MULȚIMEA $\mathbb{Z}_n$, OPERAȚII, TABLA, ECUAȚII, SISTEME

(N1)

1) $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{n-1}\}$ unde

$\hat{0} = \{$toate nr care împărț. la n dau rest 0$\}$

$\hat{1} = \{$toate nr. care împărț la n dau rest 1$\}$ etc

Exp.: $\mathbb{Z}_3 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$ unde

$\hat{0} = \{\dots; -6; -3; 0; 3; 6; \dots\}$

$\hat{1} = \{\dots; -2; 1; 4; 7 \dots\}$

$\hat{2} = \{\dots; -1; 2; 5; 8; \dots\}$

Obs 1: în orice clasă $\hat{k}$, numerele merg din n în n

Obs 2: în $\mathbb{Z}_n$, elementele $\hat{0}, \hat{1}, \dots, \widehat{n-1}$ se numesc <u>reprezentanți canonici</u>

---

2) <u>Operații în $\mathbb{Z}_n$</u>: adunarea, scăderea, înmulțirea se efect. ca și cu numere naturale, doar că dacă rezultatul nu e în $\mathbb{Z}_n$, pentru a-l aduce în $\mathbb{Z}_n$ sunt 2 metode:

met I: calc. restul împărțirii la n

met II: adunăm sau scădem multiplii de n

Exp.: $\mathbb{Z}_5$: $\hat{4}+\hat{3} = \hat{7} = \hat{2}$ (scad 5)

$\mathbb{Z}_8$: $\hat{7}\cdot\hat{6} = \hat{42} = \hat{2}$ (restul 42:8)

$\mathbb{Z}_7$: $\hat{2}-\hat{5} = -\hat{3} = \hat{4}$ (adun 7)

Obs: la nr. negative se adună multiplii din:

Exp.: în $\mathbb{Z}_6$: $-\hat{4}\hat{1} = -\hat{4}+\hat{4}\hat{2} = \hat{1}$

în $\mathbb{Z}_5$: $-\hat{1}\hat{1} = -\hat{1}\hat{1}+\hat{1}\hat{5} = \hat{4}$

3) <u>tabla</u>: $(\mathbb{Z}_3, \cdot)$

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

4) <u>rezolv. de ec în $\mathbb{Z}_n$</u> se aduc la forma $ax = b$, se face linia din tabla pt a și se aleg valorile lui x convenabile

Exp.: în $\mathbb{Z}_6$, $\hat{2}x + \hat{1} = \hat{5}$

E_1) $\hat{2}x = \hat{4}$, e greșit să scriu $x = \hat{2}$

E_2)

	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$

$\Rightarrow x \in \{\hat{2}; \hat{5}\}$

Obs: Dacă apar ec de grad mai mare sau cu mai multe nec., dăm valori lui x

5) <u>rezolv de sisteme</u>: se folosește metoda reducerii, avem valori posibile care se verifică în ambele ecuații

Exp.: $\begin{cases} \hat{2}x + y = \hat{3} \\ x + \hat{3}y = \hat{4} \end{cases}$ în $\mathbb{Z}_6$

$\begin{cases} \hat{2}x + y = \hat{3} \\ x + \hat{3}y = \hat{4} \mid \cdot \hat{2} \end{cases}$ și scad ec $\Rightarrow$

$y = \hat{3} - \hat{8} \Rightarrow y = -\hat{5} \Rightarrow \boxed{y = \hat{1}}$

înloc $\Rightarrow x + \hat{3}y = \hat{4} \Rightarrow \boxed{x = \hat{1}}$

o verif în sistem $\begin{cases} \hat{2}+\hat{1} = \hat{3} \\ 1+\hat{3} = \hat{4} \end{cases}$ adev $\Rightarrow \begin{cases} x = \hat{1} \\ y = \hat{1} \end{cases}$ soluție

PROPRIETĂȚI ALE LEGILOR DE COMPOZIȚIE (N1)

LEGE INTERNĂ, COMUTATIVITATE, ASOCIATIVITATE, ELEMENT NEUTRU, ELEMENTE SIMETRIZABILE

1) $*$ lege internă pe $M \Leftrightarrow$
$\forall x, y \in M \Rightarrow x * y \in M$

