Ovidiu Bădescu

MATE ESENȚIALĂ pentru GIMNAZIU

Algebră 3

Geometrie..... 41



Editura Neutrino

Titlul: Matematică esențială pentru gimnaziu
Autor: Ovidiu Bădescu
ISBN 978-973-8916-99-9

Ce aduce nou acest carnețel?

- o "grămadă" de formule, spun eu aproape suficiente pentru a lua evaluarea națională cu notă foarte mare.

- metode de abordare a unor tipuri de probleme cu o frecvență mare prin variantele de evaluare

Cum îl veți folosi?

- veți începe să rezolvați variantele de evaluare şi de fiecare dată când nu veți şti o formulă sau o metodă de rezolvare veți căuta în acest memorator.

- veți nota formula nou găsită pe un carnețel al vostru astfel încât înainte de evaluare să aveți propriul vostru memorator

- veți repeta înainte de evaluare formulele din carnețelul vostru, nu are sens să memorați toate formulele scrise de mine

- dacă veți întâlni formule care nu sunt în memorator, întrebați-vă profesorul şi notați-le pe ultimele două pagini libere

Nu pot încheia fără a mulțumi:

- Mihaelei Puşcaşu pentru lipsa ei de somn şi uşurința cu care a început să înțeleagă matematica

- elevilor mei a căror veşnică întrebare:"când mai faceți carnețel de formule?" a început să-mi creeeze insomnii

- profesorilor din județ şi din țară care au epuizat în mai puțin de o lună ediția anterioară a memoratorului

Ovidiu Bădescu

© 2014, Editura „Neutrino"
Toate drepturile rezervate
Mobil: 0741017700
http:www.neutrino.ro
E-mail: contact@neutrino.ro

ALGEBRĂ

1) Mulțime - colecție de obiecte ce apar fie prin indicarea acestor elemente, fie prin precizarea unei proprietăți specifice acestor obiecte.

Exp.1: $A=\{2;3;5\}$

Exp.2: $A=\{x\,|\,2x+1=3\}$

Obs.: obiectele mulțimii se numesc elemente ale mulțimii respective

Obs.2: dacă apar acolade, nu contează ordinea în care apar elementele, fiecare element apărând o singură dată

Exp: $A=\{2;3;5\}$ sau $A=\{3;2;5\}$ este acelaşi lucru

2) Mulțimea vidă - este mulțimea care nu are nici un element, se notează $\varnothing$

Exp.: $A=\{x\,|\,2<x$ şi $x<1\}$ ne va da $A=\varnothing$

3) Apartenența: un element aparține unei mulțimi dacă acel element este conținut în mulțimea respectivă, se notează "$\in$",

Exp.: $2\in A$; $4\notin A$

4) Egalitatea a două mulțimi - două mulțimi sunt egale doar dacă au aceleaşi elemente, indiferent de ordinea în care apar aceste elemente

Exp.: $\{2;4\}=\{4;2\}$

Obs.: $(2;4)\neq(4;2)$

5) Incluziune - $A\subset B\Leftrightarrow$ toate elementele lui A sunt în mulțimea B

Exp.: $\{2,4\}\subset\{4,2\}$ $\{2,4\}\subset\{2,4\}$ $\{2,4\}\not\subset\{2,4\}$

Obs.1: $\varnothing\subset$ orice mulțime

Obs.2: Orice mulțime este inclusă în ea însăşi, $A\subset A,\forall A$ mulțime

6) Submulțime a unei mulțimi - este o mulțime inclusă în mulțimea inițială

Exp.: Dacă $A=\{2;3;5\}$, atunci exemple de submulțimi ale lui A sunt: {2;3}; {2}; $\varnothing$

Obs.: $\varnothing$ este submulțime a oricărei mulțimi

7) Reuniunea a două mulțimi – este mulțimea formată din elementele comune şi necomune ale acestor mulțimi, puse în indiferent ce ordine, fiecare element apărând o singură dată. Se notează $A\cup B$

Exp.: A = {2;3;5}şi B = {3;4;5} $\Rightarrow A\cup B=\{2,3,4,5\}$

Obs.: în nicio mulțime nu apare de doua ori acelaşi element

8) Intersecția a două mulțimi –este mulțimea formată din elementele comune ambelor mulțimi, puse în indiferent ce ordine, fiecare element apărând o singură dată. Se notează $A\cap B$

Exp.: $A=\{2,3,5\}$ şi $B=\{3,4,5\}\Rightarrow$ A$\cap$B = {3;5}

Obs.: Se numesc **mulțimi disjuncte** mulțimile care nu au nici un element comun, adică $A\cap B=\varnothing$

9) Diferența a două mulțimi – este mulțimea formată din elementele care aparțin primei mulțimi şi nu aparțin celei de-a doua, se notează $A-B$ sau A \ B

Exp.: $A=\{2,3,5\}$ şi $B=\{3,4,5\}\Rightarrow$ A \ B = {2}

10) Produsul cartezian a două mulțimi-este mulțimea formată din perechi de forma (a,b), unde $a\in A,b\in B$

Exp.: $A=\{2,3,5\}$ şi $B=\{3,4,5\}$

$\Rightarrow A\times B=\{(2,3),(2,4),(2,5),(3,3),(3,4),(3,5),(5,3),(5,4),(5,5)\}$

11) Mulțimi finite, mulțimi infinite

mulțime finită-are un număr finit de elemente

mulțime infinită -are un număr infinit de elemente

Exp.: mulțime finită: {3;4;5}; {1}; $\varnothing$

mulțimi infinite: $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$

Obs.: $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ este mulțimea numerelor iraționale

12) Cardinalul unei mulțimi - numărul de elemente din mulțimea respectivă

Exp.: card $\mathbb{N} = \infty$; card $\varnothing = 0$

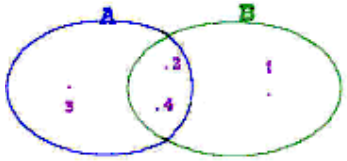
13) Determinarea unor mulțimi: se fac diagrame si se situează elementele în cele două mulțimi.

Obs.1: diagramele se fac ca şi mulțimi care se intersectează, chiar dacă nu se precizează acest lucru.

Obs.2: se foloseşte întâi intersecția, apoi diferența celor două mulțimi şi abia la final reuniunea (căci din reuniune nu ştim exact unde sunt elementele).

Exp: $A = ?, B = ?$ astfel încât $A \cup B = \{1,2,3\}$

$A \cap B = \{2;4\}, A \setminus B = \{3\}$



Prima dată punem elementele 2 şi 4 în intersecție, apoi punem pe 3 în A, abia apoi completăm folosind reuniunea=>

$A = \{2,3,4\}, B = \{1,2,4\}$

14) Mulțimi de numere:

a) Numere naturale-se notează cu $\mathbb{N}$ şi $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;.....\}$

$\mathbb{N}^* = \{1;2;3;.....\}$, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

b) Numere întregi-se notează cu $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Z} = \{-3;-2;-1;0;1;2;3;.....\}$

$\mathbb{Z}^* = \{-3;-2;-1;1;2;3;.....\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

c) Numere raționale se notează

$\mathbb{Q}$= {fracții zecimale cu număr finit de zecimale} $\cup$ {fracții periodice} $\cup$ {fracții ordinare}

$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

d) Numere reale-se notează cu $\mathbb{R}$ şi conține toate numerele,

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

e) Numere iraționale $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sunt numerele reale care nu sunt raționale (au o infinitate de zecimale)

Obs.: fracțiile zecimale cu un număr infinit de zecimale care nu se repetă, radicalii care nu se extrag, numărul π, toate sunt numere iraționale

Exp: $2,3434... \in \mathbb{Q}$, căci $2,3434... = 2,(34) \in \mathbb{Q}$ dar $2,34567... \notin \mathbb{Q}$

Obs 1: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, adică numerele iraționale sunt numere reale

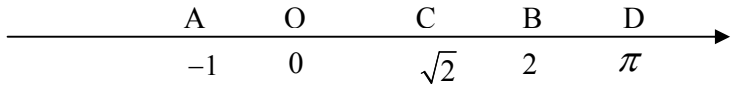
Obs. 2: se pot efectua operații cu aceste mulțimi

Exp.: $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \bigcap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$,

$\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}, A \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$, $\forall$A mulțime, $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}, A \cap \mathbb{R} = A$, $\forall$A mulțime

15) Axa numerelor - o dreaptă la care fiecare punct corespunde unui număr real, dreaptă ce are o origine (ce corespunde numărului 0), un sens şi o unitate de măsură.

Exp.: Să se reprezinte pe axa numerelor punctele ce corespund numerelor din paranteză: $A(-1), B(2), C(\sqrt{2}), D(\pi)$



Obs.: Chiar dacă nu se precizează, trebuie fixată şi originea.

16) Compararea numerelor reale - este mai mic numărul din stânga.

Exp.: $-1 < 0 < \sqrt{2} < 2 < \pi$

17) Scrierea unui număr natural în baza 10

$\overline{a_1 a_2 .... a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + ... + a_{n-1} \cdot 10^1 + a_n$, $a_1 \neq 0$

Exp.: $\overline{abc} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$

Obs.1: $b, c = \overline{0,9}$ (b, c pot fi orice cifre) dar a = $\overline{1,9}$

Obs.2: puterea lui 10 este numarul de cifre care apar după cifra noastră

18) Propoziție - un enunț despre care putem spune că este adevărat sau că este fals.

Exp.1: *"Elevii mei sunt deştepți."* – este propoziție

"*Viitorii mei elevi o să fie deştepţi.*" - este un enunţ, deoarece nu pot afirma cum vor fi viitorii elevi

Obs.: Propoziţiile pot fi adevărate sau false, notate cu **A** respectiv cu **F.**

Exp.2: $3 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ propoziţie adevărată, iar $3 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este propoziţie falsă

Obs.2: negarea propoziţiei înseamnă schimbarea valorii ei de adevăr.

Exp.3: "Caraş-Severin e un judeţ din România." - e o propoziţie adevărată, iar negarea ei este "Caraş-Severin nu e un judeţ din România." şi e o propoziţie falsă.

19) Teorema împărţirii cu rest – Oricare ar fi numerele naturale a şi b, $b \neq 0$, există două numere naturale unice C şi R numite cât, respectiv rest, astfel încât: $a : b = C$ rest R, $0 \leq R < b$

Obs.1: a e deîmpărţit şi b împărţitor

Obs.2: Proba împărţirii cu rest: $a = b \cdot C + R$

20) Divizibilitate pe numere întregi

a **este divizibil** cu b se notează $a \vdots b \Leftrightarrow$ restul lui $a : b$ este 0

b **divide** pe a se notează $b / a \Leftrightarrow$ restul lui $a : b$ este 0

Obs.1: $a \vdots b \Leftrightarrow b / a$

Obs.:2: $0 \vdots a, \quad \forall a \in \mathbb{Z}$

$a \vdots 1, \quad \forall a \in \mathbb{Z}$

$a \vdots a, \quad \forall a \in \mathbb{Z}$

$a \vdots (-1), \forall a \in \mathbb{Z}$

divizor al lui n **:** număr la care n se împarte exact

multiplu al lui n **:** număr care se împarte exact la n

Exp: Mulţimea divizorilor lui 6 este $D_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

Mulţimea multiplilor lui 6 este $M_6 = \{0; \pm 6; \pm 12; \ldots\}$

Obs.: 0 este multiplu al oricărui număr întreg

Obs.3: orice număr natural are **divizori proprii şi divizori improprii** (aceşti divizori se consideră doar naturali).

Divizori improprii – "nu divid, nu sparg numărul" sunt 1 şi numărul însuşi

Divizori proprii – "divid, sparg numărul" sunt ceilalţi divizori

Exp: $n = 6 \Rightarrow$ divizori improprii: 1 şi 6, iar divizori proprii sunt 2 şi 3.

21) Proprietăţi ale relaţiei de $\vdots$ **sau** $/$

1) $\left.\begin{matrix} a \mid b \\ a \mid c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \mid b + c$ şi $a \mid b - c$

2) $a \mid b \Rightarrow a \mid n \cdot b, \ \forall n \in \mathbb{Z}$

3) $a \mid a, \forall a \in \mathbb{Z}$

4) $1 \mid a, \forall a \in \mathbb{Z}$

5) $a \mid 0, \forall a \in \mathbb{Z}^*$

6) $a \mid b$ şi $b \mid c \Rightarrow a \mid c, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

7) Dacă $a, b \in \mathbb{Z}$ din $a \mid b$ şi $b \mid a \Rightarrow a = \pm b$

Dacă $a, b \in \mathbb{N}$ din $a \mid b$ şi $b \mid a \Rightarrow a = b$

Exp.: $n = ?, \ n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\frac{3n+1}{n+2} \in \mathbb{Z}$

Soluţie: $n + 2 \mid 3n + 1$.

