 9^n\right)$ și $B_n(-n,2n)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele B_1 și B_2.

5p **b)** Să se arate că $A_n=B_n$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se demonstreze că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, punctul A_n aparține dreptei A_1A_2.

2. În mulțimea $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinoamele $f=X^4+X^3+X^2+X+1$ și $g=X^2-X-1$.

5p **a)** Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

5p **b)** Să se arate că dacă y este rădăcină a polinomului g, atunci $y^3=2y+1$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă y este rădăcină a polinomului g, atunci $f(y)$ nu este număr rațional.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $0<f(x)\leq\frac{1}{2e}$, pentru orice $x\in\left[\sqrt{e},+\infty\right)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^e x\left(f(x)+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $(0,+\infty)$.

5p **c)** Să se verifice că $\int_1^2 f'(x)f(x)dx=-\frac{22}{81}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\log_3 6+\log_3 2-\log_3 4$.

5p **2.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\sqrt{x^2-x-2}=2$.

5p **3.** Să se determine o ecuație de gradul al II-lea ale cărei soluții x_1 și x_2 verifică simultan relațiile $x_1+x_2=2$ și $x_1x_2=-3$.

5p **4.** Să se determine $m\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, știind că abscisa punctului de minim al graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m-1)x^2-(m+2)x+1$ este egală cu 2.

5p **5.** Să se determine distanța dintre punctele $A(3,-1)$ și $B(-1,2)$.

5p **6.** Să se determine numărul real x pentru care x, $x+7$ și $x+8$ sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n+2,3n-2)$, $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se scrie ecuația dreptei determinate de punctele A_1 și A_2.

5p **b)** Să se calculeze aria triunghiului OA_0A_1.

5p **c)** Să se demonstreze că pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$, punctele A_1, A_2 și A_n sunt coliniare.

2. Se consideră polinoamele $f=\hat{3}X^5+\hat{3}X^3+\hat{3}X+\hat{4}\in\mathbb{Z}_5[X]$ și $g=\hat{3}X^3+\hat{3}X^2+\hat{2}X+\hat{3}\in\mathbb{Z}_5[X]$.

5p **a)** Să se calculeze $f(\hat{0})+f(\hat{1})$.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{Z}_5$ ecuația $f(x)=\hat{0}$.

5p **c)** Să se determine câtul împărțirii polinomului f la polinomul g.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x+2}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in[0,1]$.

5p **b)** Să se arate că f este funcție crescătoare pe $[0;1]$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\dfrac{3}{e}\leq\dfrac{1}{f(x)}\leq 2$, pentru orice $x\in[0,1]$.

2. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x}$ și $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

5p **a)** Să se arate că $F(x)=-f(x)+1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=F(x)-f(x)$ este concavă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1 x\cdot f\left(x^2\right)dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\sqrt{x+1}=5-x$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$. Să se calculeze $f(0)+f(1)+\ldots+f(5)$.

5p **3.** Să se determine mulțimea valorilor reale ale numărului x pentru care $-4\le 3x+2\le 4$.

5p **4.** Să se calculeze distanța dintre punctele de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+2x+8$ cu axa Ox.

5p **5.** Dacă $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CB}=\vec{0}$, să se determine valoarea raportului $\frac{AB}{BC}$.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului ABC, știind că $AB=6$, $AC=8$ și $BC=10$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&3&4\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și funcția $f:\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(X)=X^2-3X+I_3$, unde $X^2=X\cdot X$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(I_3+B)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $f(A)=I_3+B$.

5p **c)** Să se arate că $(f(A))^3=I_3+3B+3B^2$, unde $(f(A))^3=f(A)\cdot f(A)\cdot f(A)$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x*y=x+y-3$ și $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$.

5p **a)** Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $x\circ x=x*x$.

5p **b)** Să se determine numărul întreg a care are proprietatea că $x\circ a=3$, oricare ar fi numărul întreg x.

5p **c)** Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases}x*(y+1)=4\\(x-y)\circ 1=5\end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se arate că $f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)\ge 8$, oricare ar fi $x>1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3^x+3^{-x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=3^{-x}$.

5p **c)** Să se arate că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $(-\infty,0]$ și convexă pe $[0,+\infty)$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul real x, știind că $x-3,\ 4,\ x+3$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Să se calculeze distanța dintre punctele de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-8x+7$ cu axa Ox.

5p **3.** Să se arate că $E=\sqrt{1+3+5+\ldots+21}$ este număr natural.

5p **4.** Să se determine câte numere naturale de câte trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(-1,2)$. Să se determine coordonatele punctului $C\in(AB)$ astfel încât $\frac{CA}{CB}=2$.

5p **6.** În triunghiul ABC măsura unghiului C este egală cu $60°$, $AB=4$ și $BC=2$. Să se calculeze $\sin A$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-3b^2=1\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

5p **a)** Să se verifice că $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\in G$ și $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\notin G$.

5p **b)** Să se arate că pentru orice două matrice $A,B\in G$ are loc egalitatea $A\cdot B=B\cdot A$.

5p **c)** Să se demonstreze că inversa oricărei matrice din G aparține mulțimii G.

2. Se consideră polinomul $f=mX^3+11X^2+7X+m$, $f\in\mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $g=X-1$.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{Q}$ astfel încât $f\left(\sqrt{2}\right)\in\mathbb{Q}$.

5p **c)** Pentru $m=-9$ să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului f.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-e\ln x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x),\ x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

5p **c)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției *f*.

2. Se consideră funcția $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_2^e\left(f(x)-\dfrac{1}{x-1}\right)dx$.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $[2;+\infty)$.

5p **c)** Să se determine a real, $a>2$ astfel încât aria suprafeței plane, mărginite de graficul funcției *f*, axa Ox și dreptele de ecuații $x=2$ și $x=a$, să fie egală cu $\ln 3$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul întreg x care verifică inegalitățile $3 \le \frac{2x-1}{2} \le 4$.

5p **2.** Să se determine coordonatele punctului de intersecție a dreptei de ecuație $y=-4$ cu graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+5$.

5p **3.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2(x-3)=0$.

5p **4.** Să se determine câte numere de două cifre se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{OA}(2,-1)$ și $\overrightarrow{OB}(1,2)$. Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}$, unde M este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Să se calculeze $\sin 120°$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(7,4)$, $B(a,a)$ și $C(3,-2)$ unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=0$ să se calculeze aria triunghiului ABC.

5p **b)** Pentru $a=-2$ să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele B și C.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$, astfel încât punctele B, C și $M(x,-2)$ sunt coliniare, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^4+aX^3+(a+3)X^2+6X-4$ care are rădăcinile x_1,x_2,x_3,x_4.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $x_1+x_2+x_3+x_4=3$.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât polinomul să fie divizibil cu $X-\sqrt{2}$.

5p **c)** Pentru $a=-3$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2-2x+1\right)e^x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem ale funcției *f*.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{f'(x)}{f(x)}-1\right)$.

2. Se consideră funcțiile $f,F:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$ și $F(x)=(x+1)\ln x-x+1$.

5p **a)** Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^2 f\left(e^x\right)dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_1^2 f(x)F(x)dxt=\frac{(3\ln 2-1)^2}{2}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze suma $1+3+5+...+19$.

5p **2.** Să se demonstreze că ecuația $x^2-2x+1+a^2=0$ nu admite soluții reale, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}^*$.

5p **3.** Să se determine valorile reale ale lui m, știind că valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+m-1$ este egală cu $-\frac{1}{4}$.

5p **4.** Să se ordoneze crescător numerele $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$, 64 și $\sqrt[3]{8}$.

5p **5.** Fie ABC un triunghi echilateral înscris într-un cerc de centru O. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AO}$.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului ABC, știind că $AB=\sqrt{3}$, $AC=3$ și măsura unghiului A este egală cu $120°$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x-2y+3z=-3 \\ 2x+y+z=4 \\ mx-y+4z=1 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $(2,1,-1)$ să fie o soluție sistemului.

5p **b)** Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ m & -1 & 4 \end{vmatrix}=m^2-3m$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Pentru $m=-5$ să se rezolve sistemul de ecuații.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-(m+1)X^2-3X+3$, $f\in\mathbb{Q}[X]$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{Q}$ astfel încât suma rădăcinilor polinomului f să fie egală cu 1.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{Q}$ astfel încât polinomul f să admită rădăcina $x_1=\sqrt{3}$.

5p **c)** Pentru $m=0$ să se descompună polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^4}{4}-\ln x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se determine punctul de extrem al funcției *f*.

5p **c)** Să se demonstreze că $\ln\sqrt{x}\le\frac{x^2-1}{4}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Fie $I_n=\int_1^2 x^n e^x dx$, pentru $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se calculeze I_0.

5p **b)** Să se arate că $I_1=e^2$.

5p **c)** Să se demonstreze că $(n+1)I_n+I_{n+1}=e\left(2^{n+1}e-1\right)$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\lg 20 + \lg 3 - \lg 6$.

5p **2.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr natural de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.

5p **3.** Să se determine mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{7-x} = 1$.

5p **4.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$, știind că soluțiile x_1, x_2 ale ecuației $x^2 - (2m+1)x + 3m = 0$ verifică relația $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 11$.

5p **5.** Să se demonstreze că, în orice triunghi dreptunghic *ABC* de arie *S* și ipotenuză de lungime a, este adevărată identitatea $a^2 \sin B \sin C = 2S$.

5p **6.** Să se calculeze $\sin 170^\circ - \sin 10^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+az=1 \\ x+4y+a^2z=1 \end{cases}$ și matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A(4))$.

5p **b)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ să se rezolve sistemul.

2. Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 - aX - 4$, $f \in \mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 = -2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile reale ale polinomului f.

5p **b)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $X^2 - 2$.

5p **c)** Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ pentru care polinomul f are o rădăcină rațională pozitivă.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $f(x) \geq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Să se scrie ecuația asimptotei oblice către $-\infty$ la graficul funcției *f*.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$, unde $m, n, p \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $m = 0, n = -3, p = 2$, să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se determine $m, n, p \in \mathbb{R}$, știind că $f'(-1) = f'(1) = 0$ și $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 4$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^4} \int_0^x f(t)dt$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_3 = 5$ și $a_6 = 11$. Să se calculeze a_9.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2 + x$. Să se calculeze $f(1) + f(2) + \ldots + f(20)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x+2} = 2^{x^2+5}$.

5p **4.** Să se rezolve ecuația $C_{n+2}^{n+1} = 2$, unde $n \in \mathbb{N}$.

5p **5.** Să se determine numărul real *m* pentru care vectorii $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{w} = -\vec{i} + m\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Să se calculeze $\cos 30° + \cos 60° + \cos 120° + \cos 150°$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, unde $a,b \in \mathbb{Z}$. Se notează $A^2 = A \cdot A$.

5p **a)** Să se calculeze A^2.

5p **b)** Să se verifice că $A^2 = aI_2 + bA$.

5p **c)** Știind că $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ și $AX = XA$, să se arate că există $m,n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $X = mI_2 + nA$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 - X - 1$, unde $a \in \mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se determine a știind că $x = 1$ este rădăcină a polinomului f.

5p **b)** Pentru $a = 1$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$.

5p **a)** Să se calculeze derivata funcției f.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Să se arate că $e^{x^2} + e^x \geq x^2 + x + 2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \ln x$ și $g(x) = x\ln x$.

5p **a)** Să se arate că g este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^e f(x)\cdot g(x)\,dx$.

5p **c)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine elementele mulțimii $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,|2x-1|\le 1\right\}$.

5p **2.** Se consideră ecuația $x^2+3x-5=0$ cu soluțiile x_1 și x_2. Să se calculeze $x_1^2+x_2^2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-25}=12$.

5p **4.** Să se calculeze $C_4^0-C_4^1+C_4^2-C_4^3+C_4^4$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(5,6)$ și $C(-1,1)$. Să se determine ecuația medianei duse din vârful C al triunghiului ABC.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului MNP dacă $MN=6$, $NP=4$ și $m(\sphericalangle MNP)=30^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se verifice că $AB-2B=O_2$.

5p **c)** Să se arate că dacă $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $A\cdot X\cdot B=O_2$, atunci suma elementelor matricei X este egală cu zero.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_2[X]$, $f=X^2+\hat{1}$ și $g=X+\hat{1}$ și mulțimea $H=\left\{a+bX+cX^2\,\middle|\,a,b,c\in\mathbb{Z}_2\right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $g^2=f$.

5p **b)** Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $f+g$ la polinomul f.

5p **c)** Să se determine numărul elementelor mulțimii H.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0;+\infty)$.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{1004}+2009^x$.

5p **a)** Să se determine $\int f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1 x\cdot f\left(x^2\right)dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine cea mai mică valoare a funcției $f:[-2,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+...+f(6)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x+5)=\log_2(x^2+3x+3)$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând unul dintre numerele C_4^2, C_5^2 și C_4^3, acesta să fie divizibil cu 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(1,5)$ și $C(4,2)$. Să se calculeze distanța de la punctul A la mijlocul segmentului BC.

5p **6.** Se calculeze $\sin 60^\circ - \cos 30^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $M=\{aI_2+bV \mid a,b\in\mathbb{R}\}$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $V=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că $I_2\in M$.

5p **b)** Să se arate că dacă $A\in M$ și A este matrice inversabilă, atunci $a\neq 0$.

5p **c)** Știind că $A,B\in M$, să se arate că $AB\in M$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x*y=xy-5(x+y)+30$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x*y=(x-5)(y-5)+5$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Știind că legea de compoziție „$*$” este asociativă, să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x*x=x$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{e}\cdot e^x-1, & x\le 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$.

5p **a)** Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=1$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se arate că funcția f este concavă pe $(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$.

5p **a)** Să se determine $\int (x^2+1)\cdot f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se verifice că $\int_0^1 f(x)\,dx=\ln(2e)$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 f'(x)\cdot e^{f(x)}dx=e(e-1)$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $C_5^2 - A_4^2 + 6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$. Să se calculeze $f(-6)+f(0)+f(6)+f(12)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2-1)=1$.

5p **4.** Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x^2+2x-7=y \end{cases}$, unde $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$.

5p **5.** Să se determine numerele reale *m* și *n* pentru care punctele $A(3,-1)$ și $B(1,1)$ se află pe dreapta de ecuație $x+my+n=0$.

5p **6.** Să se calculeze $\left(\cos 150^\circ+\cos 30^\circ\right)\left(\sin 120^\circ-\sin 60^\circ\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ notăm cu A^t transpusa matricei A.

5p **a)** Să se calculeze $I_2+(I_2)^t$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se demonstreze că pentru orice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $m\in\mathbb{R}$ are loc relația $(mA)^t=mA^t$.

5p **c)** Să se determine matricele $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A+A^t=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x*y=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}$.

5p **a)** Să se rezolve ecuația $x*x=x$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **c)** Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$.

5p **a)** Să se arate că $f(1)-f'(1)=1$.

5p **b)** Să se determine punctul de extrem al funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x}{x}$

2. Se consideră integralele $I=\int_0^1 \dfrac{e^x}{x+1}\,dx$ și $J=\int_0^1 \dfrac{xe^x}{x+1}\,dx$.

5p **a)** Să se verifice că $I+J=e-1$.

5p **b)** Utilizând, eventual, inegalitatea $e^x\geq x+1$, adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$, să se arate că $J\geq\dfrac{1}{2}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $I=\dfrac{e-2}{2}+\int_0^1 \dfrac{e^x}{(x+1)^2}\,dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze suma $1+2+2^2+2^3+...+2^7$.

5p **2.** Să se arate că $(x-1)(x-2)>x-3$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x+3}=x$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element n din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$, acesta să verifice inegalitatea $n^2\le 2^n$.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care dreptele $d_1:-2x-my+3=0$ şi $d_2:mx+y-5=0$ sunt paralele.

5p **6.** Să se calculeze $\sin 30^\circ-\cos 45^\circ+\sin 60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+ay+a^2z=a \\ x+by+b^2z=b \\ x+cy+c^2z=c \end{cases}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$, sunt distincte două câte două.

5p **a)** Să se rezolve sistemul pentru $a=0$, $b=1$ şi $c=2$.

5p **b)** Să se verifice că $\det(A)=(a-b)(b-c)(c-a)$, unde A este matricea asociată sistemului.

5p **c)** Să se demonstreze că soluția sistemului nu depinde de numerele reale a, b şi c.

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x*y=x+y+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Să se arate că legea de compoziție "$*$" este asociativă.

5p **b)** Să se determine m astfel încât $e=-6$ să fie elementul neutru al legii "$*$".

5p **c)** Să se determine m astfel încât $\left(-\sqrt{3}\right)*\left(-\sqrt{2}\right)*m*\sqrt{3}=3\sqrt{2}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+e^x$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f'(x)-f''(x)+f(x)=e^x-3$.