Obs.: $*$ lege internă pe $M \subset A \Leftrightarrow$ $(M, *)$ parte stabilă a lui A în raport cu $*$

2) $*$ comutativă pe $M \Leftrightarrow$
$\forall x, y \in M \Rightarrow x * y = y * x$

3) $*$ asociativă pe M
$\forall x, y, z \in M \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)$

4) $*$ admite el neutru pe $M \Leftrightarrow$
$\exists e \in M$ a.î. $\forall x \in M \Rightarrow x * e = e * x = x$

Obs 1: $\exists e \in M$ apare la început, apoi $\forall x \in M$ pt că e nu are voie să depindă de x

Obs 2: se aduce relația la forma $e(_) = \ldots$, $\forall x \in M \Rightarrow e =$

Obs 3: se pornește cu $x * e = x$, se găsește e, se precizează că $e \in M$ și dacă $*$ comut, se scrie că $x * e = e * x \Rightarrow e$ el neutru, altfel se găsește același e din $e * x = x$

5) toate elem. sunt simetrizabile $\Leftrightarrow$
$\forall x \in M, \exists x' \in M$ cu $x * x' = x' * x = e$

Obs 1: apare prima dată $\forall x \in M$, apoi $\exists x' \in M$ pt că x' poate depinde de x

Obs 2.: se pornește cu $x * x' = e$, se arată că $x' \in M$ și dacă $*$ comutat, se scrie că $x * x' = x' * x \Rightarrow x'$ este simetricul lui x, dacă nu e comut se găsește același x' din $x' * x = e$

Obs 3: un element x este simetrizabil $\Leftrightarrow \exists x' \in M$ cu $x * x' = x' * x = e$

Ex1: Fie $M = (3; \infty)$ și legea $x * y = xy - 3x - 3y + 12$. Studiați proprietățile legii pe M

E1) $*$ lege internă pe $M \Leftrightarrow$
$\forall x, y \in M \Rightarrow x * y \in M$

$x \in M \Rightarrow x > 3 \Rightarrow x - 3 > 0$
$y \in M \Rightarrow y > 3 \Rightarrow y - 3 > 0$

„$\cdot$" $(x-3)(y-3) > 0$
$\Rightarrow xy - 3x - 3y + 9 > 0 \mid +3 \Rightarrow$
$xy - 3x - 3y + 12 > 3 \Rightarrow x * y \in M \Rightarrow$
$*$ lege internă pe M

E2) $*$ comutativă pe $M \Leftrightarrow$
$\forall x, y \in M \Rightarrow x * y = y * x$
$x * y = xy - 3x - 3y + 12$ } $\Rightarrow$ egalitate $\Rightarrow$ $*$ comutativă
$y * x = yx - 3y - 3x + 12$

E3) $*$ asociativă pe $M \Leftrightarrow$
$\forall x, y \in M \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)$
$(x * y) * z = (xy - 3x - 3y + 12) * z =$
$= (xy - 3x - 3y + 12)z - 3(xy - 3x - 3y + 12) - 3z + 12 =$
$= xyz - 3xz - 3yz + 9z + 9x + 9y + 9z - 24$
Analog, dar se calculează, obținem pt $x * (y * z)$ același rezultat $\Rightarrow *$ asociativă pe M

E4) $*$ are el neutru pe $M \Leftrightarrow$
$\exists e \in M$ a.î. $\forall x \in M$: $x * e = e * x = x$
$x * e = x \Rightarrow xe - 3x - 3e + 12 = x$
$\Rightarrow e(x-3) = 4(x-3), \forall x \in M \Rightarrow e = 4 \in M$
din $*$ comut $\Rightarrow x * e = e * x \Rightarrow e = 4$ el neutru