Dar $n + 2 \mid n + 2 \Rightarrow n + 2 \mid 3(n + 2) \Rightarrow n + 2 \mid 3n + 6$. Avem aşadar

$$\left.\begin{matrix} n + 2 \mid 3n + 1 \\ n + 2 \mid 3n + 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow n + 2 \mid 3n + 1 - (3n + 6) \Rightarrow (n + 2) \mid -5$$

$$\Rightarrow n + 2 \in D_{-5} = \{-5; -1; 1; 5\} \Rightarrow n \in \{-7; -3; -1; 3\}$$

23) Criterii de divizibilitate – reguli care precizează când a este divizibil cu b, fără a face împărţirea lui a la b :

1) n este divizibil cu 2 $\Leftrightarrow$ n are ultima cifră pară

2) n este divizibil cu 3 $\Leftrightarrow$ n are suma cifrelor divizibilă cu 3

3) n este divizibil cu 4 $\Leftrightarrow$ n are numărul format cu ultimele 2 cifre divizibil cu 4

4) n este divizibil cu 5 $\Leftrightarrow$ n are ultima cifră 0 sau 5

5) n este divizibil cu 9 $\Leftrightarrow$ n are suma cifrelor divizibilă cu 9

6) n este divizibil cu 10 $\Leftrightarrow$ n are ultima cifră 0
7) n este divizibil cu 25 $\Leftrightarrow$ n are numărul format cu ultimele 2 cifre divizibil cu 25
8) n este divizibil cu 100 $\Leftrightarrow$ n are ultimele două cifre 0

24) Numere pare, numere impare

a **este număr par** $\Leftrightarrow a \vdots 2$, adică a are ultima cifră pară**,** ***iar*** b **este impar** $\Leftrightarrow b \not\vdots 2$**,** adică b are ultima cifră impară

Obs.1: mulțimea numerelor pare se notează $2\mathbb{N}$, iar un număr par se notează $2n$
Obs.2: mulțimea numerelor impare se notează $2\mathbb{N}+1$, iar un număr impar se notează $2n+1$

24) Numere prime: au exact doi divizori distincți naturali
numere compuse: au mai mult de doi divizori distincți naturali
Exp.: 2 este număr prim, iar 4 este compus
Obs.1: 1 nu e prim, nu e compus, iar 0 este compus
Obs.2: singurul număr prim si par este 2

25) Descompunere în factori primi:

Etapa 1) dacă ultima cifră este 10^n se scrie $2^n \cdot 5^n$
Etapa 2) se încearcă, pe rând, celelalte numere prime
Etapa 3) se scrie apoi numărul ca produs de factori primi, factori primi eventual ridicați la putere
Exp.: descompuneți în produs de factori primi numărul $n = 7500$

7500	$2^2 \cdot 5^2$
75	3
25	5^2
1	

Deci $n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^4$

26) Algoritm de a vedea dacă un număr este prim sau compus

E1) dacă numărul este mic, îl descompunem în factori primi să vedem câți divizori are acel număr
E2)dacă numărul este mai mare, îl împărțim pe rând la toate numerele prime începând cu 2

E3) dacă găsim un număr la care se împarte, atunci numărul nostru nu este număr prim
E4) dacă nu găsim niciun număr la care se împarte, continuăm până obținem un cât mai mic sau egal cu împărțitorul, iar în acest caz numărul inițial este prim

27) Aflarea celui mai mare divizor comun(c.m.m.d.c.) şi cel mai mic multiplu comun(c.m.m.m.c)

c.m.m.d.c. – se descompun numerele în factori primi, iar **c.m.m.d.c**. este egal cu produsul factorilor comuni la puterea cea mai mică, îl notăm (a,b)

c.m.m.m.c. - se descompun numerele în factori primi, iar **c.m.m.m.c**. este format din produsul factorilor comuni şi necomuni la puterea cea mai mare, îl notăm cu $[a,b]$

Obs.: $(a,b)\cdot[a,b] = a \cdot b$

28) Numere prime între ele: au cel mai mare divizor comun pe 1, se notează $(a,b)=1$

Obs.: două numere pot fi prime între ele fără a fi neapărat numere prime.
Exp.: $a=9$ şi $b=100$ sunt numere prime între ele, însă ele nu sunt numere prime

29) Mulțimea numerelor raționale se notează cu $\mathbb{Q}$ şi

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\} \cup \{\text{fracții zecimale cu număr finit de zecimale}\}$$

Numerele raționale conțin **fracții ordinare (apare linie de fracție)** şi **fracții zecimale** (nu apare linie de fracție, apare însă virgula)

30) Fracții ordinare - apare linia de fracție

a) au forma $\frac{a}{b}, b \neq 0$, unde a se numeşte numărător, iar b numitor

b) fracții subunitare: $\frac{a}{b} \in (0,1)$,

Exp.: $\frac{2}{3}$ fracție subunitară

c) fracții echiunitare: $\frac{a}{b}=1$ sau $\frac{a}{b}$ cu $a=b$

Exp.: $\frac{3}{3}$ fracție echiunitară

d) fracții supraunitare: $\frac{a}{b}>1$

Exp.: $\frac{5}{4}$ fracție supraunitară

e) fracții egale: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$

Exp.: $\frac{5}{4}=\frac{10}{8}$

31) Fracții ireductibile: $\frac{a}{b}$ cu $(a,b)=1$, adică cel mai mare divizor comun al lui a şi b este 1, sunt fracții care nu se mai pot simplifica

32) Fracții zecimale – sunt de mai multe tipuri:

Tip I. - fracții zecimale finite – au un număr finit de zecimale, exp. $a=4,1$

Tip II: - sunt fracții zecimale periodice – au un număr infinit de zecimale care se repetă.

Exp. $a=4,121212.....$ sau $b=4,1232323.....$

Aceste fracții periodice se reîmpart în:

Tip II.a) fracții periodice simple – cifrele încep să se repete imediat după virgulă, exp.: $a=4,121212.....$

Tip II.b) fracții periodice mixte – apar şi alte cifre între virgulă şi cifrele care încep să se repete după virgulă, exp.: $b=4,1232323.....$

33) Transformarea fracțiilor ordinare în zecimale – se realizează prin împărțire până obținem restul 0. Dacă la cât, zecimalele se repetă atunci avem fracții periodice.

Exp.: $\frac{21}{10}=2,1:\ \frac{19}{9}=2,(1);\ \frac{190}{90}=2,1(1)$

34) Transformarea fracțiilor zecimale în ordinare

Exp 1: $2,1=\frac{21}{10}$ *Exp 2:* $2,(1)=\frac{21-2}{9}$ *Exp 3:* $2,1(1)=\frac{211-21}{90}$

35) Compararea numerelor reale

Tip I. toate numerele sunt fracții ordinare-se aduc la acelaşi numitor şi se compară numărătorii

Exp. $a=\frac{2}{3};b=\frac{4}{7};c=\frac{9}{6}$. Numitorul comun este 126, pe a îl amplificăm cu 42, pe b cu 18, pe c cu 21 şi obținem

$a=\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 42}{3\cdot 7\cdot 6}=\frac{84}{126}$,

$b=\frac{4}{7}=\frac{4\cdot 18}{3\cdot 7\cdot 6}=\frac{72}{126}$,

$c=\frac{9}{6}=\frac{9\cdot 21}{3\cdot 7\cdot 6}=\frac{189}{126}$,

deci evident $a<b<c$

Tip II: Comparați următoarele fracții zecimale $a=2,(4)$, $b=2,(34)$, $c=2,34$ şi $d=2,3(4)$

Soluție: $a=2,(4)=2,4444...$ I

$b=2,3(4)=2,3434...$ III

$c=2,34=2,3400....$ IV

$d=2,3(4)=2,3444...$ II

deci $c<b<d<a$

36) Modulul unui număr real (se mai numeşte şi valoarea absolută): $|a|=\begin{cases}-a, & a<0\\ a, & a\geq 0\end{cases}$

Obs.1: modulul unui număr pozitivează numărul.
Obs.2: modulul unui număr real exprimă distanța de la acel număr la origine.

Exp.1: $|-3|=3$; deci distanța de la -3 la origine este 3

Analog pentru numerele: $|2|=2$; $|0|=0$

Exp.2: $|\pi-2|=?$. Deoarece

$\pi=3,14....\Rightarrow \pi-2>0\Rightarrow|\pi-2|=\pi-2$

Exp: $|2-\pi|=?$. Deoarece

$\pi=3,14....\Rightarrow 2-\pi<0\Rightarrow|2-\pi|=-(2-\pi)=\pi-2$

Obs. 1: $|x|=|y|\Leftrightarrow x=\pm y$

Obs. 2: $|x|\geq 0$

Obs. 3: $|x|+|y|=0\Leftrightarrow x=0$ şi y=0

37) Opus, invers

opusul numărului x este $-x$, iar **inversul** numărului x este $\frac{1}{x}$

Exp.: $x=2\Rightarrow$ opusul este -2, iar inversul este $\frac{1}{2}$

Exp.2: $x=-\frac{2}{3}\Rightarrow$ opusul este $\frac{2}{3}$, iar inversul este $-\frac{3}{2}$

38) Parte întreagă - primul întreg mai mic sau egal cu numărul nostru

Exp.: $[2,7]=2;[2]=2;[-2,7]=-3,[-2]=-2$

parte fracționară: $\{x\}=x-[x]$

Exp.: $\{2,7\}=2,7-[2,7]=2,7-2=0,7$

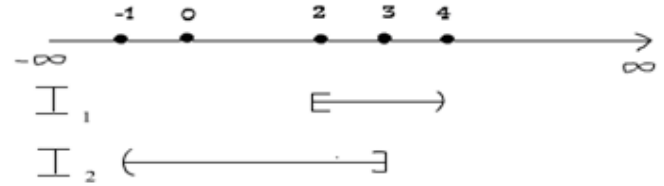
$\{-2,7\}=-2,7-[-2,7]=-2,7-(-3)=-2,7+3=0,3$

39) Aproximărea numerelor reale: n=2,31456
a) **aprox. prin lipsă**-se păstrează doar cifrele care se cer, restul cifrelor nu se mai scriu
b) **aprox. prin adaos** – ultima cifră care se cere, se măreşte cu o unitate, restul nu se mai scriu
Exp.: n=2,31456
aprox. prin lipsă fără zecimale: n=2;
aprox. prin lipsă cu o zecimală: n=2,3, etc.
aprox. prin adaos fără zecimale: n=3;
aprox. prin adaos cu o zecimală: n=2,32;

40) Intervale din $\mathbb{R}$ **-** este mulțimea tuturor numerelor reale cuprinse între capetele intervalului, este de fapt o "bucată din axa numerelor"

Se notează: $[a;b]$, $(a;b)$, $[a;b)$ sau $(a;b]$

Obs.: Dacă apare paranteză dreaptă, atunci acel interval conține numărul din capăt, dacă apare paranteză rotundă, atunci acel interval nu conține numărul din acel capăt.
Exp.: [2;4) → îl conține pe 2, conține toata bucata dintre 2 si 4, nu conține 4
*Obs.*2: reprezentarea pe axă



41) Operații cu intervale – se situează intervalele pe axă, preferabil unul sub celălalt, şi se folosesc definițiile operațiilor de $\cap,\cup,\setminus$

a) $\cap$ → bucata comună
b) $\cup$ → să fie cel puțin într-un interval
c) $\setminus$ → să fie în primul, dar nu şi în al doilea

Exp.: $I_1=(\infty;3)$ $I_2=[-4;5)$ $I_3=(2;4)$

a) $I_1\cap I_2=[-4;3)$ b) $I_1\setminus I_2=(-\infty;-4)$

c) $I_2\setminus I_1=[3;5)$ d) $I_2\setminus I_3=[-4;2]\cup[4,5)$

e) $I_1\cup I_2=(-\infty;5)$ f) $I_1\cap I_3=(2;3)$

42) Adunarea (săderea) numerelor reale: Dacă $a,b\in\mathbb{R},$, se cere $S=a+b$

Cazul I: dacă a şi b au acelaşi semn, se adună modulele celor două numere şi se pune semnul comun

Cazul II. Dacă a şi b au semne diferite, scădem din cel cu modul mai mare pe cel cu modulul mai mic, şi punem semnul celui cu modulul mai mare (adică scădem din numărul cel mai îndepărtat de origine pe cel mai apropiat de origine şi punem semnul celui mai îndepărtat de origine)

Exp: $S=-2+(-5)$. Deoarece $a=-2$ şi $b=-5$ au acelaşi semn, vom aduna $|-2|+|-5|=7$ şi apoi punem semnul "$-$", aşadar $S=-7$

Exp.2: $S=2+(-5)$. Deoarece $a=2$ şi $b=-5$ au semen diferite, vom face scăderea $|-5|-|2|=3$ şi apoi punem semnul celui mai îndepărtat de origine, adică "$-$", aşadar $S=-3$

Obs.: semnul "+" în faţa unui număr scris în paranteză dispare şi rămâne semnul din paranteză, iar semnul"$-$" în faţa unui număr scris în paranteză îi schimbă semnul

Exp.: $+(-2)=-2;-(-2)=2;-(+2)=-2$

Obs.2: dacă în faţa unui număr nu apare nici un semn, însemnă că el are semnul "+"

Obs.3: dacă cele două numere sunt fracţii ordinare, atunci pentru a le aduna sau scădea trebuie să le aducem la acelaşi numitor.