2. Pentru orice număr natural n se consideră $I_n=\int_0^1 x(1+x)^n\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Utilizând faptul că $(1+x)^n\le(1+x)^{n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$ şi $x\in[0,1]$, să se arate că $I_{2009}\ge I_{2008}$.

5p **c)** Folosind, eventual, identitatea $x(1+x)^n=(1+x)^{n+1}-(1+x)^n$, adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}$ şi $x\in\mathbb{R}$, să se arate că $I_n=\dfrac{n\cdot 2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1=1$ și $a_5=13$. Să se calculeze a_{2009}.

5p **2.** Ecuația $x^2+mx+2=0$ are soluțiile x_1 și x_2. Să se determine valorile reale ale lui *m* pentru care $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=5$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2-x}=4$.

5p **4.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(m^2-1\right)x+m+1$. Să se arate că $f(1)\geq -\frac{1}{4}$, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

5p **5.** În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele *A*(−1,−1), *B*(2,3) și *C*(3,1). Să se determine coordonatele punctului *D* astfel încât patrulaterul *ABDC* să fie paralelogram.

5p **6.** Să se calculeze $\cos 80^\circ+\cos 100^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}=\left\{A(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-b\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$ și matricea $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei $A(1,1)$.

5p **b)** Să se demonstreze că dacă $A,B\in\mathcal{M}$, atunci $A+B\in\mathcal{M}$.

5p **c)** Să se arate că $\det\left(I_2-A(0,b)\right)\neq 0$, oricare ar fi $b\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră inelul de polinoame $\mathbb{Z}_3[X]$.

5p **a)** Pentru $g\in\mathbb{Z}_3[X]$, $g=\left(X+\hat{2}\right)^2\left(X+\hat{1}\right)$, să se calculeze $g\left(\hat{0}\right)$.

5p **b)** Dacă $f\in\mathbb{Z}_3[X]$, $f=X^3+\hat{2}X$, să se arate că $f(x)=\hat{0}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}_3$.

5p **c)** Să se determine toate polinoamele $h\in\mathbb{Z}_3[X]$, care au gradul egal cu 3 și pentru care $h\left(\hat{0}\right)=h\left(\hat{1}\right)=h\left(\hat{2}\right)=\hat{0}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\ln x$.

5p **a)** Să se arate că $f'(x)=x(2\ln x+1)$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{x\ln x}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x)\geq -\frac{1}{2e}$, pentru orice $x>0$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Să se determine $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx$.

5p **b)** Să se arate că $\int_0^1 f''(x)\,dx=2e-1$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^2 \dfrac{f\left(x^2\right)}{x}\,dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine rația unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_{10}-a_2=16$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$. Să se calculeze $f(2)+f\left(2^2\right)+...+f\left(2^7\right)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1}=x-1$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element *n* al mulțimii $\{1,2,3,4\}$, acesta să verifice inegalitatea $n!\geq n^2$.

5p **5.** Să se calculeze distanța de la punctul *O*(0,0) la punctul de intersecție a dreptelor $d_1:2x-y-2=0$ și $d_2:x+3y-8=0$.

5p **6.** Să se verifice că în orice triunghi dreptunghic ABC, de ipotenuză *BC*, are loc relația $\sin^2 B+\sin^2 C=1$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră punctele $A_n\left(n,n^2\right)$, unde $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se determine ecuația dreptei A_0A_1.

5p **b)** Să se calculeze aria triunghiului $A_0A_1A_2$.

5p **c)** Să se arate că pentru orice $m,n,p\in\mathbb{N}$, distincte două câte două, aria triunghiului $A_mA_nA_p$ este un număr natural.

2. Se consideră polinomul $f=4X^4+4mX^3+\left(m^2+7\right)X^2+4mX+4$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ știind că $x=1$ este rădăcină a polinomului f.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ știind că suma rădăcinilor polinomului f este egală cu 0.

5p **c)** Pentru $m=-5$ să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x)=0$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{1}{e^x}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(0)+f'(0)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)+f'(x)}{x}$.

5p **c)** Să se arate că funcția f este concavă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x$, $g(x)=1-x+x^2-x^3+...+x^{2008}-x^{2009}$.

5p **a)** Să se determine mulțimea primitivelor funcției *f*.

5p **b)** Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției f.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1(x+1)g(x)\,dx<1$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1=2$ şi $a_2=4$. Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai progresiei.

5p **2.** Să se determine funcția de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-(2m+1)x+3$, $m\in\mathbb{R}$, al cărei grafic are abscisa vârfului egală cu $\frac{7}{2}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x-1}=3^{5-x}$.

5p **4.** Să se calculeze $A_5^2-P_3$.

5p **5.** Să se determine numărul real *m* pentru care punctul *A*(2,3) se află pe dreapta $d: 2x-y+m=0$.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului *MNP* știind că $MN=4$, $NP=6$ şi $m(\sphericalangle MNP)=45^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\middle|\ a,b,c\in\mathbb{Z}\right\}$.

5p **a)** Dacă $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, să se calculeze AB.

5p **b)** Să se demonstreze că pentru oricare $X,Y\in\mathcal{M}$, rezultă că $XY\in\mathcal{M}$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $U\in\mathcal{M}$ şi $VU=UV$, pentru orice $V\in\mathcal{M}$, atunci există $p\in\mathbb{Z}$ astfel încât $U=\begin{pmatrix}1 & 0 & p\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=\left(X^2-2X+1\right)^2-a^2$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Știind că $a=0$ să se determine soluțiile ecuației $f(x)=0$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{2e^x}{x+e^x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{2e^x(1-x)}{\left(x+e^x\right)^2}$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se arate că $-1\leq f(x)\leq\frac{1-e}{1+e}$, oricare ar fi $x\geq 0$.

2. Pentru orice număr natural nenul *n* se consideră, $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+1}\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Utilizând, eventual, inegalitatea $\frac{x^n}{2}\leq\frac{x^n}{x+1}\leq x^n$, adevărată pentru orice $x\in[0,1]$ şi $n\in\mathbb{N}^*$, să se demonstreze că $\frac{1}{2}\leq 2010\cdot I_{2009}\leq 1$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $(2x-1)^2 \le 9$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$. Să se calculeze $f(0)+f(1)+f(2)+...+f(10)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2+4)=\log_2(x+4)$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând unul dintre numerele P_3, A_3^1 și C_4^3, acesta să fie divizibil cu 3.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele $A(2,-3)$ și $B(-3,2)$.

5p **6.** Să se determine aria unui triunghi ABC în care $AB=5$, $AC=6$ și $m(\sphericalangle BAC)=60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\middle| a,b,c,d\in\mathbb{R}^*\right\}$ și matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Se notează cu X^t transpusa matricei X.

5p **a)** Să se calculeze $A^t\cdot A$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice matrice $X=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}$, are loc egalitatea $\det\left(X\cdot X^t\right)=(ad-bc)^2$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice matrice $X=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\in\mathcal{M}$ cu $\det\left(X\cdot X^t\right)=0$, are loc relația $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale, se consideră legea de compoziție definită prin $x\circ y=xy-x-y+2$.

5p **a)** Să se arate că legea "$\circ$" este asociativă.

5p **b)** Să se arate că, pentru oricare $x,y\in(1,+\infty)$, rezultă că $x\circ y\in(1,+\infty)$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{Z}$ cu proprietatea că $x\circ a=a$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+2x+3)e^x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f' este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcțiile $f,\ g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x\ln x$ și $g(x)=2x+\ln x+1$.

5p **a)** Să se arate că f este o primitivă a funcției *g*.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^e f(x)g(x)\,dx$.

5p **c)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\log_5 10+\log_5 3-\log_5 6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+...+f(6)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x^2-x}=5^{5x-5}$.

5p **4.** După două scumpiri succesive cu 10%, respectiv cu 20%, prețul unui produs este de 660 lei. Să se determine prețul inițial al produsului.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-1)$ și $B(-2,2)$. Să se determine distanța dintre punctele A și B.

5p **6.** În triunghiul MNP se cunosc $MN = 3$, $MP = 5$ și $m(\sphericalangle M)=60°$. Să se calculeze lungimea laturii NP.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie funcția $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definită prin $f(A)=A+A^t$, unde A^t este transpusa matricei A.

5p **a)** Să se calculeze $f(I_2)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $(A+B)^t=A^t+B^t$, oricare ar fi $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se determine matricele $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $\det A=1$ și $f(A)=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

2. Se consideră ecuația $x^4-ax^3-ax+1=0$ cu soluțiile x_1,x_2,x_3,x_4, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $x_1+x_2+x_3+x_4=5$.

5p **b)** Pentru $a=1$, să se determine soluțiile reale ale ecuației.

5p **c)** Să se determine valorile întregi ale lui a pentru care ecuația admite cel puțin o soluție număr întreg.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x}-3x$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{3\sqrt{x}-6}{2}$, pentru orice $x\in(0;+\infty)$.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Să e demonstreze că $-4\le f(x)+f\left(x^2\right)\le 0$, pentru orice $x\in(0;1]$.

2. Se consideră funcțiile $f, F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+3x^2+2$ și $F(x)=e^x+x^3+2x-1$.

5p **a)** Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\cdot F(x)\,dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_0^1 \left(xf(x)+F(x)\right)dx=F(1)$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numerele reale a şi b pentru care $(a-3)^2+(b+2)^2=0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5-x$. Să se calculeze $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(5)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(3x-1)=\log_3(2x+1)$.

5p **4.** Să se demonstreze că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2mx+m^2+1$ este situată deasupra axei Ox, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(2,3)$ şi $C(3,m)$. Să se determine numărul real m pentru care punctele A, B şi C sunt coliniare.

5p **6.** Raza cercului circumscris triunghiului ABC are lungimea de 3 şi $AC=6$. Să se calculeze $\sin B$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ şi matricele $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că $B^2=3B$, unde $B^2=B\cdot B$.

5p **b)** Să se arate că $mI_3+nB\in G$, oricare ar fi $m,n\in\mathbb{Z}$.

5p **c)** Să se arate că dacă $A\in G$ şi $A^2=O_3$, atunci $A=O_3$, unde $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ şi $A^2=A\cdot A$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-12X^2+35$, $f\in\mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se arate că $f=\left(X^2-6\right)^2-1$.

5p **b)** Să se demonstreze că polinomul f nu are rădăcini întregi.

5p **c)** Să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2-3x-3\right)e^x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se arate că tangenta la graficul funcției f, dusă în punctul de coordonate $(-2,f(-2))$, este paralelă cu axa Ox.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată prin $f(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ e^x+1, & x\geq 0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_0^1 x f\left(x^2\right)dx=\frac{e}{2}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $2^{x^2}=16$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2-x$. Să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(10)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-x-2}=x-2$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $\{3,4,5,6\}$, acesta să verifice inegalitatea $n(n-1)\geq 20$.

5p **5.** Să se determine coordonatele simetricului punctului $A(2,-4)$ față de punctul $B(1,-2)$.

5p **6.** Să se calculeze $\sin^2 80^\circ+\sin^2 10^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $F=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine numerele a,b și c astfel încât $A+F=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&2&5\\0&0&2\end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se arate că pentru $a=c=0$ și $b=-1$ matricea A este inversa matricei F.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $F\cdot X=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$, unde $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x*y=2xy-x-y+1$.

5p **a)** Să se arate că $x*y=xy+(1-x)(1-y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x*(1-x)=0$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-\ln x}{x+\ln x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

5p **b)** Să se arate că $f'(x)=\dfrac{2(\ln x-1)}{(x+\ln x)^2}$, oricare ar fi $x\in[1,+\infty)$.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției $g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{f'(x)}{(f(x)+1)^2}$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x^2+1)$ și $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

5p **a)** Să se verifice că $\int_0^1 f'(x)\,dx=\ln 2$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\int g(x)\,dx=f(x)+C$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^2 \dfrac{g(x)}{f^2(x)}\,dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ în care $b_1 = 2$ şi $b_2 = 6$. Să se calculeze b_5.

5p **2.** Să se determine numerele reale *m* pentru care minimul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx + 2$ este egal cu $-\frac{1}{4}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x-5} = 3^{x^2-8}$.

5p **4.** Să se rezolve ecuația $C_n^2 = 21$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1,1)$ şi are panta egală cu 1.

5p **6.** În triunghiul *ABC* se cunosc $AB = AC = 6$ şi $BC = 6\sqrt{3}$. Să se calculeze $\cos B$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+3y+2z=b \\ x-2y+az=5 \\ x+y+4z=4 \end{cases}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.

5p **b)** Pentru $a=-1$ şi $b=2$ să se rezolve sistemul.

5p **c)** Să se determine numărul real b, ştiind că (x_0,y_0,z_0) este soluție a sistemului şi că $x_0+y_0+z_0=4$.

2. Se consideră polinoamele $f = X^2 - 12X + 35$ şi $g = (X-6)^{2009} + X - 6$. Polinomul g are forma algebrică $g = a_{2009}X^{2009} + a_{2008}X^{2008} + ... + a_1X + a_0$, cu $a_0, a_1, ..., a_{2009}\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(5) + g(5)$.

5p **b)** Să se arate că numărul $a_0 + a_1 + ... + a_{2009}$ este negativ.

5p **c)** Să se determine restul împărțirii polinomului *g* la polinomul *f*.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

5p **a)** Să se arate că $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Ştiind că $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, să se determine

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)+g\left(x^2\right)+g\left(x^3\right)+\ldots+g\left(x^{2009}\right)+x^{2010}}{x^{2009}}.$$

2. Se consideră $I_n = \int_e^{e^2} x\ln^n x\,dx$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se calculeze I_0.

5p **b)** Să se arate că $I_n \leq I_{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

5p **c)** Să se demonstreze că are loc relația $I_n = \frac{e^2\left(e^2\cdot 2^n - 1\right)}{2} - \frac{n}{2}I_{n-1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\log_2 4+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-\sqrt[3]{8}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-2x$. Să se calculeze $f(0)+f(1)+f(2)+...+f(6)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{169-x^2}=12$.

5p **4.** Câte numere formate din 3 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{1,2,3,4\}$?

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$, $B(1,1)$, $C(3,-1)$. Să se calculeze lungimea medianei duse din vârful A al triunghiului ABC.

5p **6.** Să se calculeze aria unui triunghi dreptunghic care are un unghi de $60°$ şi ipotenuza de lungime 8.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\middle|\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ şi matricea $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $I_2\in\mathcal{M}$.

5p **b)** Ştiind că $A, B\in\mathcal{M}$, să se arate că $A+B\in\mathcal{M}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\det(AB-BA)\geq 0$, oricare ar fi $A, B\in\mathcal{M}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x*y=-xy+2x+2y-2$.

5p **a)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x*4=10$.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*a=a*x=a$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Ştiind că legea „$*$” este asociativă, să se calculeze $\frac{1}{2009}*\frac{2}{2009}*\ldots*\frac{4018}{2009}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-x+1$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in(0;+\infty)$.

5p **b)** Să se determine punctul de extrem al funcției f.

5p **c)** Să se arate că $2-e\leq f(2)\leq 0$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\geq 1 \\ -x+1, & x<1 \end{cases}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^2 f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se determine $a\in(0,1)$ astfel încât $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=1$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1 xf\left(e^x\right)dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se formeze o ecuație de gradul al doilea, știind că aceasta are soluțiile $x_1 = 2$ și $x_2 = 3$.

5p **2.** Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x^2 - 2x + y = 0 \end{cases}$, unde $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(9 - x^2) = 1$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element n al mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4\}$, acesta să verifice inegalitatea $n! < 5$.

5p **5.** Să se calculeze $\dfrac{\sin 135^\circ}{\cos 45^\circ}$.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului ABC în care $AB = 8, AC = 4$ și $m(\sphericalangle BAC) = 45^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + 4y + 4z = 15 \\ 3x + (a+4)y + 5z = 22 \\ 3x + 2y + (3-a)z = 16 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a = 1$ să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.

5p **b)** Să se arate că tripletul $(7,1,1)$ nu poate fi soluție a sistemului, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Să se determine soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $y_0 + z_0 = 3$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră legile de compoziție $x \perp y = x + y + 1$, $x \circ y = ax + by - 1$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$ și funcția $f(x) = x + 2$. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$,

5p **a)** Să se demonstreze că $x \perp (-1) = (-1) \perp x = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.

5p **b)** Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}$ pentru care legea de compoziție „$\circ$” este asociativă.

5p **c)** Dacă $a = b = 1$ să se arate că funcția f este morfism între grupurile $(\mathbb{Z}, \perp)$ și $(\mathbb{Z}, \circ)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x \in (0, +\infty)$.

5p **b)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1;0)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{x}$.

2. Se consideră funcțiile $f, F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ și $F(x) = x - \ln x$.

5p **a)** Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^2 F(x) \cdot f(x)\, dx$.

5p **c)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției F, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine soluțiile reale ale inecuației $x^2-9\le 0$.

5p **2.** Să se arate că punctul $A\left(\frac{2010}{2009},2\right)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2009x-2008$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x-4\cdot 3^x+3=0$.