E5) $*$ are toate elem. simetrizabile $\Leftrightarrow$
$\forall x \in M, \exists x' \in M$ cu $x * x' = x' * x = e$
$x * x' = e \Rightarrow xx' - 3x - 3x' + 12 = 4 \Rightarrow$
$x'(x-3) = 3x - 8$. Cum $x \in M \Rightarrow x > 3 \Rightarrow$
$x' = \frac{3x-8}{x-3}$, arătăm că $x' \in M \Leftrightarrow$
$\frac{3x-8}{x-3} > 3 \Leftrightarrow \frac{3x-8}{x-3} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-3} > 0$ adev
Cum $*$ comut $\Rightarrow x * x' = x' * x \Rightarrow x' = \frac{3x-8}{x-3}$ este simetricul lui x, $\forall x \in M$

FORMA RESTRÂNSĂ A LUNEI (N1)

LEGI DE COMPOZIȚIE

- formă restrânsă înseamnă scrierea legii sub forma $x*y=\alpha(x-a)(y-a)+\beta$

Obs.: în cele mai multe cazuri, legea se poate scrie $x*y=\alpha(x-a)(y-a)+a$

Obs!: folosind forma restrânsă se poate deduce, în cazul $x*y=\alpha(x-a)(y-a)+a$ că $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{n \text{ ori}}=\alpha^{n-1}(x-a)^n+a$, însă nu se memorează, se deduce apoi se arată prin inducție

---

Exp1: $x*y=xy-3x-3y+12$, rezolvați ecuația $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{2016 \text{ ori}}=4$

E_1) deducem forma restrânsă

$x*y=x(y-3)-3(y-3)+3$

$x*y=(x-3)(y-3)+3$

E_2) $x*x=(x-3)^2+3$, calculăm

$x*x*x=((x-3)^2+3)*x=$

$=((x-3)^2+3-3)(x-3)+3=$

$=(x-3)^3+3$

E_3) obs. că $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{n \text{ ori}}=(x-3)^n+3, \forall n\geq 2$

arăt prin ind mat

E_4) I $P(2)$: $x*x=(x-3)^2+3$ adev.

II $\mathcal{P}_k$: $P(k)$ adev. $\overset{(?)}{\Rightarrow} P(k+1)$ adev.

unde $P(k)$: $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{k \text{ ori}}=(x-3)^k+3$

$*x=(x-3)^{k+1}+3$

E_5) știm că $P(k)$ adev. $\Rightarrow$

$\underbrace{x*x*\ldots*x}_{k \text{ ori}}=(x-3)^k+3 \,|*x$

$\Rightarrow \underbrace{x*x*\ldots*x}_{(k+1) \text{ ori}}=((x-3)^k+3)*x=$

$=((x-3)^k+3-3)(x-3)+3=$

$=(x-3)^{k+1}+3 \Rightarrow P(k+1)$ adev.

$\Rightarrow P(n)$ adev, $\forall n\geq 2$

E_6) ec. devine:

$(x-3)^{2016}+3=4 \Rightarrow$

$(x-3)^{2016}=1 \Rightarrow$

$x-3=\pm 1$

E_7) $x-3=1 \Rightarrow x=4$

$x-3=-1 \Rightarrow x=2$

E_8) S_p: $x\in\{2;4\}$

MONOIZI

$(M,*)$ monoid $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (M,*) \text{ parte stabilă} \\ * \text{ asociativă pe } M \\ * \text{ are element neutru pe } M \end{cases}$

$(M,*)$ monoid comutativ (abelian)

$\begin{cases} (M,*) \text{ parte stabilă} \\ * \text{ asociativă pe } M \\ * \text{ comutativă pe } M \\ * \text{ are element neutru pe } M \end{cases}$

$(N,*)$ submonoid al $(M,*) \Leftrightarrow N \subset M$ și

$\begin{cases} \forall x,y \in N \Rightarrow x*y \in N \\ e \in N \end{cases}$

Obs.: Dacă $(M,*)$ monoid $\Rightarrow U(M,*)$ el. simetrizabile din M

Exp.: Dacă $(M,*)$ monoid cu $e=3$, găsiți elementele simetrizabile din $(M,*)$ unde $M=\mathbb{Z}\setminus\{2\}$, $x*y=xy-2x-2y+6$

$E_1) \forall x \in M, \exists x' \in M$ a.i. $x*x'=x'*x=e$

$E_2) x*x'=e \Rightarrow xx'-2x-2x'+6=3 \Rightarrow x'(x-2)=2x-3$

$E_3) x \neq 2 \Rightarrow x'=\frac{2x-3}{x-2}$, dar $x' \in M \Rightarrow x' \in \mathbb{Z}\setminus\{2\} \Rightarrow$