Exp.: $\overset{7)}{\frac{4}{5}}+\overset{5)}{\frac{2}{7}}=\frac{4\cdot7+2\cdot5}{5\cdot7}=\frac{38}{35}$

Exp.2: $\overset{7)}{\frac{4}{5}}-\overset{5)}{\frac{2}{7}}=\frac{4\cdot7-2\cdot5}{5\cdot7}=\frac{28-10}{35}=\frac{18}{35}$

43) Înmulţirea (împărţirea) numerelor reale - se înmulţesc modulele celor două numere şi se foloseşte regula semnelor la înmulţire(aceeaşi ca şi regula semnelor la împărţire)

Regula semnelor este: "$+$"$\cdot$"$+$"$=$"$+$" "$-$"$\cdot$"$-$"$=$"$+$" "$-$"$\cdot$"$+$"$=$"$-$" "$+$"$\cdot$"$-$"$=$"$-$"

Exp.: $(-2)\cdot3=-6$ $(-2)\cdot(-3)=6$

Obs.3: dacă cele două numere sunt fracţii ordinare, atunci pentru a le înmulţi înmulţim numărătorii între ei, iar pentru a le împărţi înmulţim prima fracţie cu cea de-a doua inversată

Exp.: $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{4\cdot2}{5\cdot7}=\frac{8}{35}$ şi $\frac{4}{5}:\frac{2}{7}=\frac{\cancel{4}}{5}\cdot\frac{7}{\cancel{2}}=\frac{2}{5}\cdot7=\frac{14}{5}$

Obs.4: Există fracţii etajate, iar pentru transformarea lor în fracţii simple, folosim că $\frac{a}{b}$ înseamnă $a:b$, deci vom împărţi numărătorul la numitor, adică înmulţim numărătorul cu inversul numitorului. Este foarte important în dreptul cărei linii de fracţii se pune "$=$"

Exp.: $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{14}{15}$

Exp.2: $\frac{\frac{2}{5}}{7}=2\cdot\frac{7}{5}=\frac{14}{5}$

Exp.3: $\frac{\frac{2}{5}}{7}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{7}=\frac{2}{35}$

44) Ridicarea la putere a numerelor reale -definiţia puterilor:

dacă $a\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{de n ori}}$

Obs.: a se numeşte bază, iar n se numeşte exponent

Obs.: proprietăţi ale puterilor:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\qquad$ $a^m : a^n = a^{m-n}$

$\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}$ $\qquad$ $a^1 = a$

$a^0 = 1, \forall a \neq 0$ $\qquad$ $0^n = 0, \forall n \neq 0$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \forall a \neq 0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \forall b \neq 0$ $\qquad$ $\left(a \cdot b\right)^n = a^n \cdot b^n$

Obs.1:nu există 0^0

Obs.2: puterile etajate $2^{3^2} = 2^9$

Obs.3: compararea puterilor – se face prin aducerea sau la acelaşi exponent, sau la aceeaşi bază.

Exp: Comparaţi numerele: $a = 2^{63}$ şi $b = 3^{42}$

$63 = 3^2 \cdot 7$ $\qquad$ $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

$2\,2^{63} = \left(2^3\right)^{3\cdot 7} = 8^{21}$ $\qquad$ $3^{42} = \left(3^2\right)^{3\cdot 7} = 9^{21}$ şi cum $8^{21} < 9^{21} \Rightarrow a < b$

45) Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect

$\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2$

Exp.: $\sqrt{9} = 3$ căci $9 = 3^2$

46) Algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr real (extragerea radicalului)

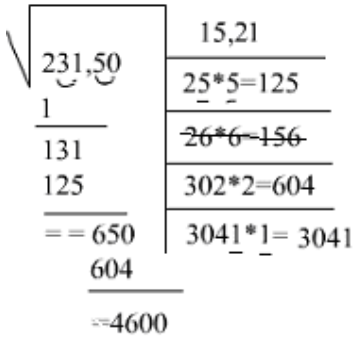
E1) se împarte numărul în grupe de 2 cifre, începând de la virgulă către partea stângă şi apoi înspre dreapta. Dacă partea din dreapta nu are număr par de cifre, se completează cu o cifră de 0.

E2) se caută **cea mai mare cifră** care ridicată la pătrat să dea exact primul grup de cifre sau mai mic decât el *(în cazul nostru, cifra căutată ridicată la pătrat trebuie să dea 2 sau mai mică decât 2. Evident,* $1^2 = 1 < 2$, $2^2 = 4 > 1$ *fals, aşadar prima cifră a rezultatului este 1)*

E3) se scade din primul grup pătratul cifrei obţinute, se coboară apoi grupul de cifre care urmează*(deci* $2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$*, se coboară apoi grupul de 2 cifre şi obţinem* 131*)*

E4) în dreapta se dublează rezultatul obţinut şi ar trebui completat cu **cea mai mare cifră** astfel încât înmulţit cu aceeaşi cifră să dea numărul obţinut prin coborâre în partea stângă sau un număr mai mic decât el.(*1 dublat dă 2, apoi se caută cea mai mare cifră x astfel încât* $\overline{2x} \cdot x$ *să dea 131 sau mai mic decât 131. Astfel,* $25 \cdot 5 = 125 < 131$*,posibil cifra căutată este 5, căutâm, poate este alta mai mare care verifică.-* $26 \cdot 6 = 156 > 131$*, fals, aşadar 5 este cifra căutată*)

E5) se completează rezultatul cu cifra obţinută şi se repetă procedeul, atunci când vom coborî cifre de după virgulă, punem şi la rezultat virgulă.



47) Determinarea valorii absolute (a modulului) unor numere care conţine radicali

E1)dacă nu se ştie valoarea aproximativă, se efectuează extragerea radicalului până la o zecimală

E2) Se foloseşte definiţia modulului: $|a| = \begin{cases} -a, & a < 0 \\ a, & a \geq 0 \end{cases}$

Exp: $\left|2 - \sqrt{3}\right| = ?$. Deoarece $\sqrt{3} = 1,7.... \Rightarrow 2 - \sqrt{3} > 0 \Rightarrow \left|2 - \sqrt{3}\right| = 2 - \sqrt{3}$

Exp: $\left|\sqrt{3}-2\right|=?$. Deoarece

$\sqrt{3}=1,7....\Rightarrow\sqrt{3}-2<0\Rightarrow\left|\sqrt{3}-2\right|=-\left(\sqrt{3}-2\right)=2-\sqrt{3}$

Obs.: este bine de reținut câteva aproximări ale unor numere iraționale:

$\sqrt{2}=1,41.....;\ \sqrt{3}=1,73.....;\ \pi=3,14....$

48) Ordinea efectuării operațiilor

Operațiile sunt de 3 tipuri:

a) de ordin 1: adunarea şi scăderea

b) de ordin II: înmulțirea şi împărțirea

c) de ordin III:ridicările la putere

E1) dacă nu există paranteze şi operațiile sunt de acelaşi ordin, se efectuează în ordinea în care apar

E2) dacă nu există paranteze şi operațiile nu sunt de acelaşi ordin, se efectuează întâi ridicările la putere, apoi înmulțirile şi împărțirile şi abia apoi adunările şi scăderile

E3) dacă există paranteze se efectuează întâi operațiile din parantezele rotunde, apoi din paranteze drepte şi abia apoi la final din acolade, în fiecare paranteză respectându-se regulile de mai sus

Exp:

$N=2+\left\{3-\left[4+2\cdot3-\left(2+6:3\cdot2\right)\right]\right\}=2+\left\{3-\left[4+2\cdot3-\left(2+2\cdot2\right)\right]\right\}=$

$=2+\left\{3-\left[4+2\cdot3-\left(2+4\right)\right]\right\}=2+\left[3-\left(4+2\cdot3-6\right)\right]=2+\left[3-\left(4+6-6\right)\right]$

$=2+\left[3-\left(10-6\right)\right]=2+\left(3-4\right)=2+\left(-1\right)=2-1=1$

Obs. Era greşit ca în paranteza rotundă să o calculăm nerespectând ordinea operațiilor chiar dacă sunt de acelaşi grad

Este **GREŞITĂ** o rezolvare de tipul: $2+6:3\cdot2=2+6:6=2+1=3$

49) Factor comun - se foloseşte $a\cdot b+a\cdot c=a\cdot\left(b+c\right)$ sau $a\cdot b-a\cdot c=a\cdot\left(b-c\right)$, greutatea constă în a observa ce putem da factor comun

Exp.: $2341+2341\cdot7+2341\cdot2=2341\cdot\left(1+7+2\right)=2341\cdot10=23410$

50) Operații cu radicali (operații posibile doar pentru numere pozitive):

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}\quad\sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{a:b}\qquad\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Obs.:pentru $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ şi $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ nu există formulă

Obs.: $\sqrt{a^2+b^2}\neq a+b$, deşi $\sqrt{a^2\cdot b^2}=a\cdot b$

51) Introducerea factorilor sub radical – numărul **pozitiv** din fața radicalului se ridică la pătrat şi se înmulțeşte cu cel din interiorul radicalului

Obs.: semnul "– " din fața radicalului nu se introduce sub radical

Exp.: $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\cdot3}=\sqrt{12}$

$-2\sqrt{3}=-\sqrt{2^2\cdot3}=-\sqrt{12}$

52) Scoaterea factorilor de sub radical – se descompune numărul de sub radical în puteri de factori primi, iar în fața radicalului vor ieşi numere prime cu puterea împărțită la 2

Exp: $\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$

$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\cdot3}=2\sqrt{3}$

$\sqrt{24}=\sqrt{2^3\cdot3}=\sqrt{2^2\cdot2\cdot3}=2\sqrt{2\cdot3}=2\sqrt{6}$

$\sqrt{96}=\sqrt{2^5\cdot3}=\sqrt{2^4\cdot2\cdot3}=2^2\ \sqrt{2\cdot3}=4\sqrt{6}$

Obs.: $\sqrt{a^2}=\left|a\right|$

Exp.: $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}=\left|2-\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}-2$ căci $\sqrt{5}-2<0$

Obs.: dacă nu ştim semnul, scoatem modul din expresie

$\sqrt{a^3b^5c^2}=\left|ab^2c\right|\sqrt{ab}$

53) Compararea unor numere ce conțin radicali

Cazul I. un număr e negativ, altul pozitiv: dacă $a<0$ şi $b>0\Rightarrow a<b$

*Exp.:*Comparați $\sqrt{2}-3$ cu $\sqrt{5}-2$.

Cum $\sqrt{2}-3<0,\sqrt{5}-2>0\Rightarrow\sqrt{2}-3<\sqrt{5}-2$

Cazul II. ambele numere sunt pozitive

Met.I: se compară pătratele acestor numere

Exp.: Comparați $a=2\sqrt{3}$ cu $b=3\sqrt{2}$. Cum ambele sunt pozitive, calculăm $a^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2=4\cdot 3=12$ şi $b^2=\left(3\sqrt{2}\right)=3^2\cdot 2=18$

Cum $a^2<b^2$ şi a,b pozitive $\Rightarrow a<b$

Met.II. se introduc factori sub radicali

Exp.: Comparați $a=2\sqrt{3}$ cu $b=3\sqrt{2}$. Cum ambele sunt pozitive, introducem factorii sub radicali

$a=2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{12}$ $b=3\sqrt{2}=\sqrt{3^2\cdot 2}=\sqrt{18}$ $\Rightarrow a<b$

Met.III: - se calculează aproximativ aceste numere şi dacă diferența e semnificativă, atunci le putem compara

Exp.: Comparați $a=2\sqrt{3}$ cu $b=3\sqrt{2}$. Cum ambele sunt pozitive,

$a=2\sqrt{3}\approx 2\cdot 1,73\approx 3,46$ şi $b=3\sqrt{2}\approx 3\cdot 1,41\approx 4,23\Rightarrow a<b$

Cazul III. dacă ambele sunt negative se înmulțesc cu -1, apoi revenim la compararea a două numere pozitive

Exp.: Comparați $c=-2\sqrt{3}$ cu $d=-3\sqrt{2}$. Comparăm $a=2\sqrt{3}$ cu $b=3\sqrt{2}$ şi obținem $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}\Big|\cdot(-1)\Rightarrow \quad -2\sqrt{3}>-3\sqrt{2}\Rightarrow c>d$

54) Conjugatul unui radical- numărul cu care dacă înmulțim un radical dispare radicalul respectiv. Dăm câteva exemple :

Număr	Conjugat	Rezulatat
$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	a
$a\sqrt{b}$	$\sqrt{b}$	ab
$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$a-b$
$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$a-b$
$a-\sqrt{b}$	$a+\sqrt{b}$	a^2-b

55) Raționalizarea numitorilor - înseamnă amplificarea unei fracții cu conjugatul numitorului astfel încât să dispară radicalul de la numitor

Obs. După raționalizare, numărătorul poate să conțină radical.