5p **4.** Să se determine numărul real x, știind că șirul $1, 2x+1, 9, 13,\ldots$ este progresie aritmetică.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,2)$ şi $N(2,1)$. Să se determine ecuația dreptei MN.

5p **6.** Să se calculeze $\mathrm{tg}^2 30^\circ+\mathrm{ctg}^2 45^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=3 \\ x-y+2z=a \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.

5p **b)** Pentru $a=0$ să se rezolve sistemul.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât soluția sistemului să verifice relația $x=y+z$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3-2X^2+aX-8$.

5p **a)** Să se determine numărul real a astfel încât o rădăcină a polinomului f să fie egală cu 2.

5p **b)** Pentru $a=4$ să se determine câtul şi restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X^2-2X+4$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $a\in(2,+\infty)$, atunci f nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(1;+\infty)$

5p **b)** Să se verifice că $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-1$.

5p **c)** Să se arate că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{x}$ şi $g(x)=\frac{1}{4}\cdot\ln x$.

5p **a)** Să se arate că $\int_1^4 f(x)\,dx=\ln 4+2$.

5p **b)** Să se verifice că $\int_1^4 g(x)\,dx=\ln 4-\frac{3}{4}$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^e f\left(x^2\right)\cdot g\left(x^2\right)dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1 = 6$ și $a_2 = 5$. Să se calculeze a_7.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$. Să se rezolve inecuația $f(x) \leq 12$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 6\cdot 2^x + 8 = 0$.

5p **4.** Câte numere formate din 4 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $A = \{1,2,3,4,5\}$?

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-1)$, $B(1,1)$ și $C(0,-2)$. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic în A.

5p **6.** Să se calculeze $\cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 160^\circ + \cos 170^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că $A^2 = 2I_2$, unde $A^2 = A\cdot A$.

5p **b)** Să se determine x real astfel încât $\det(A - xI_2) = 0$.

5p **c)** Să se demonstreze că $A^4 \cdot X = X \cdot A^4$, pentru orice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, unde $A^4 = A\cdot A\cdot A\cdot A$.

2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ a + b\sqrt{2} \;\middle|\; a,b\in\mathbb{Z},\ a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $3 + 2\sqrt{2} \in G$.

5p **b)** Să se demonstreze că $x\cdot y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.

5p **c)** Să se arate că orice element din mulțimea G are invers în G în raport cu înmulțirea numerelor reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^{2010} + 2010^x$.

5p **a)** Să se determine $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x}$.

2. Se consideră funcțiile $f, g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2+1)}$ și $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $\int_1^e g(x)\,dx = 1$.

5p **b)** Folosind identitatea $f(x) = g(x) - \dfrac{x}{x^2+1}$, adevărată pentru orice $x>0$, să se calculeze $\int_1^e f(x)\,dx$.

5p **c)** Utilizând inegalitatea $f(x) \leq \dfrac{1}{2x^2}$, adevărată pentru orice $x\in[1,e]$, să se arate că $\ln\dfrac{e^2+1}{2} \geq \dfrac{e+1}{e}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine soluțiile reale ale sistemului $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+5$. Să se calculeze $f(2)+f\left(2^2\right)+...+f\left(2^5\right)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x^2+3x-2}=8$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element *n* al mulțimii $\{2,3,4,5\}$, acesta să verifice inegalitatea $n^2+n>n!$.

5p **5.** În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $A(2,-1)$ și $B(-2,a)$, $a\in\mathbb{R}$. Să se determine numărul real *a* astfel încât dreapta *AB* să conțină punctul $O(0,0)$.

5p **6.** Să se calculeze $\cos x$, știind că $\sin x=\frac{3}{5}$ și măsura unui unghi ascuțit.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$ și matricea $O_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $O_3\in\mathcal{M}$.

5p **b)** Să se demonstreze că produsul a două matrice din $\mathcal{M}$ este o matrice din $\mathcal{M}$.

5p **c)** Știind că $A\in\mathcal{M}$ și $\det(A)=0$, să se demonstreze că $A^3=O_3$, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-X^3+aX^2+bX+c$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=c=1$ și $b=-1$ să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la X^2+1.

5p **b)** Să se determine numerele *a, b, c* știind că restul împărțirii polinomului f la X^2+1 este X, iar restul împărțirii polinomului f la $X-1$ este -1.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $a\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$, atunci f nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **b)** Să se arate că $f'(x)=\frac{2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ avem $\frac{2}{3}\le f\left(x^4\right)+f\left(x^2\right)\le 2$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{1}{x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^e f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Să se demonstreze că volumele corpurilor obținute prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficelor funcțiilor $g,h:[1,e]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ și $h(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ sunt egale.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_2 = 5$ şi $r = 3$. Să se calculeze a_8.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x+2$. Să se calculeze suma $f(3)+f\left(3^2\right)+\ldots+f\left(3^5\right)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x+1) = 1$.

5p **4.** Să se calculeze numărul submulțimilor cu 2 elemente ale unei mulțimi care are 6 elemente.

5p **5.** Să se determine coordonatele mijlocului segmentului AB, ştiind că $A(5,-4)$ şi $B(-3,6)$.

5p **6.** Să se calculeze $\sin^2 150^\circ + \cos^2 30^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se notează cu A^t transpusa matricei A.

5p **a)** Ştiind că $ad = 4$ şi $bc = 3$, să se calculeze $\det(A)$

5p **b)** Să se calculeze $A\cdot A^t$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă suma elementelor matricei $A\cdot A^t$ este egală cu 0, atunci $\det(A) = 0$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + 2X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

5p **a)** Să se calculeze suma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

5p **b)** Să se determine rădăcinile polinomului f ştiind că $a = -1$, $b = -2$ şi $c = 0$.

5p **c)** Ştiind că rădăcinile polinomului f sunt în progresie aritmetică, să se demonstreze că $b = a-1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + e^x$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(0) = 1$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{e^x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$.

5p **a)** Să se verifice că $\int_0^1 f(x)\,dx = e - \dfrac{3}{2}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 x f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se arate că dacă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, atunci $\int_e^{e^2} \dfrac{f(\ln x)}{x}\,dx = F(2) - F(1)$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+4x-5$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x-4$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+...+f(10)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(10-x)=2$.

5p **4.** Să se rezolve ecuația $A_n^2=12,\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(5,2)$ și $C(3,-1)$. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

5p **6.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $A=\{\sin 30^\circ, \sin 45^\circ, \sin 60^\circ\}$, acesta să fie număr rațional.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se notează $A^2=A\cdot A$.

5p **a)** Să se calculeze A^2.

5p **b)** Să se verifice că $A^2=(a+d)A-(ad-bc)I_2$.

5p **c)** Știind că $a+d\neq 0$ și $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $A^2M=MA^2$, să se demonstreze că $AM=MA$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X],\ f=X^3-2X^2+aX+b$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

5p **a)** Pentru $a=1$ și $b=0$ să se determine x_1, x_2, x_3.

5p **b)** Știind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2$, să se arate că $a=1$.

5p **c)** Știind că $f=(X-x_1^2)(X-x_2^2)(X-x_3^2)$, să se determine numerele reale a și b.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-1)e^x$ și $g(x)=xe^x$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=g(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției g.

5p **c)** Dacă $I\subset\mathbb{R}$ este un interval, să se demonstreze că funcția g este crescătoare pe I dacă și numai dacă funcția f este convexă pe I.

2. Se consideră funcțiile $f, g:[1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ și $g(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este o primitivă a funcției g.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^e f(x)\,g(x)\,dx$.

5p **c)** Să se determine numărul real $a\in(1;+\infty)$ astfel încât $\int_1^a f(x)\,dx=2$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ în care $b_1=1$ şi $b_2=3$. Să se calculeze b_4.

5p **2.** Ecuația $x^2-x+m=0$ are soluțiile x_1 şi x_2. Să se determine numărul real *m* pentru care $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=-\frac{3}{4}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x-2}=0$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element *n* al mulțimii $\{1,2,3,4\}$, acesta să verifice inegalitatea $3^n>n^3$.

5p **5.** În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $A(5,-1)$ şi $B(3,1)$. Să se determine coordonatele simetricului punctului *A* față de punctul *B*.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului *MNP*, ştiind că *MN* = 10, *NP* = 4 şi $m(\sphericalangle MNP)=60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi mulțimea

$G=\{M(x,y)\,|\,M(x,y)=xI_2+yA,\ x,y\in\mathbb{R}\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se verifice că $A^2=O_2$, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se determine inversa matricei $M(1,1)$.

5p **c)** Să se determine matricele inversabile din mulțimea G.

2. În mulțimea $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f=X^3+pX^2+1$ cu rădăcinile x_1,x_2,x_3 şi $p\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(-p)$.

5p **b)** Să se determine $p\in\mathbb{R}$ pentru care polinomul f este divizibil cu $X-1$.

5p **c)** Să se calculeze în funcție de $p\in\mathbb{R}$ suma $x_1^4+x_2^4+x_3^4$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2-x+1, & x\in(0;1)\\ 1+\ln x, & x\geq 1\end{cases}$.

5p **a)** Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=1$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

5p **c)** Să se arate că $f(x)\geq\frac{3}{4}$, pentru orice $x>0$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$ şi $g(x)=x\ln x$.

5p **a)** Să se verifice că $\int_1^2 f(x)\,dx=2\ln 2+\frac{7}{3}$.

5p **b)** Să se arate că $\int_1^2 g(x)\,dx=2\ln 2-\frac{3}{4}$.

5p **c)** Să se arate că există $x_0\in(1;2)$ astfel încât $f(x_0)>g(x_0)+3$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1=7$ şi $a_7=37$. Să se calculeze suma primilor zece termeni ai progresiei.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=7-x$. Să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(7)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{\sqrt{x-1}}=4$.

5p **4.** Să se calculeze $C_7^5-C_6^5-C_6^4$.

5p **5.** Să se determine numărul real pozitiv *a* astfel încât distanța dintre punctele $A(2,-1)$ şi $B(-1,a)$ să fie egală cu 5.

5p **6.** Să se calculeze aria unui triunghi echilateral care are lungimea înălțimii egală cu $3\sqrt{3}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine matricea A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se demonstreze că $A^3=4A^2-5A+2I_3$, unde $A^3=A^2\cdot A$.

5p **c)** Să se determine numerele reale m,n,p astfel încât $A^{-1}=mA^2+nA+pI_3$, unde A^{-1} este inversa matricei A.

2. Se consideră numerele reale x_1, x_2, x_3 cu proprietatea că:

$x_1+x_2+x_3=2;\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{2};\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-2$.

5p **a)** Să se calculeze $x_1x_2x_3$.

5p **b)** Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$, ştiind că ecuația $x^3+ax^2+bx+c=0$ are soluțiile x_1,x_2,x_3.

5p **c)** Să se descompună polinomul $f=X^3-2X^2-2X+4$ în factori ireductibili peste $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2\ln x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x),\ x\in[1;+\infty)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\ln\frac{2010}{2009}\leq\frac{1}{2}$.

5p **c)** Folosind faptul că $1\leq x\leq x^2\leq 2$, oricare ar fi $x\in\left[1,\sqrt{2}\right]$, să se demonstreze inegalitatea $x^2-x\leq 2\ln x$, pentru orice $x\in\left[1,\sqrt{2}\right]$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ se consideră $I_n=\int_2^3\frac{x^n}{x^2-1}\,dx$.

5p **a)** Să se arate că $I_0=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

5p **b)** Să se calculeze I_1.

5p **c)** Să se demonstreze că $I_{n+2}-I_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1=3$ şi $a_3=7$. Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai progresiei.

5p **2.** Să se determine numerele reale *m* pentru care punctul $A(m,-1)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+1$.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(2x+3)=2$.

5p **4.** Să se calculeze numărul submulţimilor cu 3 elemente ale unei mulţimi care are 5 elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(1,2)$ şi $C(2,-1)$. Să se calculeze distanţa de la punctul *C* la mijlocul segmentului *AB*.

5p **6.** Triunghiul *ABC* are $AB=8$, $AC=8$ şi $m(\sphericalangle BAC)=30^\circ$. Să se calculeze aria triunghiului *ABC*.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $X=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Se notează $X^n=\underbrace{X\cdot X\cdot\ldots\cdot X}_{de\ n\ ori}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze X^2.

5p **b)** Să se determine inversa matricei X.

5p **c)** Să se determine numărul real r astfel încât $X^3=3X^2+rX+I_3$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=2^{x+y}$.

5p **a)** Să se calculeze $2009\circ(-2009)$.

5p **b)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x\circ x^2=64$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $(x\circ y)\circ z=2^{z+1}$, atunci $x=-y$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$.

5p **a)** Să se arate că $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\geq f(x)$, oricare ar fi $x\in(1;+\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,f(x)\,f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

2. Se consideră $I_n=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^n\left(x^2+1\right)}\,dx$, unde $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se verifice că $I_0+I_2=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$.

5p **b)** Utilizând identitatea $\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$ adevărată pentru orice $x\neq 0$, să se determine I_1.

5p **c)** Să se arate că $I_n+I_{n-2}<\frac{1}{n-1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze suma $1+11+21+31+...+111$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+4$. Să se determine valorile numărului real *m* pentru care punctul $A(m,4)$ aparține graficului funcției *f*.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2+x+1}=8$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element *n* al mulțimii $\{1,2,3,4\}$, acesta să verifice inegalitatea $2^n<n!$.

5p **5.** În reperul cartezian *xOy* se consideră punctul $A(m^2,m)$ şi dreapta de ecuație $d: x+y+m=0$. Să se determine valorile reale ale lui *m* pentru care punctul *A* aparține dreaptei *d*.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului *MNP*, ştiind că $MN=NP=6$ şi $m(\sphericalangle MNP)=120°$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $M_a=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(M_1+M_2)$.

5p **b)** Să se calculeze M_a^2, unde $M_a^2=M_a\cdot M_a$.

5p **c)** Să se determine matricele $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $M_aX=XM_a$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$.

5p **a)** Să se calculeze $x*0$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea „$*$” este asociativă.

5p **c)** Ştiind că $x_0\in\mathbb{Q}$ şi $x_n=x_0*x_{n-1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, să se arate că $x_3\notin\mathbb{Q}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)\ln x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in(0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

5p **c)** Să se arate că funcția f' este crescătoare pe $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f, g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}+\ln x$ şi $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}+2}{2x}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este o primitivă a funcției g.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^4 f(x)\cdot g(x)\,dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_1^4 g(x)\cdot f''(x)\,dx=-1$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine elementele mulțimii $A=\{x\in\mathbb{N}\mid 3x+2\geq 4x-1\}$.

5p **2.** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-3$ cu axele de coordonate.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-4}=2$.

5p **4.** Suma de 500 de lei a fost depusă la o bancă cu o rată a dobânzii de 8 %. Să se calculeze dobânda obținută după un an.

5p **5.** Să se determine coordonatele vectorului $\vec{v}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, știind că $A(2,3)$ și $B(-1,5)$.

5p **6.** Să se calculeze aria unui triunghi echilateral care are perimetrul egal cu 6.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}\middle|\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ și matricea $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $I_2\in\mathcal{M}$.

5p **b)** Știind că $A,B\in\mathcal{M}$, să se arate că $A+B\in\mathcal{M}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\det(AB-BA)\leq 0$, oricare ar fi $A,B\in\mathcal{M}$.

2. Se consideră mulțimea $M=\{f\in\mathbb{Z}_3[X]\mid f=X^2+aX+b\}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(\hat{1})$ pentru $a=b=\hat{1}$.

5p **b)** Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}_3$ pentru care $f(\hat{0})=f(\hat{1})=\hat{1}$.

5p **c)** Să se determine numărul elementelor mulțimii M.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 1+\sqrt{x}, & x\geq 0 \\ e^x, & x<0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=0$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$ și $g(x)=x$.

5p **a)** Să se determine $\int f(\sqrt{x})\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx$.

5p **c)** Să se verifice că $\int_0^1 f(x^{50})\cdot g^{99}(x)\,dx=\frac{e-1}{100}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul real x știind că numerele $x+1$, $2x-3$ și $x-3$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** După o reducere a prețului cu 10%, un produs costă 99 lei. Să se determine prețul produsului înainte de reducere.

5p **3.** Să se calculeze $C_{2009}^{2}-C_{2009}^{2007}$.

5p **4.** Să se determine funcția de gradul al II-lea al cărei grafic conține punctele $A(1;3)$, $B(0;5)$ și $C(-1;11)$.

5p **5.** În triunghiul ABC punctele M, N, P sunt mijloacele laturilor AB, BC, respectiv AC. Să se arate că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AN}$.

5p **6.** În triunghiul ABC se dau $AB=BC=3$ și $AC=3\sqrt{2}$. Să se determine $\cos A$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $H(a)=\begin{pmatrix}1 & \ln a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$, unde $a>0$.