$\frac{2x-3}{x-2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{2(x-2)+1}{x-2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2+\frac{1}{x-2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-2 \in D_1$

$\Rightarrow x-2 \in \{\pm 1\} \Rightarrow x \in \{3;1\}$

$U(M,*)=\{3;1\}$

GRUP

(N1)

$(G,*)$ grup $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (G,*) \text{ parte stabilă} \\ * \text{ asociativă} \\ * \text{ are el. neutru} \\ * \text{ are toate elem. simetrizabile} \end{cases}$

$(G,*)$ grup comutativ (abelian) $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} (G,*) \text{ parte stabilă} \\ * \text{ asociativă} \\ * \text{ comutativă} \\ * \text{ are el. neutru} \\ * \text{ are toate elem. simetrizabile} \end{cases}$

Dacă $(G,*)$ grup și $(H,*)$ subgrup al $(G,*) \Leftrightarrow$

$H \subset G$ și $\begin{cases} \forall x,y \in H \Rightarrow x*y \in H \\ \forall x \in H \Rightarrow x' \in H \end{cases}$

Exp.: Se știe că $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ grup abelian. Arătați că $(H,\cdot)$ subgrup unde $H = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

E_1) Arătăm că $H \subset \mathbb{C}$. Evident, $\forall z \in H \Rightarrow z \in \mathbb{C}$. Rămâne să arăt. că $\forall z \in H \Rightarrow z \neq 0$. Pt $z \in H \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow z \neq 0$ (1)

E_2) Arătăm că: $\forall z_1, z_2 \in H \Rightarrow z_1 \cdot z_2 \in H$

$\left.\begin{array}{l} z_1 \in H \Rightarrow |z_1| = 1 \\ z_2 \in H \Rightarrow |z_2| = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow |z_1| \cdot |z_2| = 1 \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = 1 \Rightarrow z_1 \cdot z_2 \in H$ (2)

E_3) Arătăm că $\forall z \in H \Rightarrow \frac{1}{z} \in H$ (pt că inversul la înmulțirea numerelor raționale nenule este $\frac{1}{z}$)

Din $z \in H \Rightarrow |z| = 1, z \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{|1|}{|z|} = \frac{1}{|z|} = 1 \Rightarrow \frac{1}{z} \in H$ (3)

$(\mathbb{C}^*, \cdot)$

MORFISME, IZOMORFISME DE MONOIZI

Dacă $(M,*)$ și $(N,\circ)$ doi monoizi $\Rightarrow f: M \to N$ este morfism de monoizi $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x*y) = f(x) \circ f(y) \\ f(e_*) = e_\circ \end{cases}$

Dacă $(M,*)$ și $(N,\circ)$ doi monoizi și $f: M \to N$ este izomorfism de monoizi $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ bijectivă} \\ f(x*y) = f(x) \circ f(y) \\ f(e_*) = e_\circ \end{cases}$

Obs: f automorfism de monoizi $\Leftrightarrow f$ izomorfism de monoizi a.î. $M = N$ (adică $D_f = Cd_f$)

Exp.: Fie $G = (-1,1)$, $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Arătați că $f: \mathbb{R}_+^* \to G$ este izomorf între monoizii $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ și $(G,*)$

E_1) $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$

E_2) $f(x \cdot y) = \frac{xy-1}{xy+1}$ (1)

E_3) $f(x) * f(y) = \frac{x-1}{x+1} * \frac{y-1}{y+1} = \frac{\frac{x-1}{x+1} + \frac{y-1}{y+1}}{1 + \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{y-1}{y+1}} = \frac{\frac{xy+x-y-1+xy+y-x-1}{(x+1)(y+1)}}{\frac{xy+x+y+1+xy-x-y+1}{(x+1)(y+1)}}$

$= \frac{2(xy-1)}{2(xy+1)}$ (2).