Exp : $\overset{\sqrt{5})}{\frac{2}{3\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{3\cdot 5}=\frac{2\sqrt{5}}{15}}$

Exp.2 : $\overset{\sqrt{3}+1)}{\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{2\sqrt{3}+2+3+\sqrt{3}}{3-1}=\frac{3\sqrt{3}+5}{2}}$

56) Media aritmetică (media aritmetică a trei numere)

$$m_a=\frac{\text{suma numerelor}}{\text{câte numere sunt}}=\frac{a+b+c}{3}$$

57) Media ponderata $m_p=\dfrac{a\cdot p_a+b\cdot p_b+c\cdot p_c}{p_a+p_b+p_c}$

58) Media geometrică(numită şi media proporțională)

$m_g=\sqrt{ab}$

Obs.: media geometrică se poate calcula (pentru elevii de gimnaziu) doar pentru 2 numere pozitive

59) Media armonică

$$m_h=\frac{\text{câte numere sunt}}{\text{suma inverselor acestor numere}}=\frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}$$

Obs. **:** pentru 2 numere, media armonică se reține poate mai uşor cu formula $m_h=\dfrac{2ab}{a+b}$. Aceasta provine din definiție, căci

$$m_h=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2}{\frac{b+a}{ab}}=2\cdot\frac{ab}{a+b}$$

60) Inegalitatea mediilor ar_g_at $\Rightarrow m_h \le m_g \le m_a$, cu egalitate doar dacă numerele sunt egale.

Obs.: Pentru 2 numere, inegalitatea se scrie : $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$

61) Raport $\frac{a}{b}$ cu a si b de acelaşi tip şi măsurate cu aceeaşi unitate de măsură.

Obs. : Raportul întotdeauna dă un unmăr

Exp: raportul $2\ cm$ şi $3m$ este $\frac{2\text{cm}}{300\text{cm}} = \frac{2}{300} = \frac{1}{150}$

62) Proportie - egalitatea a mai multor rapoarte

Exp. : $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$

63) Mezi, extremi ai unei proporţii:-provin din citirea proporţiei, a supra b este egal cu c supra d prima şi ultima literă sunt extremi, iar cei din mijloc sunt mezi. Deci, având proporţia

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow$ **extremi** sunt a,d iar **mezi** sunt b,c

64) Proprietatea fundamentală a proporţiei : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

65) Proporţii derivate

a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{ma+sc}{mb+sd}, \forall m,s \in \mathbb{R}$

b) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ma+sb}{tb} = \frac{mc+sd}{td} \forall m,s,t \in \mathbb{R}$

Demonstrăm aceste proprietăţi deoarece ideea din demonstraţie se foloseşte foarte des în aplicaţii.

a)Notăm $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = kb, c = kd$ **.** Vom avea aşadar

$\frac{ma+sc}{mb+sd} = \frac{mkb+skd}{mb+sd} = \frac{k\left(\cancel{mb+sd}\right)}{\cancel{mb+sd}} = k$ **.** Cum însă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ obţinem proprietatea din enunţ.

b) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = kb, c = kd \Rightarrow \frac{ma+sb}{tb} = \frac{mkb+sb}{tb} = \frac{mk+s}{t}$

$\frac{mc+sd}{td} = \frac{mkd+sd}{td} = \frac{mk+s}{t}$ şi se obţine egalitatea cerută.

Exp: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 9$, se cere $3b-7d$ daca $3a-7c=11$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{3a-7c}{3b-7d} = \frac{11}{3b-7d} = 9 \Rightarrow 3b-7d = \frac{11}{9}$

66) Aflarea termenului necunoscut din proportii

$x = \frac{\text{produsul termenilor diagonali ce nu conţin x}}{\text{termenul diagonal lui x}}$

Exp: $\frac{x}{2} = \frac{7}{5} \Rightarrow x = \frac{14}{5}$ *Exp:* $\frac{2}{x} = \frac{7}{5} \Rightarrow x = \frac{10}{7}$

Exp: $\frac{x}{2} = 7 \Rightarrow x = \frac{14}{1}$ *Exp:* $\frac{2}{x} = 7 \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 1}{7} = \frac{2}{7}$

67) Proporţionalitate directă, proporţionalitate inversă:

a şi b **sunt direct proporţionale** cu c şi $d \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

a şi b **sunt invers proporţionale** cu c şi $d \Leftrightarrow a$ şi b sunt direct proporţionale cu inversele lui c şi $d \Leftrightarrow \frac{a}{\frac{1}{c}} = \frac{b}{\frac{1}{d}} \Leftrightarrow ac = bd$

Exp. : să se afle 2 numere direct proporţionale cu 2 şi 3 dacă suma lor este 10.

Notăm cele 2 numere cu a şi b şi avem :

$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=k\Rightarrow a=2k,b=3k$. Deoarece suma lor este 10 vom obţine

$a+b=10\Rightarrow 2k+3k=10$

$\Rightarrow k=2\Rightarrow a=2k=4,b=3k=6$

68) Regula de trei simplă pentru mărimi direct proporţionale - atunci când se măresc termenii din stânga, se măresc şi cei din dreapta

Exp: $\wedge$ 2 *m* stofa……..24000 lei $\wedge$

8 *m* stofa…….. x lei rezultă $x=\frac{8\cdot 24000}{2}$

69) Regula de trei simplă pentru mărimi invers proporţionale: atunci când se măresc termenii din stânga, cei din dreapta scad

2 tractoare ară un ogor…… 8 zile

$\wedge$ 6 tractoare ară un ogor…….. x zile $\vee$ rezultă

$x=\frac{2\cdot 8}{6}=\frac{16}{6}$

70) Calcularea unui procent dintr-un număr $\frac{p}{100}$ din $x=\frac{p}{100}\cdot x$

Exp. Un calculator se ieftineşte cu 10%. Dacă el a costat 2000RON, aflaţi cu cât s-a ieftinit acest calculator.

10% din 2000RON=$\frac{10}{\cancel{100}}\cdot 20\cancel{00}=200$RON

71) Aflarea unui număr dacă ştim un anumit procent din acel număr - ştim că *p%* din *x* este *a*, se cere *x*= ?

Exp.: Mama îmi cumpără un calculator, cu condiţia ca 10% din preţul său să îl achit eu. Ştiind că eu trebuie să dau 15RON, aflaţi preţul calculatorului.

Notăm preţul calculatorului cu *x* şi obţinem

10% din $x=15$RON $\Leftrightarrow \frac{10}{100}\cdot x=15\Leftrightarrow x=\frac{15\cdot 100}{10}=150$

72) Aflarea raportului procentual – înseamnă scrierea unui număr ca un număr raţional cu numitorul 100.

Exp. : Să se scrie ca raport procentual numărul.

Soluţie : $\frac{3}{5}=\frac{60}{100}\Rightarrow 60\%$

73) Rezolvarea unor probleme în care apar procente.

*Exp. :*Cât la sută elevi au făcut tema dacă 9 elevi din 18 au făcut tema ?

$\frac{x}{100}\cdot 18=9\Rightarrow x=\frac{100\cdot 9}{18}=50$

74) Probabilităţi $P(A)=\frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}$

Exp. : Care este probabilitatea ca aruncând un zar să obţinem o cifră impară ?

Deoarece sunt 3 cifre impare de la 1 la 6 $\Rightarrow P=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

75) Calcul cu numere reprezentate prin litere

a) calcularea valorii unei expresii într-un număr - se obţine prin înlocuirea variabilei (a literei care apare în expresie) cu numărul respectiv

Exp.: $E(x)=3x^2+1\Rightarrow E(5)=3\cdot 5^2+1\Rightarrow E(5)=76$

a) adunarea, scăderea – se adună (respectiv se scad) termenii care au aceeaşi putere, rezultatul se scrie în ordinea descrescătoare a puterilor

Exp.: Dacă $E(x)=3x^2+7x-1, F(x)=x^3-8x+7\Rightarrow$

$E(x)+F(x)=x^3+3x^2+(7x-8x)+(-1+7)\Rightarrow$

$E(x)+F(x)=x^3+3x^2-x+6$

b) înmulţirea– se foloseşte proprietatea $aX^m\cdot bX^n=abX^{m+n}$

Exp.: Dacă $E(x)=3x^2+7x-1, F(x)=x^2+7\Rightarrow$

$E(x)\cdot F(x)=\left(3x^2+7x-1\right)\cdot\left(x^2+7\right)\Rightarrow$

$E(x)\cdot F(x)=3x^2\cdot x^2+3x^2\cdot 7+7x\cdot x^2+7x\cdot 7-x^2-7$

$E(x)\cdot F(x)=3x^4+21x^2+7x^3+49x-x^2-7$

$E(x)\cdot F(x)=3x^4+7x^3+20x^2+49x-7$

c) împărțirea– se foloseşte proprietatea $\left(aX^m\right):\left(bX^n\right)=\frac{a}{b}X^{m-n}$

Exp.: $\left(8X^6\right):\left(2X^4\right)=4X^2$

d) ridicarea la putere – este de fapt înmulțirea polinomului cu el însuşi de atâtea ori de câte arată puterea, folosind eventual $\left(aX^n\right)^m=a^mX^{n\cdot m}$

e) folosirea formulelor

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $\quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ $\quad (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ $\quad a^2+b^2=\nexists$ formulă

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ $\quad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

$(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$

Obs.: $a^4-b^4=(a^2)^2-(b^2)^2=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

76) Descompunerea in factori

E_1) încercăm să dăm factor comun

E_2) încercăm să restrângem folosind vreo formulă (dacă sunt 3 termeni ne gândim la $(\ )^2$, dacă sunt 4 termeni ne gândim la $(\ )^3$)

E_3) Dacă este de gradul II se foloseşte formula $a(x-x_1)(x-x_2)$, unde a coeficientul lui x^2, iar x_1,x_2 rădăcinile ecuației de gradul II

E_4) Se încearcă grupări de termeni

77) Rapoarte sub formă de litere

a) adunări, scăderi: se descompun numitorii, se aduc la numitor comun

b) înmulțiri, împărțiri: se descompun numărătorii şi numitorii pentru a putea simplifica

Obs.1: Înainte de a calcula, descompunem numitorii separat şi punem condiții.

Obs.2: Dacă avem împărțire, la condiții punem şi condiția ca numărătorul să fie diferit de 0.