5p **a)** Să se calculeze $\det\left(H(a)\right), \forall a>0.$

5p **b)** Să se arate că $H(a)\cdot H(b)=H(a\cdot b),\ \forall a,b>0.$

5p **c)** Să se calculeze determinantul matricei $H(1)+H(2)+H(3)+\ldots+H(2008)$.

2. Pe mulțimea $G=(2,\infty)$ se consideră operația $x\circ y=xy-2(x+y)+6$.

5p **a)** Să se arate că $x\circ y=(x-2)(y-2)+2,\ \forall x,y\in G$.

5p **b)** Să se demonstreze că $x\circ y\in G,$ pentru $\forall x,y\in G.$

5p **c)** Să se arate că toate elementele mulțimii G sunt simetrizabile, în raport cu legea "$\circ$".

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\le 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$.

5p **a)** Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=1$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

5p **c)** Să se determine $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(e^{x}\right)+f\left(e^{x^2}\right)+\ldots+f\left(e^{x^{2009}}\right)}{x^{2009}}$.

2. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x}+x^{2}+2x$ și $F(x)=e^{x}+\dfrac{x^{3}}{3}+x^{2}+1$.

5p **a)** Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\dfrac{f(x)-x^{2}-2x}{e^{x}+1}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\log_2 3-\log_2 \frac{3}{2}$.

5p **2.** Să se determine coordonatele punctului de intersecție a dreptelor de ecuații $2x+y-4=0$ și $x+y-3=0$.

5p **3.** Să se determine valorile reale ale numărului *m* pentru care $x=5$ este soluție a ecuației $m^2(x-1)=x-3m+2$.

5p **4.** Să se rezolve ecuația $\sqrt{4x^2+6x+3}=x+2$.

5p **5.** Să se determine perimetrul triunghiului *ABC* ale cărui vârfuri sunt $A(-1;3)$, $B(-2;0)$ și $C(0;3)$.

5p **6.** Să se calculeze lungimea laturii *AC* a triunghiului *ABC*, știind că $BC=\sqrt{2}$, $m(\sphericalangle BAC)=30^\circ$ și $m(\sphericalangle ABC)=45^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$. Se notează $A^n=\underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{\text{de } n \text{ ori}}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se demonstreze că $A^2=3A$.

5p **b)** Să se calculeze $\det(A^{10})$.

5p **c)** Să se determine inversa matricei $B=A+I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea $G=(0,\infty)\setminus\{1\}$ se consideră operația $x\circ y=x^{3\ln y}$.

5p **a)** Să se determine mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $x\circ e=8$, unde *e* este baza logaritmului natural.

5p **b)** Să se demonstreze că $x\circ y\in G$, pentru $\forall x,y\in G$.

5p **c)** Să se arate că operația „$\circ$” este asociativă pe mulțimea G.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}ax-6, & x<4\\ \sqrt{x}, & x\geq 4\end{cases}$, unde a este parametru real.

5p **a)** Să se determine valoarea reală a lui a astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0=4$.

5p **b)** Să se calculeze $f'(9)$.

5p **c)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(9,3)$.

2. Pentru oricare $n\in\mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=1$ și $f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)\,dt$.

5p **a)** Să se determine $f_1(x)$, unde $x\in[0,\infty)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\int_0^1 f_1(x)\cdot\ln x\,dx=\frac{e^2+1}{4}$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f_2(x)$, $x\in[0,1]$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se verifice că $\lg\frac{1}{2}+\lg\frac{2}{3}+...+\lg\frac{9}{10}=-1$.

5p **2.** Să se calculeze $C_{1000}^{2}-C_{1000}^{998}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x}+3^{-x}=\frac{10}{3}$.

5p **4.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $x^{2}-(m-3)x+m-3>0$, pentru orice x real.

5p **5.** Să se calculeze cosinusul unghiului A, al triunghiului ABC, știind că $AB=3$, $AC=5$ și $BC=6$.

5p **6.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0;a)$, $B(-1;2)$ și $C(4;5)$, unde a este un număr real. Să se determine valorile lui a pentru care triunghiul ABC este dreptunghic în A.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n,n+2)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se determine ecuația dreptei A_0A_1.

5p **b)** Să se demonstreze că punctele A_0, A_1, A_2 sunt coliniare.

5p **c)** Să se arate că aria triunghiului OA_nA_{n+1} nu depinde de numărul natural n.

2. În inelul $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f=x^{3}-x-5$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

5p **a)** Să se calculeze $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care restul împărțirii polinomului f la $X-a$ este -5.

5p **c)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

SUBIECTUL III (30p)

5p **1. a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^{2}-2x-1}{3x^{2}-4x+1}$.

5p **b)** Să se determine intervalele de convexitate și intervalele de concavitate ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{4}-6x^{2}+18x+12$.

5p **c)** Se consideră funcția $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(x^{2}-1\right)\ln x$. Să se demonstreze că $g(x)\geq 0$, oricare ar fi $x\in(0;+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ \frac{1}{x+1}-\sqrt{x}, & x\geq 0 \end{cases}$

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x\,f\left(x^{2}\right)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\log_3 5+\log_3 6-\log_3 10$.

5p **2.** Să se determine valoarea maximă a funcției $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+3$.

5p **3.** Să se determine valorile reale ale parametrului m știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2+(m-1)x+3=0$ verifică egalitatea $x_1=3x_2$.

5p **4.** Să se calculeze $C_{n+1}^{n}-C_{n+1}^{1}$, $n\in\mathbb{N}$.

5p **5.** Să se calculeze $\sin 10^\circ-\cos 80^\circ$.

5p **6.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2)$ și $B(4,4)$. Să se determine coordonatele mijlocului segmentului AB.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x-2y+3z=-3 \\ 2x+y+z=4 \\ mx-y+4z=1 \end{cases}$, unde m este un parametru real.

5p **a)** Să se arate că pentru orice m număr real tripletul $(0;3;1)$ este soluție a sistemului.

5p **b)** Să se determine valorile parametrului real m pentru care sistemul admite soluție unică.

5p **c)** Pentru $m\neq 3$ să se rezolve sistemul.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x*y=2xy-6x-6y+21$.

5p **a)** Să se arate că $x*y=2(x-3)(y-3)+3$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x*5^x=11$.

5p **c)** Să se determine elementele simetrizabile în raport cu legea "$*$".

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ și $g(x)=\dfrac{x-1}{e^x}$.

5p **a)** Să se verifice că $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=0$.

5p **b)** Să se determine coordonatele punctului de extrem al funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că $g(x)-f(x)\le 1+\dfrac{1}{e^2}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ și $g(x)=1+\dfrac{2x}{x^2+1}$.

5p **a)** Să se verifice că $\int_0^1 f(x)\,dx=\ln 2$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 g(x)\,dx$.

5p **c)** Să se arate că există $x_0\in(0;1)$ astfel încât $f(x_0)<g(x_0)-2x_0$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se compare numerele 2^2 și $\log_2 32$.

5p **2.** Să se determine $m\in\mathbb{R}^*$ astfel încât graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-x+1$ să conțină punctul $A(2,3)$.

5p **3.** Să se determine numerele reale x pentru care este verificată egalitatea $\sqrt{x^2+1}=2$.

5p **4.** Să se rezolve ecuația $C_n^2=C_n^1+2,\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$.

5p **5.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $BC=10$ și $m(\sphericalangle BAC)=60^\circ$.

5p **6.** Să se calculeze numărul $\sin 60^\circ\cdot\cos 150^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea matricelor pătratice $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

Se notează $A^n=\underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ n\ ori},\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $A+A^2=2A$.

5p **b)** Să se determine matricele $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ X=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}$, astfel încât $\det(X+A)=2$.

5p **c)** Știind că $A^n=A,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, să se demonstreze că $A+2A^2+\ldots+nA^n=\frac{n(n+1)}{2}A,\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+mX+1,\ f\in\mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile x_1,x_2,x_3.

Se notează $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$, pentru $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine numărul real m astfel încât $x_1=2$.

5p **b)** Să se arate că $S_3+S_2+mS_1+3=0$.

5p **c)** Să se arate că pentru orice număr par $m\in\mathbb{Z}$ polinomul f nu are rădăcini raționale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3^x+1, & x\leq 1\\ ax+2, & x>1\end{cases}$.

5p **a)** Să se determine valoarea parametrului real a astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0=1$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left(f(x)-1\right)\cdot x\right)$.

2. Se consideră funcția $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

5p **a)** Să se determine funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ astfel încât funcția F să fie o primitivă pentru funcția f.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția F este descrescătoare pe $[0,+\infty)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\frac{1}{6}\leq\int_0^1 F(x)\,dx\leq\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{\log_2 8}$ este natural.

5p **2.** Să se determine coordonatele punctului de intersecție a dreptelor de ecuații $4x-6y-2=0$ și $2x+3y-7=0$.

5p **3.** Să se determine valorile reale ale lui m știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2-\left(m^2+3\right)x+3=0$ verifică egalitatea $x_1+x_2+x_1x_2=7$.

5p **4.** Să se rezolve ecuația $\frac{(n+2)!}{n!}=56,\ n\in\mathbb{N}$.

5p **5.** Să se arate că într-un triunghi ABC dreptunghic în A are loc relația $\cos^2 B+\cos^2 C=1$

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului ABC, știind că $AB=AC=4$ și $m(\sphericalangle A)=60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $A^3=7A$, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

5p **c)** Să se demonstreze că $A\cdot B=A$, unde $B=A^2-6I_2$ și $A^2=A\cdot A$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^4+X^3+X^2+X+1$ și $g=X^3+X^2+X+1$.

5p **a)** Să se demonstreze că $f=X\cdot g+1$.

5p **b)** Să se determine rădăcinile reale ale polinomului g.

5p **c)** Să se calculeze $f(a)$, știind că a este o rădăcină a polinomului g.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-1$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f''(x)}$.

5p **c)** Să se arate că $e^{\sqrt{2009}}+\sqrt{2010}\le e^{\sqrt{2010}}+\sqrt{2009}$.

2. Se consideră funcțiile $f,\ g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{x+1}$ și $g(x)=f''(x)$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^2 (x+1)f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 g(x)\,dx$.

5p **c)** Să se determine primitiva funcției g a cărei asimptotă spre $+\infty$ este dreapta de ecuație $y=2x$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine suma primilor 6 termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1=2$ şi $a_2=5$.

5p **2.** Să se determine valorile reale ale parametrului *m* astfel încât ecuația $x^2+mx+9=0$ să admită două soluții reale egale.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(x^2+3x-10\right)=3$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $A=\{7,11,15,19,...,35\}$, acesta să fie divizibil cu 5.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele $A(4;0)$ şi $B(0;2)$.

5p **6.** Să se calculeze $\cos B$, ştiind că lungimile laturilor triunghiului ABC sunt $AB=6$, $AC=8$ şi $BC=10$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}1+5x & -2x\\ 10x & 1-4x\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $A(1)\cdot A(-1)$.

5p **b)** Să se arate că $\left(A(x)\right)^2=A\left((x+1)^2-1\right)$, pentru orice *x* real, unde $\left(A(x)\right)^2=\left(A(x)\right)\cdot\left(A(x)\right)$.

5p **c)** Să se determine inversa matricei $A(1)$.

2. Fie mulțimea $G=\left\{a+b\sqrt{3}\,\middle|\, a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-3b^2=1\right\}$.

5p **a)** Să se verifice dacă 0 şi 1 aparțin mulțimii G.

5p **b)** Să se demonstreze că pentru orice $x,y\in G$ avem $x\cdot y\in G$.

5p **c)** Să se arate că dacă $x\in G$, atunci $\frac{1}{x}\in G$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-ex-1$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se determine coordonatele punctului de intersecție dintre tangenta la graficul funcției f în punctul $O(0,0)$ şi dreapta de ecuație $x=1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\leq 0\\ x+\sqrt{x}, & x>0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $\int_a^b f(x)\,dx=\int_b^c f(x)\,dx$, unde a,b,c sunt numere reale şi funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, atunci numerele $F(a), F(b), F(c)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\log_5 25 - \log_3 9$.

5p **2.** Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$ al cărei grafic conține punctele $A(2;7)$ și $B(-1;-2)$.

5p **3.** Să se arate că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2-x-1=0$ verifică relația $x_1^2+x_2^2=x_1+x_2+2$.

5p **4.** Să se determine valorile naturale ale lui n pentru care expresia $E(n)=\sqrt{10-3n}$ este bine definită.

5p **5.** Să se determine lungimea medianei duse din vârful A al triunghiului ABC, știind că vârfurile acestuia sunt $A(0;4)$, $B(-2;0)$ și $C(8;0)$.

5p **6.** Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC, știind că $m(\sphericalangle A)=90^\circ$, $m(\sphericalangle B)=30^\circ$ și $AB=4\sqrt{3}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}2x-5y+4z=0\\-3x+y+z=-1\\2x-z=a\end{cases}$, cu $a\in\mathbb{Z}$. Se notează cu A matricea sistemului.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Pentru $a=1$ să se rezolve sistemul.

5p **c)** Să se determine cea mai mică valoare a numărului natural a pentru care soluția sistemului este formată din trei numere naturale.

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție asociativă $x\circ y=x+y+1$.

5p **a)** Să se calculeze $2008\circ 2009$.

5p **b)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $x\circ x^2\le 3$.

5p **c)** Fie mulțimea $A=\left\{n\in\mathbb{N}^*\,\middle|\, n\ge 2 \text{ și } C_n^0\circ C_n^1\circ C_n^2=n+6\right\}$. Să se determine numărul elementelor mulțimii A.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că $\sqrt{x}\ge 1+\ln\sqrt{x}$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

5p **2. a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x\left(t^2+t+1\right)dt}{x^3+1}$.

5p **b)** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$. Să se determine primitiva $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f, care verifică relația $F(1)=0$.

5p **c)** Să se determine numărul real pozitiv a știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2$ este egal cu 5π.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine valorile reale ale numărului x ştiind că numerele $5-x$; $x+7$ şi $3x+11$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Să se calculeze TVA-ul pentru un produs, ştiind că preţul de vânzare al produsului este de 238 lei (procentul TVA-ului este de 19 %).

5p **3.** Să se arate că $\log_2 4+\log_3 9<\sqrt{36}$.

5p **4.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-4$. Să se determine valorile lui x pentru care $f(x)+f(1)\le 1$.

5p **5.** Să se determine lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic, ştiind că suma acestora este 23, iar aria triunghiului este 60.

5p **6.** Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(1,-2)$ şi are panta egală cu 2.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Să se calculeze A^2 ştiind că $A^2=A\cdot A$.

5p **c)** Să se calculeze inversa matricei I_3+A.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3-pX^2+qX-r$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(0)-f(1)$.

5p **b)** Să se calculeze expresia $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$ în funcţie de p,q,r.

5p **c)** Să se arate că polinomul $g=X^3+X^2+X-1$ nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$.

5p **c)** Să se determine asimptota orizontală către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

2. Pentru orice număr natural nenul n se consideră $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^ne^x$ şi $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

5p **a)** Să se verifice că $\int_0^1 e^{-x}f_1(x)\,dx=\dfrac{1}{2}$.

5p **b)** Să se calculeze I_1.

5p **c)** Să se demonstreze că $I_n+nI_{n-1}=e$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2+x}=9$.

5p **2.** Să se determine domeniul maxim de definiție *D* al funcției $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lg(2x-3)$.

5p **3.** Să se determine valorile reale ale numărului *m* știind că valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2mx+3m$ este egală cu 2.

5p **4.** Să se calculeze $C_{2009}^2-C_{2008}^2-C_{2008}^1$.

5p **5.** Să se calculeze lungimea laturii *AC* a triunghiului *ABC* știind că $AB=10$, $BC=15$ și $m(\sphericalangle B)=60^\circ$.

5p **6.** Să se determine coordonatele punctului *M* care aparține dreptei *AB* și este egal depărtat de punctele $A(1;-1)$ și $B(5;-3)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și mulțimea $C(A)=\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,|\,XA=AX\}$.

5p **a)** Să se determine numerele reale *a* și *b* astfel încât $A\cdot\begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}=I_2$.

5p **b)** Să se demonstreze că $A\cdot B=A$, unde $B=A^2-2I_2$ și $A^2=A\cdot A$.

5p **c)** Să se arate că dacă $X\in C(A)$, atunci există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & 3b\\ b & a\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea $G=(-1,1)$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$.

5p **a)** Să se rezolve în G ecuația $x*x=\dfrac{4}{5}$.

5p **b)** Să se verifice egalitatea $x*y=\dfrac{(x+1)(y+1)-(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)+(x-1)(y-1)}$, pentru oricare $x,y\in G$.

5p **c)** Să se arate că pentru oricare $x,y\in G$ rezultă că $x*y\in G$.

SUBIECTUL III (30p)

5p **1. a)** Să se studieze continuitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<1\\ 2x-1, & x\geq 1\end{cases}$ în punctul $x_0=1$.