E_4) arăt. că $f(e_\cdot) = e_*$, adică $e_* = 0$ și ar trebui ca

$f(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-b}{1+1} = 0$ adev. (3)

Din (1)+(2)+(3) $\Rightarrow$ f morfism de monoizi

E_5) $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow f_1 \nearrow \Rightarrow f$ inj. $\Rightarrow f$ biject (4)

E_6) $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$, $f_3 \nearrow \Rightarrow f$ surj

... de monoizi

MORFISME, IZOMORFISME DE GRUPURI

Dacă $(G,*)$ și $(H,\circ)$ 2 grupuri $\Rightarrow f: G \to H$ este morfism de grupuri $\Leftrightarrow f(x*y) = f(x) \circ f(y)$

Dacă $(G,*)$ și $(H,\circ)$ 2 grupuri $\Rightarrow f: G \to H$ este izomorfism de grupuri $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x*y) = f(x) \circ f(y) \\ f \text{ bijectă} \end{cases}$

Obs: f automorfism de grupuri $\Leftrightarrow f$ izomorf de grupuri și $G = H$

Exp: ca cel de la monoizi, doar că nu mai trebuie verificată condiția $f(e_*) = e_\circ$

POLINOM

- expresie de forma $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ unde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ sunt coeficienți

Obs: Dacă $f \in A[X]$ ⇒ toți coeficienții sunt în A, necunoscuta este X

Exp: $f = \sqrt{3} X^2 + X - 2 \in \mathbb{Z}[X]$ fals pt că ar trebui că $\sqrt{3} \in \mathbb{Z}$, $1 \in \mathbb{Z}$, $-2 \in \mathbb{Z}$

fals pt că $\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$

Obs 2: f se mai poate scrie și sub forma $f = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$. sau sub orice altă ordonare a termenilor

Exp: $f = 2X + 5X^3 - 2$ polinom

Obs 3: forma algebrică = formele desfășurate ca mai sus

Exp: $f = (2X-1)^3$ nu are forma algebrică

=) forma algebrică $f = 4X^2 - 4X + 1$

Obs 4: forma canonică a unui polinom = ...terile aper descrescător

... Dacă avem termenii numiți MONOM de ... $a \cdot X^k$

OPERAȚII CU POLINOAME (N1)

1) adunarea, scăderea, înmulțirea se efectuează ca și operațiile cu expresii

2) împărțirea: la cât se caută un termen care înmulțit cu împărțitorul, să dea primul termen de la deîmpărțit. Rezultatul se trece sub deîmpărțit cu semn schimbat, se adună și se reduce acel termen. Procedeul se repetă până când gradul termenului ce rămâne este mai mic decât gradul împărțitorului

Obs.: împărțirea în $\mathbb{Z}_n$ e la fel, doar că, pentru a ne fi mai ușor, facem linia din tablă și coef. dominant de la împărțitor, iar dacă după reducere rămân coef. negativi, adunăm „n" ca să-i facem pozitivi

---

Exp 1: $f = 2x-1$, $g = x^2-3x+2$, se cere: a) $f+g$ b) $f-g$ c) $f \cdot g$

a) $f+g = (2x-1)+(x^2-3x+2) = x^2-x+1$

b) $f-g = (2x-1)-(x^2-3x+2) = -x^2+5x-3$

c) $f \cdot g = (2x-1)(x^2-3x+2) =$

$= 2x^3-6x^2+4x-x^2+3x-2 =$

$= 2x^3-7x^2+7x-2$

Exp 2: $f = 2x^4-x^3+2x+5$ și $g = x-1$, se cere $f:g$

$2x^4-x^3+2x+5 \;\big|\; x-1$

$-2x^4+2x^3 \qquad 2x^3+2x^2+2x+4$

$2x^3+2x+5$

$-2x^3+2x^2$

$2x^2+2x+5$

$-2x^2+2x$

$4x+5$

$-4x+4$

9

$c(x) = 2x^3+2x^2+2x+4$

$R(x) = 9$

Exp 3: în $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$, se cere $f:g$ unde $f = \hat{2}x^3+\hat{4}x^2+\hat{3}x+\hat{4}$, $g = \hat{3}x+\hat{2}$

E1)