Obs.3: O expresie are sens dacă sunt puse condiții

Obs.4: $-\frac{2}{x-1}=\frac{2}{1-x}$

Obs.5:semnul ”-” în fața fracției schimbă toate semnele numărătorului:

Exp: $-\frac{2x-3}{x+1}=\frac{-2x+3}{x+1}=\frac{2x-3}{-x-1}$

78) Sistem de axe cartezian, reprezentarea punctelor în plan

Sistem de axe cartezian - două axe de coordonate perpendiculare care se intersectează în O, numit originea sistemului

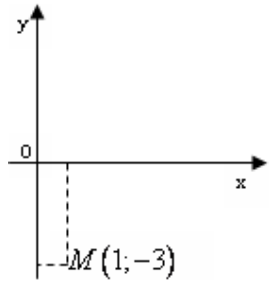
Obs.1: *Ox* se numeşte axa absciselor, iar *Oy* axa ordonatelor

Obs.2: Reprezentarea unui punct într-un sistem de axe ortogonale se face prin ducerea paraleleor la cele două axe de coordonate, iar la intersecția lor situăm punctul

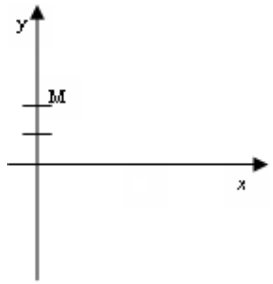
Obs.3: Dacă $x_M=0\rightarrow$punctul este pe Oy, iar dacă $y_M=0\rightarrow$ punctul este pe Ox

Exemple:

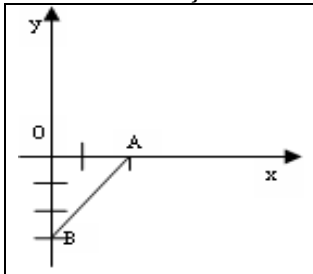
Reprezentați punctul $M(1;-3)$



Reprezentați punctul $M\left(0;2\right)$



79)Calcularea ariilor, perimetrelor unor figuri date prin puncte la care cunoaştem coordonatele



Exp.: $A(2,0), B(0,-3)$. Se cere $A_{\Delta AOB}$, lungimea lui AB şi perimetrul ΔAOB

$A = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$

AB se găseşte din teorema lui Pitagora

$AB^2 = AO^2 + OB^2 \Rightarrow AB = \sqrt{13}$

$P_{\Delta AOB} = OA + AB + BO = 2 + \sqrt{13} + 3$

80) Distanța între punctele $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$ **(lungimea segmentului** M_1M_2**)** este

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Exp.: distanța dintre punctele $A(9,-1)$ şi $B(-3,4)$ este

$AB = \sqrt{(-3-9)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$.

81) Noțiunea de funcție - dacă printr-un procedeu oarecare facem ca unui element dintr-o mulțime A să îi corespundă un unic element dintr-o mulțime B spunem că avem o funcție f definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B. Notăm acest lucru cu $f : A \to B$

Obs.: Mulțimea A se numeşte **domeniu de definiție** al funcției f, iar B se numeşte **codomeniul(sau mulțimea de valori)** ale funcției f

82) Funcție liniară $f : A \to B, f(x) = ax + b$

Funcțiile liniare sunt de două tipuri:

a) Funcții de gradul I, $f : A \to B, f(x) = ax + b, a \neq 0$

b) Funcție constantă $f : A \to B, f(x) = b,$ adică se obține din funcția liniară când $a = 0$

83) Funcții definite pe mulțimi finite sau pe $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$

a) aflarea valorilor unei funcții definite pe o mulțime de tipul $f : \{.....\} \to \mathbb{R}$ **-**se face prin calcularea valorilor funcției în toate numerele din domeniu

Exp: $f : \{1;2;3\} \to \mathbb{R}$**,** $f(x) = 2x - 1$**.** Calculați mulțimea valorilor funcției date.

Se calculează valorile funcției în toate punctele din domeniu

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1$, $x = 2 \Rightarrow f(2) = 3$, $x = 3 \Rightarrow f(3) = 5$, aşadar mulțimea valorilor funcției este $\{1;3;5\}$

b) reprezentarea grafică a acestor funcții este formată din puncte care nu se unesc

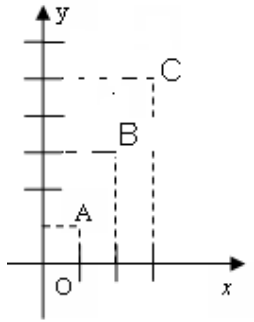
Exp: $f : \{1;2;3\} \to R$**,** $f(x) = 2x - 1$

Se calculează valorile funcției în toate punctele din domeniu

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow A(1;1) \in G_f$

$x = 2 \Rightarrow f(2) = 3 \Rightarrow B(2;3) \in G_f$

$x = 3 \Rightarrow f(3) = 5 \Rightarrow C(3;5) \in G_f$



84) Funcții definite pe intervale sau pe $\mathbb{R}$

a) Trasarea graficului acestor tipuri de funcții se face prin determinarea a doar două puncte prin care trece graficul funcției date

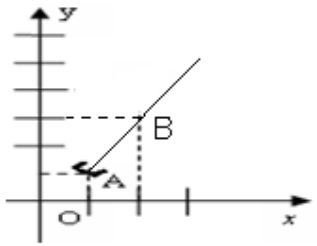
Obs.1: dacă domeniul funcției este interval avem grijă ca valorile lui x pe care le dăm să fie din domeniul funcției

$f:[1;\infty)\to R$

$f(x)=2x-1$

$x=1\Rightarrow f(1)=1\Rightarrow A(1;1)\in G_f$

$x=2\Rightarrow f(2)=3\Rightarrow B(2;3)\in G_f$



Obs:3 **:** Dacă domeniul funcției este $\mathbb{R}$ sau este un interval, atunci la trasarea graficului punctele se unesc si graficul conține doar puncte care au abscisa în domeniul funcției f

Obs 4**:** Dacă este posibil, graficul se face prin intersecția cu axele

$\cap Oy: x=0\Rightarrow f(0)=....$

$\cap Ox: y=0\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow x=...$

Exp. :

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

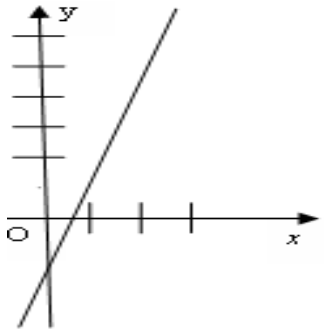
$f(x)=2x-1$

$\cap Oy: x=0\in D_f\Rightarrow f(0)=-1\Rightarrow$

$A(0;-1)\in G_f$

$\cap Ox: f(x)=0\Rightarrow 2x-1=0\Rightarrow$

$x=\frac{1}{2}\in D_f\Rightarrow B\left(\frac{1}{2};0\right)\in G_f$



Unim punctele astfel obținute şi avem graficul funcției *f*

$f:[1;\infty)\to\mathbb{R}$

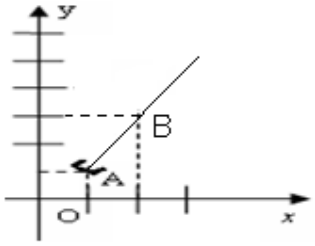
$f(x)=2x-1$

$x=0\notin D_f\Rightarrow$ nu pot calcula $f(0)$

Dăm aşadar două valori oarecare,

$x=1\Rightarrow f(1)=1\Rightarrow A(1;1)\in G_f$

$x=2\Rightarrow f(2)=3\Rightarrow B(2;3)\in G_f$



b) determinarea intersecției cu axele a graficului unei funcții : folosim faptul că punctele de pe axa absciselor au ordonata egală cu 0, iar cele de pe axa ordonatelor au abscisa egală cu 0. Astfel vom avea : $\cap Oy: x=0\Rightarrow f(0)=....\Rightarrow A(0;...)$ este punctul de intersecție cu axa ordonatelor, adică cu axa Oy

$\cap Ox: y=0\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow x=...\Rightarrow B(...;0)$ este punctul de intersecție cu axa absciselor, adică cu axa Ox

Obs: În multe exerciții este folositor ca în loc de $f(x)$ să punem y

c) determinarea unei funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$ al cărei grafic conține două puncte

E1) notăm funcția cu $f(x)=ax+b$

E2) folosim faptul că $A(x,y)\in G_f\Leftrightarrow f(x)=y$ şi vom obține un sistem de două ecuații cu două necunoscute

Exp. : $f(x)=?$ dacă graficul conține $A(1;2)$ şi $B(2;-3)$

scriem $f(x)=ax+b\to$ forma generală

$A\in G_f\Rightarrow f(1)=2\Rightarrow a+b=2$

$B\in G_f\Rightarrow f(2)=-3\Rightarrow 2a+b=-3$

Vom obține aşadar sistemul $\begin{cases}a+b=2\\2a+b=-3\end{cases}$, sistem care rezolvat va da soluțiile $a=-5; b=7$

Funcția cerută va fi aşadar $f(x)=-5x+7$

85) Monotonia functiei: $f(x)=ax+b$

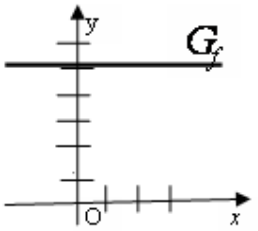
$a>0\to f$ crescătoare

$a=0\to f$ constantă

$a<0\to f$ descrescătoare

Obs.: Graficul unei funcții constante este o paralelă la axa Ox

*Exp.:*Trasați graficul funcției
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5$
Graficul este format din dreapta paralelă cu axa Ox care trece prin $y=5$



86) Studierea coliniarității unor puncte-folosim faptul că graficul unei funcții liniare este o dreaptă
E₁) găsim funcția al cărui grafic trece prin primele două din punctele date
E₂) studiem dacă celelalte puncte aparțin acestui grafic,
Dacă celelalte puncte aparțin acestui grafic $\Rightarrow$ punctele sunt coliniare, iar dacă nu aparțin acestui grafic $\Rightarrow$ punctele sunt necoliniare

87) Determinarea punctului de intersecție a graficului a două funcții

-se rezolvă ecuația $f(x)=g(x)$ și determinăm abscisa punctului de intersecție. Ordonata o determinăm prin înlocuirea valorii lui x găsită anterior în oricare din cele două funcții (valoarea obținută pentru ordonată trebuie să fie aceeași, indiferent în care funcție înlocuim).
Exp.: Determinați punctul de intersecție al graficelor funcțiilor
$f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1, g(x)=-x+4$
$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2x+1=-x+4\Leftrightarrow 3x=3\Leftrightarrow x=1$**.** Pentru a găsi ordonata, calculăm $f(1)=3\Rightarrow A(1;3)\in G_f\cap G_g$

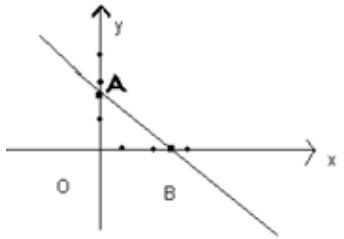
88) Ecuație – este o relație cu o singură necunoscută în cadrul căreia apare o singură dată semnul "="
Exp. : $2x+1=-x+5$
89) Ecuația de gradul I – are forma $ax+b=0, a\neq 0$
Obs. : rezolvarea ecuației $ax+b=0, a\neq 0$ este următoarea :

$ax+b=0\Leftrightarrow ax=-b\Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}$

90) Ecuația de gradul II – are forma $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$
E₁) se calculeaza $\Delta=b^2-4ac$
E₂) dacă $\Delta>0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
dacă $\Delta=0\Rightarrow x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$
$\Delta<0\Rightarrow$ ecuația nu are rădăcini reale
Exp. Rezolvați ecuația: $2x^2-6x+1=0$
$\Delta=(-6)^2-4\cdot 2\cdot 1=36-8=28>0$
$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{28}}{4}\Rightarrow x_1=\frac{6-2\sqrt{7}}{4}=\frac{3-\sqrt{7}}{2}, x_2=\frac{6+2\sqrt{7}}{4}=\frac{3+\sqrt{7}}{2}$

91) Ecuații echivalente - au aceleași soluții
Exp.: $2x+1=0\Leftrightarrow 6x+3=0$ căci ambele ecuații au aceeași soluție $x=-\frac{1}{2}$

92) Reprezentarea grafică a soluțiilor ecuației: $ax+by=0$
Exp. : Reprezentați grafic mulțimea soluțiilor ecuației $2x+3y=5$



$x=0\Rightarrow 3y=5\Rightarrow y=\frac{5}{3}\Rightarrow A\left(0;\frac{5}{3}\right)$
$y=0\Rightarrow 2x=5\Rightarrow x=\frac{5}{2}\Rightarrow B\left(\frac{5}{2};0\right)$

93) Rezolvarea în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ a sistemelor de ecuații
a) metoda reducerii-înseamnă înmulțirea a unei ecuații, eventual a amândurora cu numere reale astfel încât adunând ecuațiile, să se reducă o necunoscută. Vom rezolva ecuația cu o singură necunoscută iar valoarea obținută pentru această necunoscută o

înlocuim în oricare din cele 2 ecuații pentru a determina cealaltă necunoscută.

Exp.: Rezolvați prin metoda reducerii sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 5x-7y=-2 \end{cases}$$

Vrem să reducem necunoscuta x, astfel că înmulțim prima ecuație cu (-5), iar cea de-a doua cu 2 şi astfel adunând va rămâne o ecuație doar cu necunoscuta y. Avem aşadar

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \,|\cdot(-5) \\ 5x-7y=-2 \,|\cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x-15y=-25 \\ 10x-14y=-4 \end{cases}$$

. Înlocuind în

$$/ \quad -29y=-29 \Rightarrow y=1$$

prima ecuație obținem $2x+3\cdot 1=5 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$. Aşadar soluția sistemului este $(x;y)=(1;1)$

b) metoda substituției – înseamnă determinarea unei necunoscute din oricare ecuație în funcție de cealaltă necunoscută, şi apoi înlocuirea în cealaltă ecuație. Vom rezolva ecuația cu o singură necunoscută iar valoarea obținută pentru această necunoscută o înlocuim în oricare din cele 2 ecuații pentru a determina cealaltă necunoscută.