5p **b)** Să se calculeze derivata funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x^3-15x^2+24x-1$.

5p **c)** Să se determine numărul real pozitiv *a* astfel încât $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=32$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\ldots+\dfrac{1}{x+n}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^2 f_0(x)\,dx$.

5p **b)** Pentru $n\in\mathbb{N}$ să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f_n, axa *Ox* și dreptele $x=1$, $x=2$.

5p **c)** Știind că *F* este o primitivă a funcției f_1, să se arate că funcția $G:[1,2]\to\mathbb{R}$, $G(x)=F(x)-\dfrac{5}{6}x$ este crescătoare.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\log_6 3+\log_6 10-\log_6 5$.

5p **2.** Să se determine valorile reale nenule ale lui *m* pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-(m+1)x+1$ este tangent axei *Ox*.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $(x-2)(x+1)\le 3(x+1)$.

5p **4.** Să se demonstreze că numărul $\frac{8!}{3!\cdot 5!}-\frac{9!}{2!\cdot 7!}$ este natural.

5p **5.** Să se arate că este adevărată egalitatea $\sin x\cdot\cos(90^\circ-x)+\cos^2(180^\circ-x)=1$, oricare ar fi *x* măsura unui unghi ascuțit.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului *ABC*, știind că $AB=AC=10$ și $m(\sphericalangle A)=30^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\{X(a)\mid a\in\mathbb{R}\text{ și }X(a)=I_2+aA\}$.

5p **a)** Să se verifice dacă I_2 aparține mulțimii *G*.

5p **b)** Să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+5ab)$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că pentru $a\neq -\frac{1}{5}$ inversa matricei $X(a)$ este matricea $X\left(\frac{-a}{1+5a}\right)$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_5[X]$, $f=\hat{3}X^3+\hat{4}X^2+\hat{3}X+\hat{2}$ și $g=X^2+\hat{2}X$.

5p **a)** Să se calculeze $f(\hat{1})\cdot g(\hat{0})$.

5p **b)** Să se verifice că $f=(\hat{3}X+\hat{3})\cdot g+\hat{2}X+\hat{2}$.

5p **c)** Să se determine numărul rădăcinilor din $\mathbb{Z}_5$ ale polinomului f.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x-x\ln 2$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$.

5p **c)** Să se determine punctul de extrem al funcției f.

5p **2. a)** Să se determine primitivele funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $g:[1,e]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{\frac{\ln x}{x}}$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^3 \frac{1}{x(x+2)}\,dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2}=3$.

5p **2.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$, știind că valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+2x-m+3$ este egală cu 10.

5p **3.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_7(2x+1)=2$.

5p **4.** Să se rezolve inecuația $2C_n^2\le n+8$, $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$.

5p **5.** Să se determine valorile reale ale numărului *a*, știind că distanța dintre punctele $A(2;1)$ și $B(7;a)$ este egală cu 13.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului *ABC*, știind că $BC=20$ și $m(\sphericalangle A)=30^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}x+y+3z=0\\2x-y+mz=0\\4x+y+5z=0\end{cases}$, cu *m* parametru real și *A* matricea sistemului.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A pentru $m=1$.

5p **b)** Să se determine parametrul real m știind că determinantul matricei sistemului este nul.

5p **c)** Pentru $m\neq -1$ să se rezolve sistemul.

2. Se consideră polinoamele $f=X^3+3X^2+3X+1$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$ și $g=X^2-2X+1$, cu rădăcinile $y_1,y_2\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze diferența $S-S'$, unde $S=x_1+x_2+x_3$ și $S'=y_1+y_2$.

5p **b)** Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la g.

5p **c)** Să se calculeze produsul $f(y_1)\cdot f(y_2)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției *f*.

2. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $h:[0,2]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)$.

5p **c)** Să se arate că dacă, $a>0$, atunci $\dfrac{1}{a+2}\le\int_a^{a+1}f(x)\,dx\le\dfrac{1}{a+1}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine primul termen al unei progresii aritmetice cu rația 4, știind că suma primilor doi termeni este 10.

5p **2.** Să se determine valorile reale ale numărului *m*, știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2-mx+m+2=0$ verifică egalitatea $2x_1x_2=x_1+x_2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+2)-\log_2(x+1)=1$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $\{11,12,\ldots,20\}$, acesta să fie număr prim.

5p **5.** Să se determine coordonatele simetricului punctului A față de punctul *M*, mijlocul segmentului *BC*, știind că $A(3;0)$, $B(0;2)$ și $C(3;2)$.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului *ABC*, știind că $AC=10$, $BC=16$ și $m(\sphericalangle C)=60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 6\\ -3 & 3 & 9\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=A-I_3$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Să se calculeze A^2-B^2, unde $A^2=A\cdot A$ și $B^2=B\cdot B$.

5p **c)** Să se arate că inversa matricei B este $B^{-1}=\frac{1}{9}A-I_3$.

2. Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție $x\circ y=xy+3x+3y+6$.

5p **a)** Să se arate că $x\circ y=(x+3)(y+3)-3$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine elementul neutru al legii „$\circ$”.

5p **c)** Să se determine $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ astfel încât $C_n^2\circ C_n^2=13$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\frac{x-1}{x}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in[1,+\infty)$.

5p **b)** Să se studieze monotonia funcției f pe $[1,+\infty)$.

5p **c)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1,e)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x+5, & x<-1\\ 3x^2+1, & x\geq -1\end{cases}$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f admite primitive.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-3}^{-2} f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $m\in[-1,\infty)$ aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f, axa *Ox* și dreptele de ecuații $x=m$ și $x=m+1$ este cel puțin $\frac{5}{4}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Într-o progresie geometrică, al doilea termen este 3 şi raportul dintre primul şi al patrulea termen este $\frac{1}{8}$. Să se determine primul termen al progresiei.

5p **2.** Ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2-2009x+1=0$, să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

5p **3.** Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_2(x^2-x-2)=2$.

5p **4.** Să se rezolve inecuaţia $C_{17}^{n}\le C_{17}^{n-2}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$, $n\le 17$.

5p **5.** Să se determine coordonatele punctului de intersecţie a dreptelor de ecuaţii $x+3y-1=0$ şi $3x+2y+4=0$.

5p **6.** Să se calculeze lungimea laturii *AB* a triunghiului *ABC* ştiind că $BC=6$, $AC=3\sqrt{2}$ şi $m(\sphericalangle C)=45^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi $B=I_2+A$. Se notează $X^n=\underbrace{X\cdot X\cdot\ldots\cdot X}_{de\ n\ ori}$.

5p **a)** Să se verifice că $A^2=0_2$.

5p **b)** Să se calculeze inversa matricei B.

5p **c)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $B^3-B^2=xA$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-2X^2+1$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că polinomul f este divizibil cu $g=X^2-1$.

5p **b)** Să se calculeze produsul $S\cdot P$ unde $S=x_1+x_2+x_3+x_4$ şi $P=x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$.

5p **c)** Să se calculeze suma $T=x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţiile $f,h:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ şi $h(x)=f^2(x)$.

5p **a)** Să se verifice că $h'(x)=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, oricare ar fi $x\ge 0$.

5p **b)** Să se determine ecuaţia asimptotei către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Să se demonstreze că funcţia h este crescătoare pe intervalul $[0;+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}+1$.

5p **a)** Să se arate că $\int_0^1(x+1)(x+2)\,f(x)\,dx=\frac{22}{3}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se determine numărul real pozitiv *k* astfel încât aria suprafeţei plane determinate de graficul funcţiei f, axa *Ox* şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=k$ să fie egală cu $k+\ln k$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se demonstreze că numărul $\sqrt[3]{27}-\sqrt{12}+2\sqrt{3}$ este natural.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2-4x}=\frac{1}{8}$.

5p **3.** Să se determine valorile reale ale lui m, știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2-mx-m-6=0$ verifică relația $4(x_1+x_2)+x_1x_2=0$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie cubul unui număr natural.

5p **5.** Să se calculeze aria triunghiului determinat de graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-5$ și axele de coordonate.

5p **6.** Să se calculeze $\sin^2 120^\circ+\cos^2 60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $AB: x+2y-4=0$ și $BC: 3x+y-2=0$.

5p **a)** Să se determine coordonatele punctului B.

5p **b)** Pentru $A(4,0), B(0,2), C(1,-1)$ să se scrie ecuația medianei triunghiului ABC, duse din vârful C.

5p **c)** Pentru $A(4,0), B(0,2), C(1,-1)$ să se calculeze aria triunghiului ABC.

2. Se consideră $(\mathbb{Z}_8,+,\cdot)$ inelul claselor de resturi modulo 8.

5p **a)** Să se calculeze în $\mathbb{Z}_8$ suma $S=\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}+\hat{6}+\hat{7}$.

5p **b)** Să se calculeze în $\mathbb{Z}_8$ produsul elementelor inversabile ale inelului.

5p **c)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_8$ sistemul $\begin{cases}\hat{2}x+\hat{5}y=\hat{2}\\ \hat{3}x+\hat{2}y=\hat{5}\end{cases}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem ale funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x)+f\left(x^3\right)\geq -2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se determine numărul real p astfel încât volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(px)$, pentru orice $x\in[0,1]$ să fie minim.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numerele $\log_2 2$, C_3^1 și 5 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Să se determine punctele de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3^{x+1}-1$ cu axele de coordonate.

5p **3.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$, știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2+2x+6m-1=0$ verifică relația $x_1+x_2=x_1x_2$.

5p **4.** Să se calculeze $0!+1!+2!+3!$.

5p **5.** Să se calculeze lungimile catetelor triunghiului *ABC*, știind că $m(\sphericalangle A)=90^\circ$, $m(\sphericalangle B)=60^\circ$ și lungimea ipotenuzei este egală cu 8.

5p **6.** Să se determine aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(2;0)$, $B(0;4)$ și $C(1;6)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$, $x,y,z,t\in\mathbb{Q}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A^2)$, știind că $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se determine $x,y,z,t\in\mathbb{Q}$ știind că $A\cdot B=I_2$.

5p **c)** Știind că $A\cdot B=I_2$ să se calculeze $S=(B^{-1}-A)^2$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi definim legile de compoziție $x*y=x+y-3$ și $x\circ y=xy-3(x+y)+12$.

5p **a)** Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $x\circ x=12$.

5p **b)** Să se arate că $1\circ(2*3)=(1\circ 2)*(1\circ 3)$.

5p **c)** Să se rezolve sistemul $\begin{cases}(x-3)*y=2\\ (x-y)\circ 4=10\end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+3}{x+2}, & x\geq 0\\ x+\dfrac{3}{2}, & x<0\end{cases}$.

5p **a)** Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=0$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **c)** Să se arate că $f(x)\in\left[\dfrac{3}{2},2\right)$, oricare ar fi $x\in[0;+\infty)$.

5p **2. a)** Să se calculeze $\int_1^2 \dfrac{1}{x^2+2x}\,dx$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\int_0^1 \dfrac{x}{x+1}\,dx\leq 1$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ și numerele reale pozitive *a*, *b* și *c*. Să se demonstreze că, dacă numerele $\int_1^a f(x)\,dx$, $\int_1^b f(x)\,dx$, $\int_1^c f(x)\,dx$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, atunci numerele a, b, c sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că $C_5^1+1=P_3$.

5p **2.** Să se determine punctele de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$ cu axele de coordonate.

5p **3.** Să se demonstreze că pentru orice $m\in\mathbb{R}$ ecuația $x^2+mx-m^2-1=0$ are două soluții reale distincte.

5p **4.** Să se determine suma primilor trei termeni ai unei progresii geometrice, știind că suma primilor doi termeni ai progresiei este egală cu 8, iar diferența dintre al doilea termen și primul termen este egală cu 4.

5p **5.** Să se calculeze lungimea laturii AC a triunghiului ABC, știind că $m(\sphericalangle B)=45^\circ$, $m(\sphericalangle C)=30^\circ$ și $AB=10$.

5p **6.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,-4)$ și $B(0,8)$. Să se calculeze lungimea segmentului AM, unde M este mijlocul segmentului AB.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}ax+2y=0\\4x+y=0\end{cases}$ cu $a\in\mathbb{R}$ și $A=\begin{pmatrix}a & 2\\4 & 1\end{pmatrix}$ matricea sistemului. $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.

Se notează $A^2=A\cdot A$.

5p **a)** Pentru $a=-1$ să se rezolve sistemul.

5p **b)** Să se verifice egalitatea $A^2-(a+1)A+(a-8)I_2=O_2$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ știind că matricea A verifică egalitatea $A^2=9I_2$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x\circ y=x+y+11$.

5p **a)** Să se arate că legea de compoziție „$\circ$” este asociativă.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{de\ 6\ ori\ x}=1$.

5p **c)** Să se demonstreze că $(\mathbb{Z},\circ)$ este grup comutativ.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+4$ și $g(x)=x^3-5x^2+8x-4$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)-g'(x), x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x)\geq 0$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f,F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\dfrac{x-1}{x}$ și $F(x)=e^x+x-\ln x$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția F este o primitivă pentru funcția f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^2 x\left(F(x)-x+\ln x\right)dx$.

5p **c)** Să se determine parametrul real m astfel încât aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ să fie egală cu e^m-2.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $-4<3x+2<4$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x+4}=2\sqrt{x}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+2\cdot 3^{x+1}=7$.

5p **4.** Să se determine cât la sută din $a+b$ reprezintă numărul a, știind că a este egal cu 25% din b.

5p **5.** Să se calculeze lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic, știind că aria acestuia este 18, iar măsura unui unghi este egală cu 45°.

5p **6.** Să se demonstreze că expresia $(\sin x+\cos x)^2-2\sin x\cdot\cos x$ este constantă, pentru oricare număr real x.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$ cu $x\in\mathbb{R}$ și $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se notează $A=A\cdot A$.

5p **a)** Să se determine numărul real x pentru care $\det(A)=0$.

5p **b)** Să se verifice egalitatea $A^2=(2x-6)A-\left(x^2-6x+8\right)\cdot I_2$.

5p **c)** Să se determine numărul real x pentru care $A^2=2A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x\circ y=xy-2(x+y)+6$.

5p **a)** Să se arate că $x\circ y=(x-2)(y-2)+2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $x\circ 2=2$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Știind că legea de compoziție „$\circ$” este asociativă, să se calculeze valoarea expresiei $E=(-2009)\circ(-2008)\circ\ldots\circ(-2)\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ 2\circ\ldots\circ 2008\circ 2009$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+3x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-2},\ x\in(-\infty,1]\\ \ln x-2,\ x\in(1,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 (x-2)f(x)dx$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_1^x\left(f(t)+2\right)dt$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $C_6^2 - C_6^4$.

5p **2.** Să se determine valorile reale ale lui x pentru care $x(x-1) \le x+15$.

5p **3.** Să se determine valorile reale ale numărului m astfel încât graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-(m-1)x-m$ să fie tangent axei Ox.

5p **4.** Să se arate că numărul $A=\log_3\frac{2}{1}+\log_3\frac{3}{2}+\log_3\frac{4}{3}+\ldots+\log_3\frac{9}{8}$ este natural.

5p **5.** Să se calculeze $\sin 10^\circ - \cos 80^\circ$.

5p **6.** Să se demonstreze că patrulaterul $MNPQ$ cu vârfurile $M(2;0)$, $N(6;4)$, $P(4;6)$ și $Q(0;2)$ este dreptunghi.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cu $x,y\in\mathbb{R}$ și $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $\det(A)=0$.

5p **b)** Pentru $a=3$ să se verifice că $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Pentru $a=3$ să se rezolve ecuația matricială $A\cdot X=B$.

2. Pe mulțimea $G=(-1,1)$ se consideră legea de compoziție $x*y=\frac{x+y}{1+xy}$.

5p **a)** Să se calculeze $\frac{1}{2}*\frac{1}{2}$.

5p **b)** Fie funcția $f:(-1,1)\to(0,\infty)$, $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$. Să se verifice că $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$, pentru oricare $x,y\in G$.

5p **c)** Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+\frac{x^2}{2}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0;+\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

5p **c)** Să se determine intervalele de convexitate și intervalele de concavitate ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1+x)^n$, $n\in\mathbb{Z}^*$.

5p **a)** Pentru $n=2$ să se calculeze $\int_1^2 f(x)\,dx$.

5p **b)** Pentru $n=-1$ să se determine $a\in[0;+\infty)$ astfel încât $\int_0^a f(x)\,dx=0$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)f(x)\,dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $x^2-5x+6\le 0$.

5p **2.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât minimul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+m$ să fie egal cu 1.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x^2=2$.

5p **4.** Să se calculeze $C_4^2+C_4^3$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1;1)$, $B(-1;0)$ și $C(3;-4)$. Să se determine lungimea segmentului AM, unde M este mijlocul lui (BC).

5p **6.** Să se determine $\cos(180^\circ-x)$, știind că x este măsura unui unghi ascuțit și $\cos x=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$. Se notează $A^2=A\cdot A$.