	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$

E2) $\hat{2}x^3+\hat{4}x^2+\hat{3}x+\hat{4} \;\big|\; \hat{3}x+\hat{2}$

$-\hat{2}x^3-\hat{3}x^2 \qquad \hat{4}x^2+\hat{2}x+\hat{3}$

$x^2+\hat{3}x+\hat{4}$

$-x^2-\hat{4}x$

$-x+\hat{4}$

$\hat{4}x+\hat{4}$

$-\hat{4}x-\hat{1}$

$\hat{3}$

$C(x) = \hat{4}x^2+\hat{2}x+\hat{3}$

$R(x) = \hat{3}$

TEOREMA ÎMPĂRȚIRII CU REST

$f(x) : g(x) = C(x)$ rest $R(x)$ cu

$\text{gr } R(x) < \text{gr } g(x)$

Obs: proba împărțirii:

$$f(x) = g(x) \cdot C(x) + R(x)$$

Exp: $f(x) = (2x^2 - x - 2)^5$

Se cere restul $f : (x^2 - 1)$

E_1) din probă $\Rightarrow f(x) = (x^2-1)C(x) + R(x)$

cu $\text{gr } R(x) < 2 \Rightarrow R(x) = ax + b$

E_2) $f(x) = (x^2-1)C(x) + ax + b$

E_3) găsim rădăcinile lui (x^2-1)

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow$ { $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ (NORMAL)
sau
cu $\Delta \Rightarrow x_{1,2} = \dots$

E_4) $f(1) = 0 \cdot C(x) + a + b \Rightarrow -1 = a + b$

$f(-1) = 0 \cdot C(x) - a + b \Rightarrow 1 = -a + b$

E_5) $\begin{cases} a + b = -1 \\ -a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0,\ a = -1$

$\Rightarrow R(x) = ax + b \Rightarrow$

$R(x) = -x + 0$

RESTUL LUI $f:(x-a)$

- restul lui $f:(x-a)$ este $f(a)$
- restul lui $f:(x+a)$ este $f(-a)$

(adică este f de rădăcina polinomului la care împart)

Exp: restul $f:(x+1)=?$, $f(x)=(x+2)^{2010}$

E_1) restul lui $f:(x+1)$ este $f(-1)$

E_2) $f(-1)=(-1+2)^{2010}=1^{2010}=1$

$\Rightarrow$ restul este egal cu 1

CONDIȚIA CA UN NUMĂR SĂ FIE RĂDĂCINĂ PT f

$x=a$ e rădăcină pt $f \Leftrightarrow f(a)=0$
(înlocuit în f ne dă zero)

Exp: $f(x)=x^2-3x+2$
verificați dacă sunt rădăcini numerele

a) $x=2$
b) $x=1$
c) $x=-1$

---

a) $f(2)=2^2-6+2=0 \Rightarrow x=2$ rădăcină

b) $f(1)=1-3+2=0 \Rightarrow x=1$ rădăcină

c) $f(-1)=(-1)^2-3(-1)+2=1+3+2=6\neq 0$
$\Rightarrow x=-1$ nu e rădăcină

DIVIZIBILITATEA POLINOAMELOR

Se folosesc 2 metode:

met I: $g \mid f \Leftrightarrow$ restul lui $f:g$ este zero (g divide pe f) și este echivalent cu (f se citește g divide f)

$f:g \Leftrightarrow$ restul lui $f:g$ este zero (f se citește f divizibil cu g)

met II: toate rădăcinile lui $g(x)$ sunt rădăcini pentru $f(x)$, de același ordin de multiplicitate

Exp: Arătați că (x^4-2x^2+1) este divizibil cu (x^2-1)

met I:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 2x^2 + 1 & x^2-1 \\ \hline -x^4 + x^2 & \\ \hline -x^2+1 & \\ x^2-1 & \\ \hline \end{array}$$

$\Rightarrow$ restul este 0

met II: arătăm că toate rădăcinile lui x^2-1 sunt rădăcini pentru $f=x^4-2x^2+1$

E1) rădăcinile lui $x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=1 \end{cases}$