Exp: Rezolvați prin metoda substituției sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 5x-7y=-2 \end{cases}$$

Din ecuația $2x+3y=5 \Rightarrow 2x=5-3y \Rightarrow x=\frac{5}{2}-\frac{3y}{2}$. Înlocuind în ecuația a II-a obținem: $5x-7y=-2 \Rightarrow 5\cdot\left(\frac{5}{2}-\frac{3y}{2}\right)-7y=-2 \Rightarrow$

$$\frac{25}{2}-\frac{15y}{2}-7y=-2 \,\Big|\cdot 2 \Leftrightarrow 25-15y-14y=-4 \Leftrightarrow 29=29y \Leftrightarrow y=1.$$

Înlocuind în prima ecuație obținem $2x+3\cdot 1=5 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$.

Aşadar soluția sistemului este $(x;y)=(1;1)$

c) interpretarea geometrică a unui sistem de ecuații – se fac dreptele de soluții pentru fiecare ecuație, se intersectează aceste drepte iar coordonatele punctului obținut este soluția sistemului

94) Inecuații de gradul I – pot fi aduse la una din formele $ax+b>0, ax+b\geq 0, ax+b<0$ sau $ax+b\leq 0$ unde $a\neq 0$

Obs.: rezolvarea impune trecerea lui b în stânga, apoi împărțirea prin a. Dacă $a>0$ atunci prin împărțire păstrăm acelaşi semn, iar dacă $a<0$ atunci prin împărțire schimbăm semnul

Exp 1: $2x+1<5 \Rightarrow 2x<4/:2 \Rightarrow x<2 \Rightarrow x\in(-\infty;2)$

Exp 2: $2x+1\leq 5 \Rightarrow x\leq 2 \Rightarrow x\in(\text{-}\infty;2]$

Exp 3: $-2x+1<5 \Rightarrow -2x<4/:(-2) \Rightarrow x>-2 \Rightarrow x\in(-2;\infty)$

Exp 4: $-2x+1\leq 5 \Rightarrow x\in[\text{-}2;\infty)$

Obs: dacă se cere determinarea unei mulțimi, trebuie să fim atenți cui aparțin elementele mulțimii inițiale

Exp.: Determinați mulțimea $A=\{x\in\mathbb{N}/2x+1<5\}$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+1<5 \Rightarrow x\in(-\infty;2) \\ \text{dar } x\in\mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow A\in\{0;1\}$$

95) Unități de măsură-se împart în:

a) pentru lungime (unitatea principală este metrul notat m)

b) pentru capacitate (unitatea principală este litrul notat l)

c) pentru masă (unitatea principală este kilogramul notat kg)

d) pentru suprafață (unitatea principală este metrul pătrat notat m^2)

e) pentru volum(unitatea principală este metrul cub notat m^3)

f) pentru timp (unitatea principală este secunda notată s)

Obs.: la unitățile de măsură pentru lungime, capacitate şi pentru masă, este indicată reprezentarea acestor unități de măsură sub formă de trepte, fiecare urcare însemnând o împărțire cu 10^n, iar fiecare coborâre o înmulțire cu 10^n, unde n este numărul de trepte urcate sau coborâte.

Obs.2: Aceeaşi reprezentare sub formă de trepte se poate utiliza şi la unitățile pentru suprafață, doar că aici vom înmulți (respectiv împărți) cu 10^{2n}, iar la cele pentru volum cu 10^{3n}, unde n este numărul de trepte urcate sau coborâte.

a) unități de măsură pentru lungime (metrul, notat m)

$1km = 1000m$

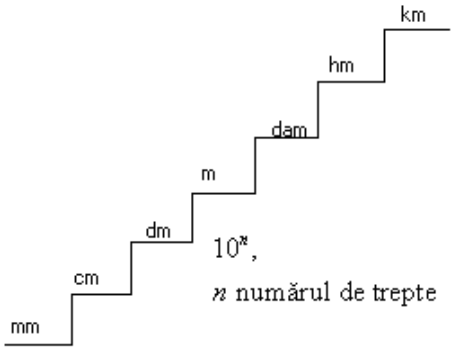
$1hm = 100m$

$1dam = 10m$

$1dm = 0,1m$

$1cm = 0,01m$

$1mm = 0,001m$



Exp.: $1,23hm = 1,23 \cdot 10^2 m = 123m$, căci vom coborî 2 trepte

Exp.2: $123000mm = 123000 : 10^5 hm = 1,23hm$

b) unități de măsură pentru capacitate (litrul, notat l)

$1kl = 1000l$

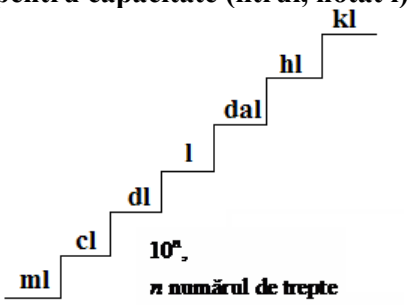
$1hl = 100l$

$1dal = 10l$

$1dl = 0,1l$

$1cl = 0,01l$

$1ml = 0,001l$



Exp.: $1,23hl = 1,23 \cdot 10^2 l = 123l$, căci vom coborî 2 trepte

Exp.2: $123000ml = 123000 : 10^5 hl = 1,23hl$

c) unități de măsură pentru masă (kilogramul, notat kg)

$1v = 10\ 000kg$

$1t = 1000kg$

$1q = 100kg$

$1hg = 100g = 0,1kg$

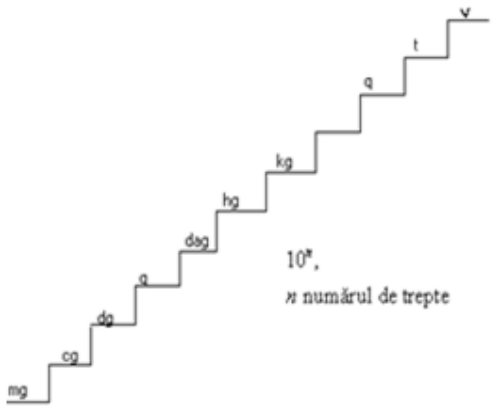
$1dag = 10g = 0,01kg$

$1g = 0,001kg$

$1dg = 0,1g$

$1cg = 0,01g$

$1mg = 0,001g$



Exp.: $1,23hg = 1,23 \cdot 10^5 mg = 123000mg$, căci vom coborî 2 trepte

Exp.2: $123000dag = 123000 : 10^6 v = 0,123hl$

d) unități de măsură pentru suprafață (unitatea principală este metrul pătrat notat m^2)

$1km^2 = 1\ 000\ 000m^2$

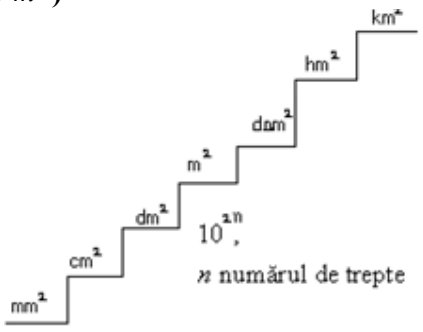
$1hm^2 = 10\ 000m^2$

$1dam^2 = 100m^2$

$1dm^2 = 0,01m^2$

$1cm^2 = 0,000\ 1m^2$

$1mm^2 = 0,000\ 001m^2$



Obs. $1\ \text{dam}^2 = 1\ \text{ar}$ **, iar** $1\ \text{hm}^2 = 1\ \text{ha}$ (hectar)

e) unități de măsură pentru volum (unitatea principală este metrul cub notat m^3)

$1km^3 = 1\ 000\ 000\ 000m^3$

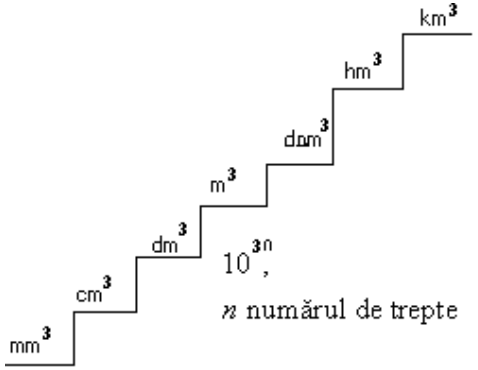
$1hm^3 = 1\ 000\ 000m^3$

$1dam^3 = 1\ 000m^3$

$1dm^3 = 0,001m^3$

$1cm^3 = 0,000\ 001m^3$

$1mm^3 = 0,000\ 000\ 001m^3$



f) unități de măsură pentru timp (unitatea principală este secunda notată s) - aici nu mai poate fi folosită metoda "treptelor", trebuie reținute transformările:

$1\ \text{min} = 60\ \text{s}$ $1\ \text{h} = 60\ \text{min} = 3\ 600\ \text{s}$

$1\ \text{zi} = 24\ \text{h}$ $1\ \text{săptămână} = 7\ \text{zile}$

$1\ \text{lună} = 28, 29, 30$ sau 31 zile

$1\ \text{an} = 12\ \text{luni} = 365$ zile (când februarie are 28 zile, an bisect)

$= 366$ zile (când februarie are 29 zile, an nebisect)

$1\ \text{deceniu} = 10\ \text{ani}$ $1\ \text{secol} = 100\ \text{ani}$ $1\ \text{mileniu} = 1000\ \text{ani}$

Obs: există legătură între unitățile de măsură pentru capacitate şi unitățile de măsură pentru volum, astfel $1\,\text{dm}^3 = 1l$ lichid, asta înseamnă că într-un cub cu latura de $1\ \text{dm}^3$ încape 1 litru, şi efectuând transformări obținem că într-un cub cu latura de 1 m încap 1 000 litri lichid.

Formule adăugate de voi pe care eu le-am uitat ☺

GEOMETRIE

1) Punctul: Nu are lungime, nu are lățime, nu are înălțime (se reprezintă punând vârful unui creion)

Obs.: Punctele se notează cu litere mari ale alfabetului $A, B, ...$

Obs.2: Există puncte distincte (nu sunt situate în acelaşi loc) şi puncte confundate(coincid), sunt situate în acelaşi loc.

Exp.:

A B C=D

A, B distincte C, D coincid

2) Dreapta: - este cel mai scurt drum între 2 puncte şi este prelungită în ambele capela la infinit. Are lungime, nu are lățime, nu are înălțime.

Obs.: dreapta se notează cu litere mici ale alfabetului $a, b, c, d, ...$ sau, în ipoteza în care ştim două puncte ale dreptei, o putem nota prin punctele respective, adică $AB, CD, etc...$

d

3) Semidrepta – este mulțimea punctelor dintr-o dreaptă mărginită doar la un capăt. Capătul în care este mărginită se numeşte **originea semidreptei**. Există semidrepte deschise şi semidrepte închise. Pentru a nota o semidreaptă trebuie să cunoaştem originea şi încă un punct oarecare al semidreptei.

Exp: $(AB$ este semidreapta deschisă, porneşte din A, nu îl conține pe A, şi merge în direcția lui B către infinit

$[CD$ este semidreapta închisă, porneşte din C, îl conține pe C, şi merge în direcția lui D către infinit

A B C D

4) Segmente - este mulțimea punctelor dintr-o dreaptă mărginită la ambele capete Există segmente închise, deschise, semideschise.

Exp: (AB) este segment deschis, nu conține pe A, nu conține pe B, conține toată porțiunea dintre A şi B

$[AB]$ este segment închis, conține pe A, conține pe B, conține toată porțiunea dintre A şi B

$[AB)$ este segment semideschis, conține pe A, nu conține pe B, conține toată porțiunea dintre A şi B

$(AB]$ este segment semideschis, nu conține pe A, conține pe B, conține toată porțiunea dintre A şi B

Obs.: Reprezentarea geometrică a semidreptelor şi a dreptelor se face asemănător intervalelor

*Exp.*reprezentați: a) segmentul semideschis $[AB)$ b)segmentul deschis (CD) c) segmentul închis $[EF]$ d) segmentul semideschis $(GH]$

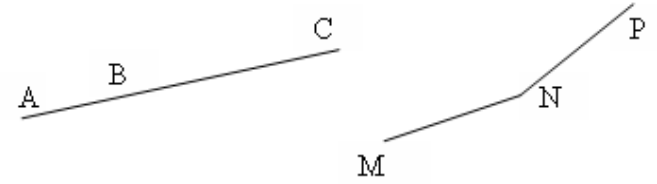
A B C D

E F G H

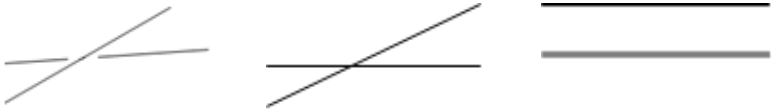
5) Plan: este asemeni unei foi de hârtie prelungită în toate direcțille la infinit. Are lungime, are lățime, nu are înălțime. Se notează cu litere greceşti α -alpha, β -beta, etc.