5p **a)** Pentru $a=1$ să se calculeze matricea A^2.

5p **b)** Să se calculeze $\det(A^2)$, $a\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $A^2\neq I_3$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale definim legile de compoziție $x*y=xy-2x-2y+6$ și $x\circ y=xy-3(x+y)+12$.

5p **a)** Să se verifice că $(x*2)-(3\circ x)=-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Știind că e_1 este elementul neutru în raport cu legea de compoziție „$*$” și e_2 este elementul neutru în raport cu legea de compoziție „$\circ$”, să se calculeze $(e_1*e_2)+(e_1\circ e_2)$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+1$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x*y)=f(x)\circ f(y)$, oricare $x,y\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sqrt{x}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x),\ x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este crescătoare pe $(0,+\infty)$.

5p **c)** Să se determine coordonatele punctului graficului funcției f, în care tangenta la grafic are panta egală cu $\frac{3}{2}$.

2. Se consideră funcția $f:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$.

5p **a)** Să se verifice că $\int(x+1)(x+2)f(x)\,dx=x^2+3x+\mathcal{C},\ x\ge 0$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-f(x+1)-\frac{1}{x+1}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se verifice că $C_5^1+C_5^3+C_5^5=2^4$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x\cdot 3^x=36$.

5p **3.** Să se arate că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2-2mx+m^2-1=0$ verifică relația $x_1x_2-(x_1+x_2)+2\geq 0$, pentru orice $m\in\mathbb{R}$.

5p **4.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5\left(x^2+2x-3\right)=1$.

5p **5.** Triunghiul *ABC* are centrul de greutate *G*. Dacă punctul M este mijlocul segmentului BC, să se determine numărul real a astfel încât $\overrightarrow{AG}=a\cdot\overrightarrow{MA}$.

5p **6.** Să se calculeze aria paralelogramului $ABCD$, știind că $AB=8, BC=10$ și $m(\sphericalangle BCD)=150^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $M=\begin{pmatrix} x & y & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$ cu *x* și *y* numere reale. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $A(1,2), B(0,3), O(0,0)$ și $C_n(n+1,2-n)$ cu $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei M.

5p **b)** Să se arate că punctele A, B și C_2 sunt coliniare.

5p **c)** Să se determine numărul natural nenul n astfel încât aria triunghiului AOC_n să fie minimă.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\perp y=(x-3)(y-3)+3$.

5p **a)** Să se arate că $(x+3)\perp\left(\frac{1}{x}+3\right)=4$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}^*$.

5p **b)** Să se arate că legea „$\perp$” are elementul neutru $e=4$.

5p **c)** Să se determine elementele simetrizabile ale mulțimii $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$\perp$”.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru orice $n\in\mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=\ln x$ și $f_n(x)=f_{n-1}'(x)$.

5p **a)** Să se determine funcția f_1.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f_2.

5p **c)** Să se arate că $f_0(x)\leq\frac{1}{f_1(x)}-1$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\sqrt{e-1}} f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx>\int_2^3 f(x)\,dx+\int_3^4 f(x)\,dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} - \log_5 25$.

5p **2.** Să se arate că vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+2$ are cooordonatele egale.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3+x+1}=x$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,4,...,91\}$, acesta să fie divizibil cu 13.

5p **5.** Să se calculeze cosinusul unghiului ascuțit format de diagonalele dreptunghiului *ABCD*, știind că $AB=16$ și $BC=12$.

5p **6.** Să se calculeze $\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x-3y+4z=-5 \\ x+2y+\alpha z=0 \\ 5x-4y+7z=\beta \end{cases}$ unde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, A este matricea sistemului și $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & \alpha & 0 \\ 5 & -4 & 7 & \beta \end{pmatrix}$. Notăm cu $S(\alpha,\beta)$ suma elementelor matricei *B*.

5p **a)** Să se calculeze $S(0,0)$.

5p **b)** Să se determine numerele reale α și β astfel încât determinantul matricei A să fie nul și $S(\alpha,\beta)=-2$.

5p **c)** Pentru $\alpha=0$ și $\beta=0$ să se rezolve sistemul.

2. În mulțimea polinoamelor $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinoamele $f=X^3+mX^2+nX+6$ și $g(X)=X^2-X-2$.

5p **a)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2-x-2=0$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}^*$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

5p **c)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{2-x^2}$.

5p **a)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze al cincilea termen al unei progresii aritmetice, știind că primul termen al progresiei este 7 și al doilea termen este 9.

5p **2.** Să se rezolve ecuația $C_n^2 = 6$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

5p **3.** Să se arate că mulțimea $\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - (2m+1)x + m^2 + m = 0 \right\}$ are două elemente, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

5p **4.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x+4) + \lg(2x+3) = \lg(1-2x)$.

5p **5.** Să se arate că dacă $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$, atunci punctul C este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Să se determine lungimile catetelor AB și AC ale triunghiului dreptunghic ABC, știind că $\sin B = \frac{3}{5}$ și $BC = 15$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Știind că $a = -1$, $b = 0$ și $c = 1$, să se calculeze determinantul Δ.

5p **b)** Să se arate că $\Delta = (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} 2^x & 1 & 1 \\ 1 & 2^x & 1 \\ 1 & 1 & 2^x \end{vmatrix} = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi se consideră legile de compoziție $x * y = x + y + 3$, $x \circ y = ax + y - 3$, cu $a \in \mathbb{Z}$ și funcția $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 6$.

5p **a)** Să se calculeze $(1 * 2) * (0 \circ 3)$.

5p **b)** Să se determine numărul întreg a pentru care legea de compoziție "$\circ$" este asociativă.

5p **c)** Pentru $a = 1$ să se arate că funcția f este morfism între grupurile $(\mathbb{Z}, *)$ și $(\mathbb{Z}, \circ)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3}{x^2+1}, & x \leq 1 \\ \dfrac{2x+a}{x^2+2}, & x > 1 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine numărul real a astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0 = 1$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficului funcției f.

5p **c)** Să se determine numărul real a astfel încât panta tangentei la grafic în punctul $(2; f(2))$ să fie egală cu 1.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$.

5p **a)** Să se verifice că $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right) dx = e - 1$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 x f(x)\, dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $1 \leq \int_0^1 f(x)\, dx \leq e$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $C_8^5 - C_8^3$.

5p **2.** Să se determine rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1 = 3$ și $b_2 - b_1 = 3$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 \sqrt{x+1} = 1$.

5p **4.** Să se formeze o ecuație de gradul al doilea, ale cărei soluții x_1 și x_2 verifică relațiile $\begin{cases} x_1 + x_2 = 11 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{11}{30} \end{cases}$.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care conține punctul $A(2;5)$ și este paralelă cu dreapta de ecuație $x + y - 2 = 0$

5p **6.** Să se calculeze aria dreptunghiului *ABCD*, știind că $AC = 10$ și $m(\sphericalangle BAC) = 30^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A^2)$, unde $A^2 = A \cdot A$.

5p **b)** Să se arate că dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $XA = AX$, atunci există $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se arate că dacă $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, atunci ecuația $Y^2 = A$ nu are soluție în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$.

5p **a)** Să se calculeze numărul elementelor inversabile în raport cu înmulțirea din inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$.

5p **b)** Se consideră S suma soluțiilor ecuației $\hat{2}x + \hat{1} = \hat{5}$ și P produsul soluțiilor ecuației $x^2 = x$, unde $x \in \mathbb{Z}_6$. Să se calculeze $S + P$.

5p **c)** Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element din inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$, acesta să fie soluție a ecuației $x^3 = \hat{0}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f, h : \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x-2)$ și $h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

5p **a)** Să se arate că $h(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția *h* este descrescătoare pe $(-\infty; 1)$.

5p **c)** Să se arate că $(f'(x))^2 \geq f(x) \cdot f''(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2009} + x + 1$.

5p **a)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $h : [1, 3] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - x^{2009} - 1$.

5p **b)** Să se determine primitiva $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a funcției f, care verifică condiția $F(0) = 1$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^{2010}}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul real x, știind că șirul $1,\ x,\ x+2,\ 7,\ldots$ este progresie aritmetică.

5p **2.** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a graficelor $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x-1$ și $g(x)=x+4$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3+x^2-x-2}=x$.

5p **4.** O persoană a depus la o bancă 1500 de lei. Ce sumă a primit persoana după un an, știind că rata dobânzii a fost de 8 %?

5p **5.** Fie triunghiul echilateral MNP înscris într-un cerc de centru O. Să se demonstreze că $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\vec{0}$.

5p **6.** Să se calculeze aria paralelogramului $ABCD$ în care $AB=6\sqrt{3}$, $AD=4$ și $m(\sphericalangle DAB)=150^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}4 & -7\\ 2 & -4\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se demonstreze că $(A+I_2)^{-1}=A-I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se determine numerele reale x pentru care $\det(x^2A)=x^2\det(A)$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x*y=xy+3x+ay+b,\ a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât legea „$*$” să fie comutativă.

5p **b)** Să se arate că pentru $a=3$ și $b=6$ legea „$*$” admite element neutru.

5p **c)** Să se determine a și b astfel încât $(-3)*x=-3$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+1}, & x\le 0\\ -2x+1, & x>0\end{cases}$.

5p **a)** Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=0$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este crescătoare pe intervalul $(-\infty,0)$.

5p **c)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)^n}$.

5p **a)** Să se verifice că $\displaystyle\int_1^e f_1\left(\sqrt{x-1}\right)dx=1$.

5p **b)** Să se determine primitiva G a funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{f_2(x)}$, care verifică relația $G(1)=\dfrac{13}{15}$.

5p **c)** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 x\cdot f_n(x)\,dx$, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numerele 1, $\log_3 9$ și $\sqrt[3]{64}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2-x$. Să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(6)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+2x-3}=2\sqrt{3}$.

5p **4.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x+2^{-x}=\frac{5}{2}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,0)$ și $B(5,-2)$. Să se determine coordonatele mijlocului segmentului AB.

5p **6.** Să se calculeze $\sin^2 135^\circ+\cos^2 45^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x-ay-z=0 \\ x+4y-2z=16 \\ x-2y+2z=-6 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$ și matricea sistemului $A=\begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine valorile reale ale lui a astfel încât matricea A să fie inversabilă.

5p **b)** Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **c)** Să se rezolve sistemul pentru $a=1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+4x+4y+12$.

5p **a)** Să se arate că $x\circ(y\circ z)=(x\circ y)\circ z$, oricare ar fi $x,y,z\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $x\circ(-4)\circ y=-4$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $1\circ(-2)\circ 3\circ(-4)\circ 5\circ(-6)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\mathbb{R})\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$, pentru orice $x\in(0;+\infty)$.

5p **b)** Să se arate că $2009\sqrt{2011}\le 2010\sqrt{2010}$.

5p **c)** Să se arate că funcția f nu are asimptotă către $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2+x-2, & x<1 \\ (x+1)\ln x, & x\ge 1 \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se verifice că $\int_0^1 f(x)\,dx=-\frac{7}{6}$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $h:[1;e]\to\mathbb{R},\ h(x)=\frac{f(x)}{x+1}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se verifice că $\log_2 5+\log_2 12-\log_2 30=1$.

5p **2.** Să se arate că, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$, parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-mx+m^2+1$ este situată deasupra axei Ox.

5p **3.** Să se determine numărul real a, știind că numerele $2^a, 4^a+1$ și 2^{a+2} sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **4.** Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația $C_{n+1}^1=n^2-1$.

5p **5.** Să se demonstreze că în patrulaterul *MNPQ* are loc relația $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{PN}$.

5p **6.** Să se arate că, pentru orice unghi ascuțit *x*, este adevărată egalitatea $\sin x\cdot\cos\left(90^\circ-x\right)+\cos^2\left(180^\circ-x\right)=1$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $A(2,1), B(1,2)$ și $C_n\left(n,-n\right)$, cu $n\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se scrie ecuația dreptei C_4C_2.

5p **b)** Să se arate că oricare ar fi $n\in\mathbb{Z}^*$ punctele O, C_n, C_{n+1}, sunt coliniare.

5p **c)** Să se calculeze aria triunghiului ABC_3.

2. Se consideră matricele $A_x=\begin{pmatrix}2009^x & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & x & 1\end{pmatrix}$, cu $x\in\mathbb{R}$ și mulțimea $G=\left\{A_x\,\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se verifice că $I_3\in G$, unde $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$

5p **c)** Să se arate că $G=\left\{A_x\,\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=\left(x-3\right)\ln x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $F, f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F\left(x\right)=x\cdot e^x$ și $f\left(x\right)=\left(x+1\right)e^x$.

5p **a)** Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției *F*, axa *Ox* și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **c)** Să se calculeze $\int\limits_0^1\dfrac{F(x)-f(x)}{e^x+1}\,dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\frac{2+C_4^1}{A_3^1}$.

5p **2.** Să se determine $x\in\mathbb{R}$, ştiind că numerele $x-1, x+1$ şi $2x-1$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Să se calculeze $f(0)+f(1)+\ldots+f(4)$.

5p **4.** Să se determine valoarea parametrului real m, ştiind că soluțiile x_1 şi x_2 ale ecuației $x^2-(m-1)x-m=0$ verifică relația $x_1+x_2=2(x_1x_2+4)$.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele $A(2,1)$ şi $B(1,-2)$.

5p **6.** Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic ABC, cu $m(\sphericalangle A)=90^\circ$, are loc relația $AD^2=AB\cdot AC\cdot\sin B\sin C$, unde D este piciorul înălțimii duse din vârful A.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea matricelor $G=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

5p **a)** Pentru $A,B\in G$, să se demonstreze că $A+B\in G$.

5p **b)** Să se arate că matricea $C\in G$, obținută pentru $a=5$ şi $b=3$, verifică relația $C^2=10C-16I_2$, unde $C^2=C\cdot C$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Pentru $a,b\in\mathbb{N}$ să se determine o matrice $D\in G$ care are proprietatea că $\det(D)=2008$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X],\ f(X)=(X+1)^{2009}-(X-1)^{2009}$ care are forma algebrică $f=a_{2009}X^{2009}+a_{2008}X^{2008}+\ldots+a_1X+a_0$.

5p **a)** Să se determine a_0.

5p **b)** Să se arate că $f(1)+f(-1)$ este număr întreg par.

5p **c)** Să se determine numărul rădăcinilor reale ale polinomului f.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)-\frac{2x}{(x^2+1)^2}=0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se arate că $f\left(\sqrt[3]{2008}\right)\le f\left(\sqrt[3]{2009}\right)$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=2^x$ şi $g(x)=x\cdot e^x$.

5p **a)** Să se determine $\int f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\frac{\log_5 18-\log_5 2}{\log_5 3}$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$, $g(x)=2x+2$, $h(x)=3x+3$. Să se determine numărul real a astfel încât $a\left(f(x)+h(x)\right)=g(x)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{1}{2^x}=\frac{4^x}{8}$.

5p **4.** Să se determine câte numere naturale de 4 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$ și $B(m^2-1,0)$, cu $m\in\mathbb{R}$. Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât punctul $C(5,0)$ să fie mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Se consideră patrulaterul $ABCD$ în care $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Să se demonstreze că $ABCD$ este paralelogram.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze $A\cdot B$.

5p **b)** Să se rezolve ecuația matricială $A\cdot X=B$, unde $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se demonstreze că matricea A verifică egalitatea $A^2-4A+5I_2=O_2$, unde $A^2=A\cdot A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x\circ y=x+y-14$.

5p **a)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=2$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea "$\circ$" este asociativă.

5p **c)** Să se demonstreze că $(\mathbb{R},\circ)$ este grup comutativ.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x+3^x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine asimptota spre $-\infty$ a funcției f.

5p **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{x^n}{x+1}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^{\frac{1}{2}}(x+1)\cdot f_2(x)\,dx$.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_1, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 f_{2009}(x)\,dx\le\ln 2$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\frac{2!+3!}{C_8^1}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+3$. Să se arate că numerele $f(1)$, $f(0)$ și $f(-3)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **3.** Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+x=y \end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **4.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_5(3x+1)=1+\log_5(x-1)$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul N, simetricul punctului $M(-2,3)$ față de punctul O. Să se calculeze lungimea segmentului MN.

5p **6.** Fie triunghiul ascuțitunghic ABC. Să se determine măsura unghiului A, știind că $BC=6$ și raza cercului circumscris triunghiului are lungimea egală cu $2\sqrt{3}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $D(a)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}$, unde a este un număr real.

5p **a)** Să se calculeze valoarea determinantului pentru $a=-1$.

5p **b)** Să se demonstreze că $D(a)=-(a-1)^2(a+2)$, pentru orice a număr real.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $D(a)=-4$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-10(x+y)+110$.