$f(1)=1^4-2\cdot 1^2+1=1-2+1=0$

$f(-1)=(-1)^4-2\cdot(-1)^2+1=1-2+1=0$ $\Big\} \Rightarrow f;g$

T. BEZOUT

$f \vdots (x-a) \Leftrightarrow f(a)=0$

$f \vdots (x+a) \Leftrightarrow f(-a)=0$

Exp: Arătați că $f = x^2 - 7x + 6$ este divizibil cu $g = x-1$

$f(1) = 1^2 - 7 \cdot 1 + 6 = 1 - 7 + 6 = 0$

$\Rightarrow f \vdots (x-1)$

Exp 2: arăt. că $f = x^2 + 7x + 6$ este divizibil cu $g = x+1$

$f(-1) = (-1)^2 + 7 \cdot (-1) + 6 = 1 - 7 + 6 = 0$

$\Rightarrow f \vdots (x+1)$

CONDIȚIA CA $x=\alpha$ SĂ FIE RĂDĂCINĂ MULTIPLĂ

(N1)

met I: $x=\alpha$ rad multiplă de ordin k

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha)=0 \\ f'(\alpha)=0 \\ \dots \\ f^{(k-1)}(\alpha)=0 \\ f^{(k)}(\alpha)\neq 0 \end{cases}$$

adică e rad. de k ori

Exp: $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$

$x=1$ rad multiplă de ordinul ...

$f(1)=1-3+3-1=0$

$f'(x)=3x^2-6x+3 \Rightarrow f'(1)=3-6+3=0$

$f''(x)=6x-6 \Rightarrow f''(1)=0$

$f'''(x)=6 \Rightarrow f'''(1)=6\neq 0$

$\Rightarrow x=1$ rad multiplă de ordin 3

met II: $x=\alpha$ rădăcină multiplă de ordin $k \Leftrightarrow f:(x-\alpha)^k$ și $f\not:(x-\alpha)^{k+1}$

Exp: $f(x)=2(x-2)^4(x-5)$, $x=2$ e ord are(?)

$f(x)\vdots(x-2)^4$ și $f\not\vdots(x-2)^5$

$\Rightarrow x=2$ este 4

RELATIILE LUI VIETE

a) Pt gr II: $ax^2+bx+c=0$

$$\begin{cases} S=-\frac{b}{a} \\ P=\frac{c}{a} \end{cases}$$

b) Pt gr III: $ax^3+bx^2+cx+d=0$

$$\begin{cases} S_1=x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a} \\ S_2=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4=\frac{c}{a} \\ S_3=x_1x_2x_3=-\frac{d}{a} \end{cases}$$

c) Pt gr IV: $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$

$$\begin{cases} S_1=x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{b}{a} \\ S_2=x_1x_2+\dots=\frac{c}{a} \\ S_3=x_1x_2x_3+\dots=-\frac{d}{a} \\ S_4=x_1x_2x_3x_4=\frac{e}{a} \end{cases}$$

Ex: $2x^3+5x-7=0$

$$S_1=-\frac{b}{a}=-\frac{0}{2}=0$$

$$S_2=\frac{c}{a}=\frac{5}{2}$$

$$S_3=-\frac{d}{a}=\frac{7}{2}$$

CALCULAREA SUMEI PĂTRATELOR RĂDĂCINILOR (N1)

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = (S_1)^2 - 2S_2$$

Exp: $2x^4 - 4x^3 + 5x + 2 = 0$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = ?$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (S_1)^2 - 2S_2$$

$$S_1 = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{2} = 2$$

$$S_2 = \frac{c}{a} = \frac{0}{2} = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2^2 - 2 \cdot 0 = 4$$

FORMAREA ECUAȚIEI DE GRAD n DACĂ ȘTIM RĂDĂCINILE

(N1)

$$X^n - S_1 X^{n-1} + S_2 X^{n-2} - S_3 X^{n-3} + \ldots = 0$$

Ex: $x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1$

Se cere ec. de gr III

$E_1) X^3 - S_1 X^2 + S_2 X - S_3 = 0$

$E_2) S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 2 - 2 + 1 = 1$

$S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -4 - 2 + 2 = -4$

$S_3 = x_1 x_2 x_3 = 2 \cdot (-2) \cdot 1 = -4$

$E_3) X^3 - 1 \cdot X^2 + (-4)X - (-4) = 0$

$X^3 - X^2 - 4X + 4 = 0$

DETERMINAREA SUMEI PUTERILOR ASEMENEA ALE EC. DE GRAD III

E_1) $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$ este suma puterilor asemenea