Obs.: **semiplan** – este porțiunea din plan delimitată de o dreaptă, adică "foaia de hârtie nu se prelungeşte decât în 3 direcții"

6) Puncte coliniare – sunt situate pe aceeaşi dreaptă
Puncte necoliniare – nu sunt sitaute pe aceeaşi dreaptă.
Exp.: A, B, C sunt puncte coliniare, iar M, N, P sunt puncte necoliniare.

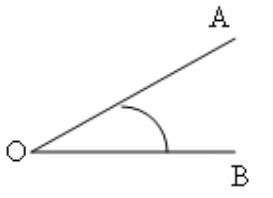


7) Drepte coplanare, necoplanare, concurente, confundate, paralele
a) drepte coplanare - sunt drepte situate în acelaşi plan
b) drepte necoplanare – drepte care nu sunt situate în acelaşi plan
c) drepte concurente – intersecţia lor este formată dintr-un singur punct
d) drepte confundate(coincid) – sunt drepte care se suprapun
e) drepte paralele – sunt drepte coplanare care nu sunt concurente
Exp.:

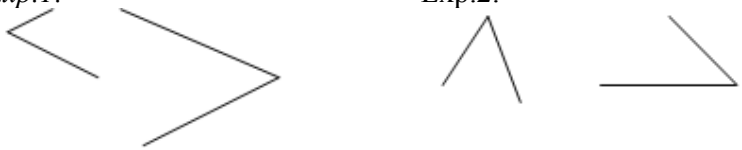


drepte necoplanare drepte concurente drepte paralele

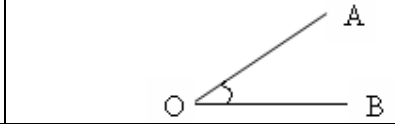
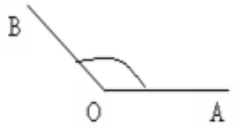
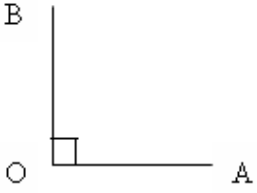
8) Unghiul – este figura geometrică formată din două semidrepte cu aceeaşi origine. Cele două semidrepte se numesc laturile unghiului, iar originea lor comună se numeşte vârful unghiului. Unghiul se notează $\sphericalangle AOB$ sau, dacă nu există mai multe unghiuri cu vârful în O, se notează $\sphericalangle O$



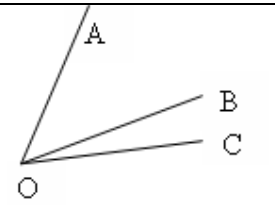
9) Măsura unui unghi – este deschizătura dintre laturile unghiului (de fapt măsurăm arcul cercului cu centru în vârful unghiului), spus pe înţelesul tuturor este deschizătura unei foarfeci.
Obs.: dacă avem desenat un unghi şi ni se cere măsurarea lui, nu contează cât de lungi sunt laturile unghiului ci doar cât de mare e deschizătura dintre ele.
Obs.2: un unghi se măsoară cu RAPORTORUL, pe raportor sunt trecute grade. 1 grad se notează 1°.
Obs.3: $1^\circ = 60\min$, $1\min = 60s$
10) Unghiuri congruente – sunt unghiuri care au aceeaşi măsură. Nu contează lungimea laturilor, nici poziţia unghiului. Unghiurile din exemplele următoare sunt congruente.
Exp.1: Exp.2:



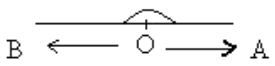
11) Clasificarea unghiurilor în funcţie de măsura lor:

Unghi ascuţit $m(\sphericalangle AOB) < 90^\circ$	
Unghi obtuz $m(\sphericalangle AOB) > 90^\circ$	
Unghi drept $m(\sphericalangle AOB) = 90^\circ$	

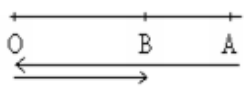
Unghiuri adiacente – au o latură comună, au un vârf comun iar celelalte doua laturi sunt de-o parte şi de cealaltă a laturii cumune
Unghiurile $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente



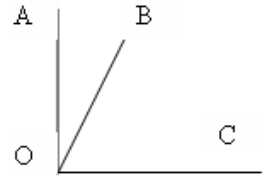
Unghi alungit – are măsura 180°, laturile lui sunt semidrepte opuse
$m(\sphericalangle AOB)=180^\circ$



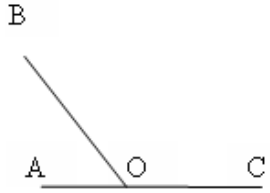
Unghi nul – are măsura 0°, laturile lui se confundă
$m(\sphericalangle AOB)=0^\circ$



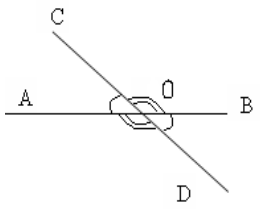
Unghiuri complementare – au suma măsurilor egală cu 90°,
$m(\sphericalangle AOB)+m(\sphericalangle BOC)=90^\circ$,două unghiuri complementare nu trebuie neapărat să fie adiacente, trebuie doar să aibă au suma 90°



Unghiuri suplementare - au suma 180°
$m(\sphericalangle AOB)+m(\sphericalangle BOC)=180^\circ$
Obs.: două unghiuri suplementare nu trebuie neapărat să fie adiacente, singura condiție este să aibă au suma 180°

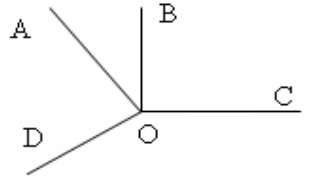


Unghiuri opuse la vârf – laturile primului unghi sunt în prelungirea laturilor celui de-al doilea unghi
$\sphericalangle AOC$ şi $\sphericalangle BOD$ sunt unghiuri opuse la vârf, $\sphericalangle AOD$ şi $\sphericalangle BOC$ sunt unghiuri opuse la vârf

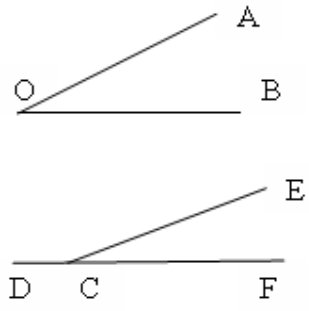


Obs. Unghiurile opuse la vârf sunt congruente $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$ şi $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOC$

Unghiuri în jurul unui punct – au aceeaşi origine, nu au interior comun şi au suma egală cu 360°
$m(\sphericalangle AOB)+m(\sphericalangle BOC)+$
$+m(\sphericalangle COD)+m(\sphericalangle DOA)=360°$



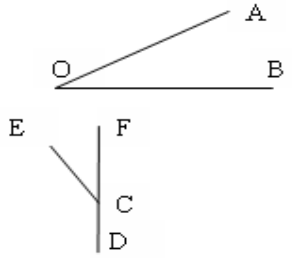
Unghiuri cu laturile respectiv paralele – laturile primului unghi sunt paralele cu laturile celui de-al doilea unghi, $AO \| EC, BO \| FC$ rezultă că $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle ECF$ sunt unghiuri cu laturile respectiv paralele, dar şi $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle ECD$ sunt unghiuri cu laturile respectiv paralele



Obs.: unghiurile cu laturile respectiv paralele sunt congreunte sau suplementare.

Dacă ambele unghiuri sunt ascuțite sau ambele unghiuri sunt obtuze, atunci acele unghiuri sunt congruente, iar dacă unul e obtuz iar celălalt ascuțit atunci acele unghiuri sunt suplementare.
Deci, $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle ECF$ şi $\sphericalangle AOB + \sphericalangle ECD = 180°$, adică $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle ECD$ sunt suplementare

Unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare – laturile primului unghi sunt perpendiculare pe laturile celui de-al doilea unghi $AO \perp EC$, $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle ECF$ sunt unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare, dar şi $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle ECD$ sunt unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare



Obs.: unghiurile cu laturile respectiv perpendiculare sunt congreunte sau suplementare. Dacă ambele unghiuri sunt ascuțite sau ambele unghiuri sunt obtuze, atunci acele unghiuri sunt congruente, iar dacă unul e obtuz iar celălalt ascuțit atunci acele unghiuri sunt suplementare, deci $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle ECF$ şi $\sphericalangle AOB + \sphericalangle ECD = 180°$, adică $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle ECD$ sunt suplementare

12) Unghiuri formate de două drepte paralele tăiate de o secantă

Ştim că $d_1 \parallel d_2$ şi că dreapta d e secantă (intersectează cele două drepte). Se formează următoarele perechi de unghiuri:

a)alterne interne:

$\sphericalangle A_3$ **cu** $\sphericalangle B_1$**;**

$\sphericalangle A_4$ **cu** $\sphericalangle B_2$**;**

b) alterne externe:

$\sphericalangle A_1$ **cu** $\sphericalangle B_3$**;**

$\sphericalangle A_2$ **cu** $\sphericalangle B_4$**;**

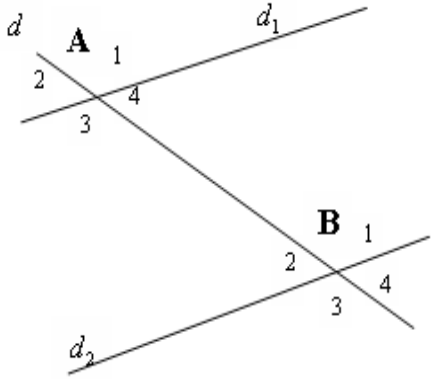
c)unghiuri corespondente

$\sphericalangle A_1$ **cu** $\sphericalangle B_1$**;**

$\sphericalangle A_2$ **cu** $\sphericalangle B_2$**;**

$\sphericalangle A_3$ **cu** $\sphericalangle B_3$**;**

$\sphericalangle A_4$ **cu** $\sphericalangle B_4$**;**



d)unghiuri interne de aceeaşi parte a secantei

$\sphericalangle A_4$ **cu** $\sphericalangle B_1$**;**

$\sphericalangle A_3$ **cu** $\sphericalangle B_2$**;**

e)unghiuri externe de aceeaşi parte a secantei

$\sphericalangle A_1$ **cu** $\sphericalangle B_4$**;**

$\sphericalangle A_2$ **cu** $\sphericalangle B_3$**;**

Obs.: Dacă $d_1 \parallel d_2$ şi d e secantă atunci cele două drepte formează:

a) unghiuri alterne interne congruente
b)unghiuri alterne externe congruente
c)unghiuri corespondente congruente
d) unghiuri interne de aceeaşi parte a secantei congruente
e) unghiuri externe de aceeaşi parte a secantei congruente

Obs.:2: e valabil şi reciproc, adică dacă două drepre formează o pereche de unghiuri ce verifică **oricare** din condițiile de mai sus, $(a,b,c,d$ sau $e)$, atunci cele două drepte sunt paralele

Spre exemplu, dacă avem două drepte ce formează o pereche de unghiuri alterne interne congreunte, atunci cele două drepte sunt paralele

13) Axioma paralelelor-printr-un punct exterior unei drepte putem duce o singură paralelă la acea dreaptă

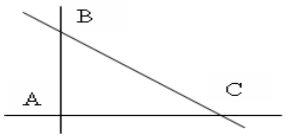
14) Drepte perpendiculare, distanța de la un punct la o dreaptă, oblica față de o dreaptă

a* perpendiculară pe *b $\Leftrightarrow a,b$ concurente şi formează un unghi de $90°$ se notează $a \perp b$

distanța de la un punct la o dreaptă - este lungimea perpendicularei din acel punct pe dreapta respectivă

oblica față de dreapta d este o dreaptă concurentă cu *d*, care face un unghi diferit de $90°$

Exp.: dreapta $AB \perp AC$, distanța de la B la dreapta AC este lungimea segmentului AB, iar dreapta BC este oblică față de dreapta AC



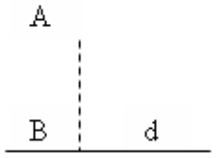
15) Proiecții ortogonale pe o dreaptă

a)proiecția unui punct pe o dreaptă- este piciorul perpendicularei din acel punct pe dreapta dată

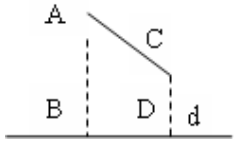
b) proiecția unui segment pe o dreaptă este segmentul ce are ca şi capete proiecțiile pe dreaptă a capetelor segmentului inițial

Obs.: proiecția unui segment perpendicular pe o dreaptă este un punct.