5p **a)** Să se verifice că $x\circ y=(x-10)(y-10)+10$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $C_{10}^1\circ C_{20}^1$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $x\circ(x-1)=10$, unde $x\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1+\frac{1}{x-1}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x)\geq 4$, pentru orice $x\in(1;+\infty)$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{e^x}{e^{nx}+1}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int f_0(x)\,dx$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_1, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx\leq\int_0^1 f_n(x)\,dx$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\log_2 \frac{1}{4} - \sqrt[3]{-8}$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $(2x-1)(x+1) \le -x+11$.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+4x+6$. Să se arate că $f(x)\le f(2)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **4.** După două ieftiniri succesive cu 10 %, respectiv 25 %, prețul unui produs este 540 lei. Să se determine prețul produsului înainte de cele două ieftiniri.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(2,m)$, unde m este un număr real. Să se determine numerele reale m pentru care $OM=\sqrt{5}$.

5p **6.** Să se determine lungimea laturii BC a triunghiului ABC, știind că $AC=6$, $AB=4$ și $m(\sphericalangle BAC)=60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A(k)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & x_k & x_k^2 \\ -2 & x_k^2 & x_k \end{pmatrix}$, cu $k\in\{0,1,2\}$. $x_0=1$ și x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2+x-2=0$, $x_1<x_2$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei $A(0)$.

5p **b)** Să se determine matricea $A(1)+A(2)$.

5p **c)** Să se calculeze suma elementelor matricei $A(k)$, pentru fiecare $k\in\{0,1,2\}$.

2. Pe mulțimea $G=(0,\infty)\setminus\{1\}$ se consideră operația $x\circ y=x^{2\ln y}$.

5p **a)** Să se calculeze $3\circ e$, unde e este baza logaritmului natural.

5p **b)** Să se demonstreze că $x\circ y\in G$, pentru orice $x,y\in G$.

5p **c)** Să se arate că operația "$\circ$" este asociativă pe mulțimea G.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1;-1)$.

5p **c)** Să se arate că $f(x)\ge -1$, pentru orice $x>0$.

2. Se consideră funcția $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_a(x)=ax+1$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+x+1$ să fie o primitivă a funcției f_a.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 e^x f_1(x)\,dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_0^1 f_a^{\,2}(x)\,dx \ge \frac{1}{4}$ pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\sqrt[3]{9}-\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$.

5p **2.** Ecuația $x^2+ax-a-1=0$, cu $a\in\mathbb{R}$ are soluțiile x_1 și x_2. Să se arate că expresia $x_1+x_2-x_1x_2$ nu depinde de *a*.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{2^x}{3^x}=\frac{3}{2}$.

5p **4.** Știind că vectorul $\overrightarrow{AB}$ are lungimea egală cu 12 și $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CB}$, să se determine lungimea vectorului $\overrightarrow{CB}$.

5p **5.** În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $A(-1,-1), B(0,1), C(1,1)$ și $D(2,3)$. Să se demonstreze că dreptele *AB* și *CD* sunt paralele.

5p **6.** Știind că $\sin 80^\circ-\cos 80^\circ=a$, să se calculeze $\sin 100^\circ+\cos 100^\circ-a$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $D(a;b;x)=\begin{vmatrix}1 & x & ab\\ 1 & a & bx\\ 1 & b & ax\end{vmatrix}$, unde a,b și x sunt numere reale.

5p **a)** Să se calculeze $D(1;1;0)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $D(a;b;x)$ nu depinde de numărul real x.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $D(a;b;x)=0$, unde *a* și *b* sunt numere reale pozitive.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3-3X+a$ și $g(x)=X^2-3X+2$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=2$ să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x)=g(x)$.

5p **b)** Să se determine rădăcinile polinomului *f*, știind că are o rădăcină dublă pozitivă.

5p **c)** Pentru $a=2$ să se rezolve ecuația $e^{f(x)}=g\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{3x-3}{2\sqrt{x}}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1;-2)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $x+\frac{2}{\sqrt{x}}\geq 3$ pentru orice $x>0$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=e^{x^n}$.

5p **a)** Să se determine $\int f_1(x)\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 x\cdot f_1(x)\,dx$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\cdot f_3(x)$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $2C_3^1 - A_3^2$.

5p **2.** Să se arate că $\log_2 14 + \log_2 3 - \log_2 6 = \log_2 7$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2 - x - 2}$.

5p **4.** Să se arate că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 - (m+1)x + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$, verifică relația $x_1 + x_2 - x_1 x_2 = 1$.

5p **5.** Să se determine aria triunghiului ABC, în care $AB = 4$, $AC = 6$ și $m(\sphericalangle BAC) = 45^\circ$.

5p **6.** Să se calculeze $\sin 135^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ - \cos 45^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 2x^2 + 2x \\ 0 & 1 & 4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(0) + f(1)$.

5p **b)** Să se arate că $f(1) \cdot f(-1) = I_3$ unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$.

5p **a)** Să se rezolve ecuația $\hat{2}x + \hat{5} = \hat{1}$, pentru $x \in \mathbb{Z}_6$.

5p **b)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix}$ în $\mathbb{Z}_6$.

5p $\begin{cases} x + \hat{2}y = \hat{5} \end{cases}$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, unde $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

5p **a)** Să se determine $\int f(x)\,dx$, unde $x > 0$.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $g : [1,2] \to \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = f(x)$, $x \in [1,2]$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^e f(x) \ln x\,dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se compare numerele $a=\sqrt{2}$ şi $b=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

5p **2.** Să se demonstreze că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+4$ este tangentă axei Ox.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x\cdot 5^x=15$.

5p **4.** Să se calculeze TVA-ul pentru un produs, ştiind că prețul de vânzare al produsului este 357 lei, (procentul TVA-ului este 19 %).

5p **5.** Se consideră dreptunghiul $ABCD$ care are $AB=8$ şi $BC=6$. Să se calculeze cosinusul unghiului ascuțit format de diagonalele dreptunghiului.

5p **6.** Se consideră pătratul $ABCD$ de centru O. Să se calculeze $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $A=B+I_3$.

5p **b)** Să se demonstreze că matricea A este inversabilă şi să se determine A^{-1}.

5p **c)** Să se determine numărul real a astfel încât $\det\left(X(a)\right)=(2a-1)^3$, unde $X(a)=I_3+aA$.

2. Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x*y=xy-x-y+2$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x*y=(x-1)(y-1)+1$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă.

5p **c)** Să se calculeze $\dfrac{\sqrt{1}}{2}*\dfrac{\sqrt{2}}{2}*\ldots*\dfrac{\sqrt{2009}}{2}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{e^x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{-x^2+3x-2}{e^x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se arate că $f(x)\geq\dfrac{1}{e}$ pentru orice $x\leq 2$.

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x+2}$.

5p **a)** Să se determine $\int f^2(x)\,dx$.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Folosind, eventual, faptul că $\sqrt{x+2}\leq\sqrt{3}$ pentru orice $x\in[0,1]$, să se arate că $\int_0^1 x^{2009}f(x)\,dx\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2010}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine al patrulea termen al unei progresii geometrice care are primul termen egal cu 16 şi rația $\frac{1}{2}$.

5p **2.** Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y=-6 \\ xy=8 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{1}{2^x}=4$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr de două cifre format cu elementele mulțimii A, acesta să aibă cifrele egale.

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AD}$.

5p **6.** Să se calculeze $\sin\left(180^\circ - x\right)$, ştiind că $\sin x=\frac{4}{5}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+ay+2z=1 \\ x+(2a-1)y+3z=1 \\ x+ay+(a-3)z=1 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$ şi matricea sistemului $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 2a-1 & 3 \\ 1 & a & a-3 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $\det(A)=a^2-6a+5$.

5p **b)** Să se rezolve ecuația $\det(A)=0$.

5p **c)** Pentru $a=0$ să se rezolve sistemul în mulțimea numerelor reale.

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție asociativă $x*y=xy-6x-6y+42$.

5p **a)** Să se arate că $x*y=(x-6)(y-6)+6$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x*x*x=x$.

5p **c)** Să se calculeze $1*2*3*...*2009$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f.

5p **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f, g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ şi $g(x)=e^x+e^{-x}$.

5p **a)** Să se determine $\int f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, definită prin $h(x)=x\,f(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției g.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5^{-x}$. Să se calculeze $f(-1)+f(0)+5f(1)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $(3+2\sqrt{2})^x=(1+\sqrt{2})^2$.

5p **4.** Să se determine numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $A=\{1,2,3,4,5,6\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(4,-3)$. Să se determine coordonatele punctului M, mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Să se calculeze $\cos(180^\circ - x)$, știind că $\cos x=\frac{1}{3}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, X^2=-I_2\right\}$, unde $X^2=X\cdot X$.

5p **a)** Să se verifice că $A\in G$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\left(\frac{1}{2}(X+I_2)\right)^2=\frac{1}{2}X$, oricare ar fi $X\in G$.

5p **c)** Să se demonstreze că orice matrice pătratică de ordinul al doilea cu elemente numere reale pentru care avem $A\cdot X=X\cdot A$ este de forma $X=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, unde $x, y\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+bX+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $c=501$ să se demonstreze că $f(1)+f(-1)=1004$.

5p **b)** Pentru $a=-2$, $b=2$ și $c=-1$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

5p **c)** Să se demonstreze că nu există valori reale ale coeficienților a, b, c astfel încât polinomul f să se dividă cu polinomul $g=X^3-X$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(e,\frac{1}{e}\right)$.

5p **c)** Să se arate că $\ln x\le\frac{x}{e}$, pentru orice $x>0$.

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\sqrt{x}$.

5p **a)** Să se determine mulțimea primitivelor funcției *f*.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției *f*.

5p **c)** Folosind, eventual, faptul că $\sqrt{x}\ge x$, pentru orice $x\in[0,1]$, să se arate că $\int_0^1 f^{2009}(x)\,dx\le\frac{1}{2010}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine termenul al patrulea al unei progresii aritmetice, știind că primul termen este 2 și rația este 3.

5p **2.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x^2-x+m=0$ să admită soluții de semne contrare.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(x^2-x-2\right)-\log_2(2x-4)=1$.

5p **4.** Să se rezolve ecuația $C_n^1+A_n^2=4$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

5p **5.** Să se determine aria unui triunghi ABC, știind că $AB=AC=2$ și $m(\sphericalangle A)=30^\circ$.

5p **6.** Să se calculeze $2\sin^2 135^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,\middle|\,X^2=X\right\}$, unde $X^2=X\cdot X$.

5p **a)** Să se verifice că $A\in G$.

5p **b)** Să se calculeze $\det\left(A^3-2A^2+A\right)$, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\left(2X-I_2\right)^2=I_2$, oricare ar fi $X\in G$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-\sqrt{2009}\left(x+y\right)+2009+\sqrt{2009}$.

5p **a)** Să se arate că $x*y=\left(x-\sqrt{2009}\right)\left(y-\sqrt{2009}\right)+\sqrt{2009}$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Știind că legea de compoziție „$*$” este asociativă, să se calculeze $\left(-\sqrt{2009}\right)*\left(-\sqrt{2008}\right)*...*0*...*\left(\sqrt{2008}\right)*\left(\sqrt{2009}\right)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+2x+1\right)\cdot e^x$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=(x+1)(x+3)\cdot e^x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(-2)+f(-4)\leq\frac{8}{e^3}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+2, & x\leq 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția *f* admite primitive.

5p **b)** Să se demonstreze că orice primitivă a funcției *f* este convexă pe $(1;+\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^e f(x)\,dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine rația unei progresii aritmetice în care primul termen este 10 şi al patrulea termen este 19.

5p **2.** Să se determine valoarea minimă a funcției $f:[-2,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+1$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg^2 x-3\lg x+2=0$.

5p **4.** Să se determine prețul inițial al unui produs care, după o scumpire cu 15 %, costă 460 lei.

5p **5.** Să se determine coordonatele punctului *M*, mijlocul segmentului AB, ştiind că $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}+4\vec{j}$ şi $\overrightarrow{OB}=7\vec{i}+2\vec{j}$.

5p **6.** Să se calculeze $\sin 100^\circ+\cos 100^\circ-\sin 80^\circ+\cos 80^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}2x+ay+z=0\\x+y+z=0\\x-y+2z=0\end{cases}$, unde *a* este număr real şi matricea sistemului $A=\begin{pmatrix}2 & a & 1\\1 & 1 & 1\\1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

5p **a)** Pentru $a=0$ să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se determine valorile reale ale numărului *a* pentru care matricea *A* este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$ să se rezolve sistemul în mulțimea numerelor reale.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se consideră legile de compoziție $x*y=px+y+2$, cu $p\in\mathbb{Z}$, $x\circ y=x+y-2$ şi funcția $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=3x+q$, cu $q\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se determine numărul real p astfel încât legea de compoziție "$*$" să fie comutativă.

5p **b)** Pentru $p=1$ să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $(x*x)\circ(x*x)=x^2+2$.

5p **c)** Pentru $p=1$ să se determine numărul întreg *q* astfel încât funcția *f* să fie morfism între grupurile $(\mathbb{Z},*)$ şi $(\mathbb{Z},\circ)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+1$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(1)$.

5p **b)** Să se determine intervalele de convexitate şi intervalele de concavitate ale funcției f.

5p **c)** Să se arate că $f(x)\le 3$, pentru orice $x\le 2$.

2. Se consideră funcțiile $f,F:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{1}{x^2}$ şi $F(x)=x+\frac{1}{x}$.

5p **a)** Să se verifice că funcția *F* este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa *Ox* şi dreptele de ecuații $x=1$ şi $x=2$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^e F(x)\cdot\ln x\,dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze suma $1+2+2^2+\ldots+2^6$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $(x^2-1)(x+1)\geq 0$.

5p **3.** Să se arate că produsul soluțiilor reale ale ecuației $mx^2-2009x-m=0$ este constant, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}^*$.

5p **4.** Să se rezolve ecuația $C_n^0+C_n^1=8,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctul O, intersecția diagonalelor. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DC}$.

5p **6.** Să se calculeze $\lg\left(\text{tg}40^\circ\right)\cdot\lg\left(\text{tg}41^\circ\right)\cdot\ldots\cdot\lg\left(\text{tg}45^\circ\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\3&7&5\end{pmatrix}, I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Pentru $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se notează $X^3=X\cdot X\cdot X$.

5p **a)** Să se determine A^{-1}.

5p **b)** Să se rezolve ecuația matricială $A^3\cdot X=I_3$, unde $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se calculeze $(B-A)^3$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x*y=3xy+7x+7y+14$.

5p **a)** Să se determine elementul neutru al legii "$*$".

5p **b)** Să se rezolve mulțimea numerelor întregi inecuația $x*x\leq -1$.

5p **c)** Să se demonstreze că legea de compoziție "$*$" este asociativă.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^3-3x^2+1$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(1)$.

5p **b)** Să se determine intervalele de concavitate și intervalele de convexitate ale funcției *f*.

5p **c)** Să se arate că $f(x)\geq 0$, pentru orice $x\geq -\frac{1}{2}$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x$ și $g(x)=e^{1-x}$.

5p **a)** Să se determine mulțimea primitivelor funcției *f*.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R},\ h(x)=x\cdot f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^{\frac{1}{2}}\left(g(x)-f(x)\right)dx\geq 0$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze suma $S=1+5+9+...+25$.

5p **2.** Să se determine mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\, x^2+x-2<0\right\}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+1}\cdot 2^x=108$.

5p **4.** Să se determine câte numere de trei cifre se pot scrie folosind doar elemente din mulțimea $\{1,2\}$.

5p **5.** Fie punctele distincte A,B,C,D, nu toate coliniare. Știind că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$, să se demonstreze că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

5p **6.** Să se calculeze $\sin A$ în triunghiul ABC, știind că $BC=10$, iar lungimea razei cercului circumscris triunghiului este egală cu 10.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+2y+4z=0 \\ a^2x+4y+16z=0 \end{cases}$, cu $a\in\mathbb{R}$ și matricea sistemului $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 4 \\ a^2 & 4 & 16 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Pentru $a=1$ să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Să se determine mulțimea valorilor reale ale numărului a pentru care $\det(A)\neq 0$.

5p **c)** Să se rezolve sistemul pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{2;4\}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+bX+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine numărul real c știind că $f(1)+f(-1)=2009$.

5p **b)** Să se determine numerele reale a,b,c știind că $f(0)=f(1)=-2$ și că una dintre rădăcinile polinomului este $x=2$.

5p **c)** Pentru $a=-2$, $b=1$ și $c=-2$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1;2)$.

5p **c)** Să se arate că $2\sqrt{x}\geq 2+\ln x$, pentru orice $x>0$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n+(1-x)^n$.

5p **a)** Să se determine mulțimea primitivelor funcției f_2.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x\cdot f_2(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 f_n(x)\,dx\geq\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul elementelor mulțimii $A=\{1,4,7,\ldots,40\}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x$. Să se calculeze $f(-3)\cdot f(-2)\cdot\ldots\cdot f(3)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\sqrt[3]{x}=1$.