E_2) $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = S_1 = -\frac{b}{a}$

E_3) $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (S_1)^2 - 2S_2$

E_4) $S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, folosim că x_1, x_2, x_3 rad ale ec., le înlocuim în ecuație pe rând, adunăm și folosim sumele anterioare

E_5) $S_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$, folosim că x_1 rad, o înlocuim în ec, apoi înmulțim cu x_1 relația și obținem pe x_1^4, analog în loc pe x_2 și înmulțim cu x_2, analog cu x_3. Adunăm relațiile și folosim sumele anterioare

E_6) $S_{-1} = \frac{x_1 x_2}{x_1} + \frac{x_1 x_3}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{S_2}{S_3}$

Ex1: $2X^3 - 3X^2 + X - 1 = 0$ și $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, se cere:

a) $S_{-1} = ?$ b) $S_1 = ?$ c) $S_2 = ?$

d) $S_3 = ?$ e) $S_4 = ?$

E_1) $2X^3 - 3X^2 + X - 1 = 0$, din VIETE

$\Rightarrow S_1 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$

$S_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$

$S_3 = -\frac{d}{a} = \frac{1}{2}$

E_2) $S_{-1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3}$

$= \frac{S_2}{S_3} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

E_3) $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$

E_4) $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (S_1)^2 - 2S_2 =$

$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$

E_5) $S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$

x_1 rad $\Rightarrow 2x_1^3 - 3x_1^2 + x_1 - 1 = 0$

x_2 rad $\Rightarrow 2x_2^3 - 3x_2^2 + x_2 - 1 = 0$

x_3 rad $\Rightarrow 2x_3^3 - 3x_3^2 + x_3 - 1 = 0$

$+$ ": $2S_3 - 3S_2 + S_1 - 3 = 0 \Rightarrow$

$2S_3 - 3 \cdot \frac{5}{4} + \frac{3}{2} - 3 = 0 / \cdot 4$

$\Rightarrow 8S_3 - 15 + 6 - 12 = 0 \Rightarrow 8S_3 = 21$

$\Rightarrow S_3 = \frac{21}{8}$

E_4) $S_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$

x_1 rad $\Rightarrow 2x_1^3 - 3x_1^2 + x_1 - 1 = 0 / \cdot x_1 \Rightarrow$

$2x_1^4 - 3x_1^3 + x_1^2 - x_1 = 0$, analog

$2x_2^4 - 3x_2^3 + x_2^2 - x_2 = 0$ și

$2x_3^4 - 3x_3^3 + x_3^2 - x_3 = 0$

$+$ ": $2S_4 - 3S_3 + S_2 - S_1 = 0$

$\Rightarrow 2S_4 - 3 \cdot \frac{21}{8} + \frac{5}{4} - \frac{3}{2} = 0 / \cdot 8$

$16S_4 - 63 + 10 - 12 = 0$

$\Rightarrow 16S_4 = -65 \Rightarrow S_4 = -\frac{65}{16}$

GĂSIREA RĂDĂCINILOR ÎNTREGI SAU RAȚIONALE

(E_1) Posibilele rădăcini întregi sunt printre divizorii termenului liber. Dacă niciunul nu verifică ecuația $\Rightarrow f$ nu are rădăcini întregi

(E_2) Posibilele rădăcini raționale sunt printre $\frac{D_{\text{termen liber}}}{D_{\text{coef dominant}}}$. Dacă niciuna nu verifică ecuația $\Rightarrow f$ nu are răd. raționale

Exp1: $f = X^3 - X + 1$. Studiați dacă f are răd întregi

$D_1 = \{\pm 1\}$, $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow 1$ nu e rădăcină

$f(-1) = -1 + 1 + 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow -1$ nu e rădăcină

$\Rightarrow f$ nu are răd întregi

Exp2: $f = 4X^3 - X + 9$, studiați dacă f are răd raționale

$$\frac{D_9}{D_4} = \frac{\{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}}{\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{9}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{9}{4}\}$$