5p **4.** Să se determine câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu ajutorul cifrelor din mulțimea $\{1,2,3\}$.

5p **5.** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$, știind că punctele $A(a,b)$ și $B(a-1,4)$ aparțin dreptei de ecuație $x+y-5=0$.

5p **6.** Să se calculeze produsul $(\cos1^\circ-\cos9^\circ)\cdot(\cos2^\circ-\cos8^\circ)\cdot\ldots\cdot(\cos9^\circ-\cos1^\circ)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&2&-3\\1&2&-3\end{pmatrix}$. Pentru $a\in\mathbb{R}$ fixat, definim matricea $B=aA+I_3$.

5p **a)** Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se demonstreze că $2B-B^2=I_3$.

5p **c)** Să se determine B^{-1}.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție prin $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.

5p **a)** Să se verifice că $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine numărul real x pentru care $(x^2-5)\circ 6=-1$.

5p **c)** Să se determine două numere $a,b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, astfel încât $a\circ b\in\mathbb{N}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x-\ln x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.

5p **c)** Să se arate că $f(x)\geq 0$, oricare ar fi $x>0$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=(2-x)^n$.

5p **a)** Să se determine $\int f_1(x)\,dx$, unde $x\in[0,2]$.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g:[0,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f_1(x)\cdot e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=2$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției f_5.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze produsul primilor trei termeni ai unei progresii geometrice, care are primul termen $\sqrt{2}$ şi raţia egală cu $-\sqrt{2}$.

5p **2.** Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^2-4x+1$, $g(x)=2x-1$. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(x)+2g(x)=-1$.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x}+2\cdot 3^x-3=0$.

5p **4.** Să se calculeze $3!-C_4^2$.

5p **5.** Să se calculeze distanţa de la punctul $A(-6,8)$ la originea reperului cartezian xOy.

5p **6.** Să se demonstreze că, dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A, atunci are loc relaţia $\sin B+\cos B=\dfrac{AB+AC}{BC}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&0&a\\0&a&0\\a&0&0\end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi mulţimea $G=\left\{X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\,\middle|\, AX=XA\right\}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $A^2X=XA^2$, oricare ar fi $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **c)** Să se arate că dacă $a,b\in\mathbb{R}$, atunci matricea $aI_3+bA\in G$.

2. Se consideră polinomul $f=\left(1+X+X^2\right)^{1004}+X^{2009}$, cu forma algebrică $f=a_0+a_1X+a_2X^2+...+a_{2009}X^{2009}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(-1)$.

5p **b)** Să se arate că $a_0+a_1+a_2+...+a_{2009}$ este un număr întreg par.

5p **c)** Să se determine restul împărţirii polinomului f la polinomul X^2-1.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se determine asimptota verticală la graficul funcţiei *f*.

5p **c)** Să se demonstreze că $e^x\geq ex$, pentru orice $x>0$.

2. Fie funcţia $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{2}{x}$.

5p **a)** Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei *f*.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei *Ox*, a graficului funcţiei *f*.

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^2 f(x)\cdot\ln x\,dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-3x+2$. Să se calculeze produsul $f(-2)\cdot f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)$.

5p **2.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât minimul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+mx+2$ să fie egal cu -2.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $2^{\log_2 x}=4$.

5p **4.** Să se rezolve ecuația $C_{n+2}^1+\dfrac{(n+2)!}{(n+1)!}=n^2+5, n\in\mathbb{N}$.

5p **5.** Știind că punctele *B* și *C* sunt simetricele punctului $A(2,3)$ față de axele *Ox*, respectiv *Oy*, să se calculeze lungimea segmentului *BC*.

5p **6.** Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC, știind că $\sin A=\dfrac{1}{2}$ și că lungimea razei cercului circumscris triunghiului este egală cu 4.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4&2\\2&4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A^2)$, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se demonstreze că $A^3=2^3\begin{pmatrix}14&13\\13&14\end{pmatrix}$, unde $A^3=A^2\cdot A$.

5p **c)** Să se demonstreze că matricea A verifică egalitatea $A^2-8A+12I_2=O_2$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{Z}_6[X], f=X^3+(\hat{2}a+\hat{1})X+a+\hat{4}$

5p **a)** Să se demonstreze că $b^3=b$, oricare ar fi $b\in\mathbb{Z}_6$.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{Z}_6$, știind că $f(\hat{2})=\hat{0}$.

5p **c)** Pentru $a=\hat{2}$ să se rezolve ecuația $f(x)=\hat{0}$, $x\in\mathbb{Z}_6$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+1)e^x-1$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=(x+1)^2\cdot e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $O(0;0)$.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției *f*.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{x^n}{\sqrt{x+1}}$.

5p **a)** Să se determine $\int f_1(x)\cdot\sqrt{x+1}\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției f_1.

5p **c)** Folosind, eventual, faptul că $\sqrt{x+1}\geq 1$, oricare ar fi $x\in[0;1]$, să se arate că $\int_0^1 f_{2009}(x)\leq\dfrac{1}{2010}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră numărul $a=\log_2 3$. Să se arate că $\log_2 18=2a+1$.

5p **2.** Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$, cu a și b numere reale, pentru care $f(1)+f(2)+f(3)=6a+2b$ și $f(4)=8$.

5p **3.** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție cu axele de coordonate a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2^{x+3}-2$.

5p **4.** Prețul unui produs este de 5400 lei. Cu ce procent trebuie ieftinit prețul produsului pentru ca acesta să coste 4860 lei?

5p **5.** Se consideră dreptele distincte $d_1: ax+2y=2$ și $d_2: 8x+ay=4$. Să se determine valorile parametrului real a astfel încât dreptele d_1 și d_2 să fie paralele.

5p **6.** Să se calculeze lungimea medianei duse din vârful A al triunghiului ABC știind că $A(2,3), B(2,0)$ și $C(0,2)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A_x=\begin{pmatrix} x & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}$, x real și $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Se notează $A_x^2=A_x\cdot A_x$.

5p **a)** Să se determine valorile reale ale numărului x pentru care $\det(A_x)=0$.

5p **b)** Sa se determine numărul real x astfel încât $A_x^2=I_2$.

5p **c)** Să se demonstreze că $A_x^2=2xA_x+(1-x^2)\cdot I_2$.

2. Se consideră inelul de polinoame $\mathbb{Z}_3[X]$.

5p **a)** Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}_3$, știind că polinomul $f\in\mathbb{Z}_3[X], f=X^2+aX+b$ are rădăcinile $\hat{1}$ și $\hat{2}$.

5p **b)** Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $f\in\mathbb{Z}_3[X], f=X^3+\hat{2}X^2+\hat{2}X+\hat{1}$ la polinomul $g\in\mathbb{Z}_3[X], g=X+\hat{1}$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $f\in\mathbb{Z}_3[X]$, $f=\left(a^3+\hat{2}a\right)X^2+\hat{2}aX+\hat{1}$, atunci $f\left(\hat{1}\right)=\hat{2}a+\hat{1}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cdot e^x$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=(x+1)\cdot e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine intervalele de convexitate și intervalele de concavitate ale funcției f.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficul funcției f.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{x^n+x+2}{x+1}$.

5p **a)** Să se determine $\int x\cdot f_1(x)\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f_2(x)\,dx$.

5p **c)** Să se arate că aria suprafeței plane, cuprinse între graficul funcției f_{2008} și axa Ox și dreptele $x=0$ și $x=1$, este mai mică sau egală cu 2.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se demonstreze că $(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2$ este un număr natural.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$. Să se demonstreze că $f(x)\geq -1$, oricare ar fi numărul real x.

5p **3.** Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 2x+2y=16 \\ xy=12 \end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **4.** Să se rezolve ecuația $\frac{n!}{12}=(n-2)!$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

5p **5.** Se consideră reperul cartezian xOy şi punctele $A(1,-1)$ şi $B(3,5)$. Să se determine coordonatele punctului C din plan astfel încât $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$.

5p **6.** Să se calculeze $\cos A$ în triunghiul ABC, ştiind că $AB=2$, $BC=3$ şi $AC=4$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ şi $C=A+B$.

Se notează cu $X^2=X\cdot X$

5p **a)** Să se efectueze produsul $A\cdot B$.

5p **b)** Să se calculeze $\det(A)\cdot\det(B)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $A^2-B^2=6(A+B)$.

2. Pe mulțimea mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x*y=x+y+2$ şi $x\circ y=xy+2x+2y+2$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x\circ y=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$

5p **b)** Să se determine simetricul elementului $x=-3$ în raport cu legea de compoziție "$\circ$".

5p **c)** Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x^2*y^2=7 \\ x^2\circ y^2=16 \end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{N}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$, pentru orice $x>1$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se arate că $f\left(\sqrt[3]{2}\right)\geq f\left(\sqrt[3]{3}\right)$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x$ şi $g(x)=\sqrt{1-x}$.

5p **a)** Să se determine $\int f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\cdot\ln x\,dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul real x știind că numerele $x-1, 2x-2$ și $x+3$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Să se determine numărul real m astfel încât soluțiile ecuației $x^2-mx-1=0$ să fie numere reale opuse.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{x-2}$.

5p **4.** Să se calculeze $C_{10}^9 - C_9^8$.

5p **5.** Să se determine numărul real m pentru care punctele $A(2,4), B(3,3)$ și $C(m,5)$ sunt coliniare.

5p **6.** Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, cu $m(\sphericalangle A)=90^\circ$ și $\cos B=\frac{3}{5}$. Să se calculeze $\sin C$.

SUBIECTUL II (30p)

5p **1.** **a)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} \sqrt{2009}-1 & -1 \\ 1 & \sqrt{2009}+1 \end{vmatrix}$.

5p **b)** Să se calculeze valoarea determinantului $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{vmatrix}$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-4x+2=0$.

5p **c)** Fie matricele $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $O_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Să se arate că $A^3+A^2+A=O_3$, unde $A^2=A\cdot A$ și $A^3=A^2\cdot A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x\circ y=2xy-8x-8y+36$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x\circ y=2(x-4)(y-4)+4$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$..

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=36$.

5p **c)** Știind că operația „$\circ$” este asociativă, să se calculeze $\sqrt{1}\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2009}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se arate că $f(2008)\geq f(2009)$.

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$.

5p **a)** Să se determine $\int f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f^2(x)}{x^2+1}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=e^{\frac{x}{2}}\cdot f(x)$, unde $x\in[0,1]$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul real x știind că numerele $x-1, x+1$ și $2x+5$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Să se determine parametrul real m astfel încât soluțiile reale ale ecuației $x^2-3x+m=0$ să fie inverse una alteia.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg^2 x-4\lg x+3=0$.

5p **4.** După o reducere a prețului cu 15 % un produs costă 680 lei. Să se calculeze prețul inițial al produsului.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care distanța dintre punctele $A(2,m)$ și $B(-m,-2)$ este egală cu $4\sqrt{2}$.

5p **6.** Știind că triunghiul ABC are $BC=10, AC=5$ și $AB=5\sqrt{3}$, să se calculeze $\cos A$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $X=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\left\{X^n \,\middle|\, n\in\{1,2,3\}\right\}$, unde $X^n=\underbrace{X\cdot X\cdot\ldots\cdot X}_{de\ n\ ori}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se verifice că $X^3=I_3$.

5p **b)** Să se calculeze $\det\left(I_3+X+X^2\right)$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $Y\in G$, atunci $Y^{-1}\in G$.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{a+b\sqrt{3}\,\middle|\, a,b\in\mathbb{Z}, a^2-3b^2=1\right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $2+\sqrt{3}\in G$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{2x^2-2}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **c)** Să se arate că $f\left(\sqrt[3]{2009}\right)\le f\left(\sqrt[3]{2010}\right)$.

2. Fie funcția $f:[1,e]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.

5p **a)** Să se determine $\int f'(x)\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

5p **c)** Să se arate că $\int_1^e e^x f(x)\,dx\le e^e-e$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că $\log_3 24 = 1 + 3a$, unde $a = \log_3 2$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $g(x) = bx + a$, unde a și b sunt numere reale. Să se arate că dacă $f(-1) = g(-1)$, atunci $f = g$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x-1} = \frac{1}{4}$.

5p **4.** Să se determine numărul natural nenul n astfel încât numărul submulțimilor cu două elemente ale unei mulțimi cu n elemente să fie egal cu 6.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3,0)$ şi intersectează axa Oy în punctul de ordonată 4.

5p **6.** Să se determine lungimea înălțimii duse din vârful O al triunghiului MON, unde $M(4,0)$, $N(0,3)$ şi $O(0,0)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se notează $X^2 = X \cdot X$.

5p **a)** Să se calculeze AB.

5p **b)** Să se demonstreze că $(A+B)^2 = (A-B)^2 = A^2 + B^2$.

5p **c)** Să se calculeze inversa matricei $(A-B)^2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x * y = 3xy + 3x + 3y + 2$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x * y = 3(x+1)(y+1) - 1$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine numerele reale pentru care $(x^2 - 2) * 5 = -1$.

5p **c)** Știind că legea de compoziție este asociativă, să se calculeze $(-2009) * (-2008) * ... * (-1) * 0 * 1 * ... * 2008 * 2009$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, pentru orice $x > 1$.

5p **b)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(2; e^2)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x) \geq e^2$, pentru orice $x > 1$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n : [1,4] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^n + 4x}$.

5p **a)** Să se verifice că $\int_1^4 f_1(x)\,dx = \frac{14\sqrt{5}}{3}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^4 \frac{x+2}{f_2^2(x)}\,dx$.

5p **c)** Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $g : [1,4] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f_2(x)}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine mulțimea $A=\{x\in\mathbb{N}\mid 2x+1\geq 3x-1\}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_2 x$. Să se calculeze $f(1)+f(4)-f(2)$.

5p **3.** Să se determine $m\in\mathbb{R}^*$ astfel încât soluțiile reale ale ecuației $x^2-3x+m=0$ să aibă semne opuse.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element *n* din mulțimea $\{2,3,4,5\}$, acesta să verifice egalitatea $2^n=n^2$.

5p **5.** Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât punctele $A(1,3)$, $B(2,5)$ și $C(3,m)$ să fie coliniare.

5p **6.** Să se determine coordonatele punctului B știind că punctul $C(3,5)$ este mijlocul segmentului AB, unde $A(2,4)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x&y\\0&6\end{pmatrix}$ cu $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine numărul real x astfel încât $A\cdot B=B\cdot A$.

5p **b)** Să se verifice că $A^2=4(A-I_2)$, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **c)** Să se determine numărul real a astfel încât $A^3-aA^2+4A=O_2$, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale definim legile de compoziție $x\circ y=x+y+3$ și $x*y=xy-3(x+y)+12$.

5p **a)** Să se verifice că $x*y=(x-3)(y-3)+3$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $(x\circ(x+1))+(x*(x+1))=11$.

5p **c)** Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases}x\circ(y-1)=0\\(x+1)*y=x*(y+1)\end{cases}$, cu $x,y\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2-3\sqrt[3]{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1;0)$.

5p **c)** Să se arate că $\frac{x+2}{3}\geq\sqrt[3]{x}$, pentru orice $x>0$.

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{x+1}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1(x+1)\cdot f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **c)** Folosind faptul că $1\leq(x+1)^2\leq 4$ pentru orice $x\in[0,1]$, să se arate că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției f, este un număr din intervalul $\left[\frac{\pi}{28},\frac{\pi}{7}\right]$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine produsul primilor trei termeni ai unei progresii geometrice ştiind că primul termen este egal cu 1 şi raţia este egală cu -2.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x+\log_3 x$. Să se calculeze $f(1)+f(3)$.

5p **3.** Să se determine coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^2-12x+9$.

5p **4.** Să se calculeze $C_5^0+C_5^1-2A_5^1$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy, se consideră punctele $A(3,2)$, $B(2,3)$ şi M mijlocul segmentului AB. Să se determine lungimea segmentului OM.

5p **6.** Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC, ştiind că $BC = 4$ şi măsura unghiului A este de 30°.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $X(a)=I_2+aA$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $A^2=8A$, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se calculeze $\det X(a)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+8ab)$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f=\left(1+X+X^3\right)^{670}-X^{2010}\in\mathbb{Z}[X]$ cu forma algebrică $f=a_{2009}X^{2009}+\ldots+a_1X+a_0$.

5p **a)** Să se calculeze $f(1)+f(-1)$.

5p **b)** Să se arate că suma $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{2009}$ este un număr par.

5p **c)** Să se determine restul împărţirii polinomului f la X^2-1.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se determine ecuaţia asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Să se arate că funcţia f este convexă pe $(0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ se consideră funcţiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\left(x^{n+1}+1\right)\cdot e^x$.

5p **a)** Să se determine $\int f_0(x)\cdot e^{-x}\,dx$.

5p **b)** Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f_1, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 f_{2008}(x)\,dx+\int_0^1 f_{2010}(x)\,dx\geq 2\int_0^1 f_{2009}(x)\,dx$.