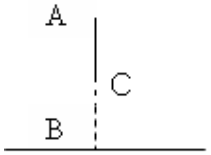
*Exp.:*proiecția punctului A pe dreapta d este punctul B.



*Exp.:*proiecția segmentului AC pe dreapta d este segmentul BD



*Exp.:*proiecția segmentului AC pe dreapta d este B

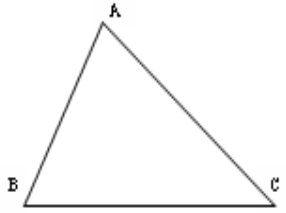


16) Triunghiul – este format din unirea a trei puncte necoliniare. Se notează ΔABC.

Obs.: laturile triunghiului sunt $[AB]=c,[BC]=a,[CA]=b,$

unghiurile sunt $\sphericalangle ABC = \sphericalangle B$,

$\sphericalangle BCA = \sphericalangle C, \sphericalangle CAB = \sphericalangle A$



Obs.2: perimetrul unui triunghi este format din suma laturilor sale, deci $P_{\Delta ABC} = a+b+c$, iar semiperimetrul este $p_{\Delta ABC} = \dfrac{a+b+c}{2}$

Obs.3: Pentru ca 3 numere reale a,b,c să fie laturile unui triunghi, trebuie ca ele să verifice inegalitățile: $a<b+c, b<c+a, c<a+b$ (numite inegalitățile triunghiului)

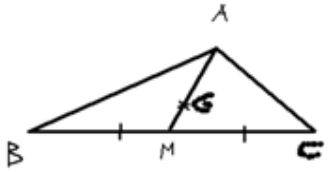
*Obs.4:*suma unghiurilor unui triunghi este 180°

Obs.5: în orice triunghi, inegalitatea dintre unghiuri este echivalentă cu inegalitatea dintre laturi, adică

$a<b<c \Leftrightarrow m(\sphericalangle A)<m(\sphericalangle B)<m(\sphericalangle C)$

17) Linii importante în triunghi - sunt mediana, înălțimea, bisectoarea, mediatoarea

a) mediana : uneşte vârful cu mijlocul laturii opuse , medianele se intersecteaza in "G" numit centru de greutate, situat la $\frac{1}{3}$ de bază şi $\frac{2}{3}$ de vârf.

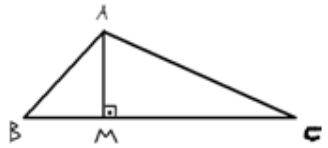


Obs.: $\dfrac{GM}{GA} = \dfrac{1}{2}, GM = \dfrac{1}{3}AM, AG = \dfrac{2}{3}AM$

Obs.: orice mediană împarte triunghiul în două triunghiuri de arii egale.

b) înălțimea : perpendiculara din vârf pe latura opusă, se intersectează în "**H**" -ortocentru

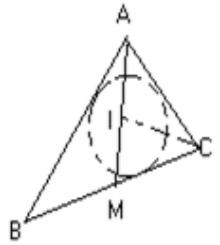
Obs 1 : $h_1 \cdot b_1 = h_2 \cdot b_2 = h_3 \cdot b_3$



c) bisectoarea – împarte unghiul în 2 părți egale, se intersectează în "**I**", numit cercul cercului înscris

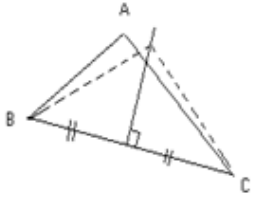
Obs 1: Teorema bisectoarei : $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BM}{MC}$

Obs 2: Distanțele de la "**I**" la cele 3 laturi sunt egale (de fapt sunt egale cu **r** - raza cercului înscris)



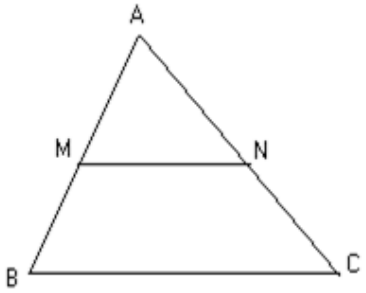
d) mediatoarea – perpendiculara pe mijlocul laturii, se intersectează în "**O**", numit cercul cercului circumscris

Obs 1: Distantele de la oricare punct de pe mediatoare la capetele segmentului sunt egale



Obs 2: Distanțele de la O la vârfurile triunghiului sunt egale (de fapt sunt egale cu **R**-raza cercului circumscris)

18) Linia mijlocie in triunghi – este segmentul care uneşte mijloacele a
două laturii opuse



Obs.: următoarele afirmații sunt echivalente:
a) un segment e linie mijlocie într-un triunghi
b) uneşte mijloacele a două laturi
c) trece prin mijlocul unei laturi, este în interiorul triunghiului şi este paralelă cu a treia

Obs.2: afirmații echivalente înseamnă că dintr-una din ele putem deduce pe oricare din celelalte, spre exemplu "dacă M este mijlocul segmentului AB şi $MN \| BC$, atunci şi N este mijlocul laturii AC."

19) Clasificarea triunghiului după măsura unghiurilor sale:
a) ΔABC **este ascuțitunghi** dacă ΔABC are toate unghiurile sale sunt ascuțite, adică au măsura mai mică decât $90°$
b) ΔABC **este dreptunghic** dacă ΔABC are un unghi cu măsura de $90°$
c) ΔABC **este obtuzunghic** dacă ΔABC are un unghi cu măsura mai mare decât $90°$

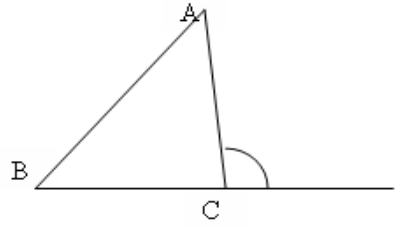
20) Clasificarea triunghiului după măsura laturilor sale:
a) ΔABC **este oarecare(scalen)**dacă ΔABC dacă laturile au lungime oarecare
b) ΔABC **este isoscel** dacă ΔABC are 2 laturi congruente
c) ΔABC **este echilateral** dacă ΔABC toate laturile congruente între ele.

Obs.: orice triunghi echilateral este triunghi isoscel

21) Triunghiul isoscel - următoarele afirmații sunt echivalente:
a) ΔABC este isoscel
b) ΔABC are două laturi congruente
c) ΔABC are două unghiuri congruente
d) ΔABC are o mediană care coincide cu o înălțime
e) ΔABC are o mediană care coincide cu o bisectoare
f) ΔABC are o mediană care coincide cu o mediatoare
g) ΔABC are o înălțime care coincide cu o bisectoare
h) ΔABC are o înălțime care coincide cu o mediatoare
i) ΔABC are o bisectoare care coincide cu o mediatoare

22) Triunghiul echilateral - următoarele afirmații sunt echivalente:
a) ΔABC este echilateral
b) ΔABC toate laturile congruente
c) ΔABC are toate unghiurile congruente
d) ΔABC este isoscel cu un unghi de $60°$
e) ΔABC are două unghiuri egale cu $60°$

23) Unghiul exterior unui triunghi
-este unghiul format de o latură a unui triunghi şi prelungirea altei laturi.



Obs.: un unghi exterior este egal cu suma unghiurilor interioare nealăturate lui
$m(\sphericalangle extC) = m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B)$

Obs.: bisectoarea unghiului exterior al unui triunghi este perpendiculară pe bisectoarea unghiului interior adiacent lui.

24) Congruența triunghiurilor – două triunghiuri sunt congruente dacă au toate laturile şi toate unghiurile respectiv congruente, adică $\Delta ABC \equiv \Delta MNP \Leftrightarrow AB \equiv MN, BC \equiv NP, CA \equiv PM$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M, \sphericalangle B \equiv \sphericalangle N, \sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$. Pentru a nu arăta întotdeauna 6 congruențe, sunt criteriile (cazurile) de congruență:

Cazuri de congruență

a) (L U L) dacă două triunghiuri au două laturi respectiv congruente şi unghiurile dintre ele congruente, atunci cele două triunghiuri sunt congruente

b) (U L U) dacă două triunghiuri au două unghiuri respectiv congruente şi laturile dintre ele congruente, atunci cele două triunghiuri sunt congruente

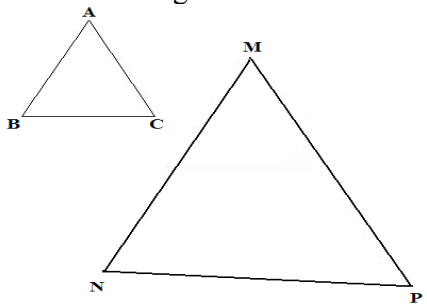
c) (L L L) dacă două triunghiuri au toate trei laturile respectiv congruente, atunci cele două triunghiuri sunt congruente

Obs: Dacă $AB \equiv MN, \sphericalangle B \equiv \sphericalangle N, \sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$ avem situația (U U L) , acesta nu e caz, dar folosind suma unghiurilor se aduce la cazul (U L U).

25) Asemănarea triunghiurilor – două triunghiuri sunt asemenea dacă au toate laturile respectiv proporționale şi toate unghiurile respectiv congruente, adică

$\Delta ABC \sim \Delta MNP$

$\Leftrightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CA}{PM}$



$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M, \sphericalangle B \equiv \sphericalangle N, \sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$. Pentru a nu arăta întotdeauna 6 relații, sunt criteriile (cazurile) de asemănare:

Cazuri de asemănare:

a) (U U) dacă cele două triunghiuri au două unghiuri congruente, atunci triunghiurile sunt asemenea

b) (L U L) dacă cele două triunghiuri au un câte un unghi congruent şi laturile care-l alcătuiesc respectiv proporționale

c) (L L L) cele două triunghiuri au toate trei laturile respectiv proporționale

Exp.: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ daca avem unul din cazurile

a) (UU): $m(\angle B) = m(\angle B')$ si $m(\angle A) = m(\angle A')$

b) (LUL): $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ si $m(\angle B) = m(\angle B')$

Obs: unghiul trebuie obligatoriu dintre laturi

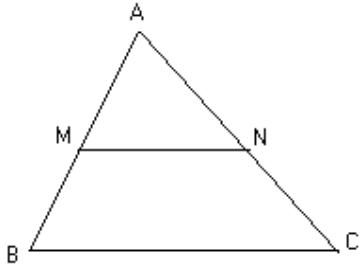
c) (LLL): $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$

26) Teorema lui Thales

În ΔABC, dacă $MN \| BC \Rightarrow$

$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

Obs.: o paralelă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi segmente proporționale.



Reciproca teoremei lui Thales:

În ΔABC ,dacă: $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

$\Rightarrow MN \| BC$

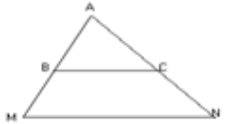
Obs.: Se aplica pentru MN deasupra de A sau sub BC

Exp.:

$MN \| BC$

$\Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM}$





Obs La T. Thales, folosind proporții derivate, se pot lua orice alte raporturi egale

Exp: $MN \| BC <=> \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$ sau $\frac{AB}{MB} = \frac{AC}{NC}$

27) Teorema fundamentală a asemănării

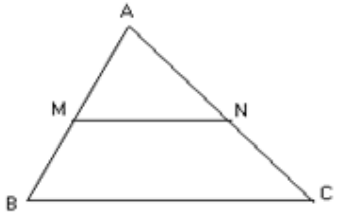
În ΔABC, dacă $MN \| BC \Rightarrow$

$\Delta ABC \sim \Delta MNP$

Obs.: Teorema mai este cunoscută şi sub forma

În ΔABC, dacă $MN \| BC$

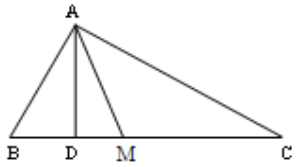
$\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$



28) Triunghi dreptunghic

Triunghiul ABC e dreptunghic $\Leftrightarrow$ triunghiul ABC are un unghi drept

Obs.: în cazul nostru, ΔABC dreptunghic $\Leftrightarrow$ $m(\sphericalangle A) = 90°$



M

Obs.: latura care se opune unghiului de $90°$ se numeşte ipotenuză, iar celelalte două laturi se numesc catete

29) cazurile de congruență ale triunghiurilor dreptunghice:

a) cazul (CC)-dacă două triunghiuri dreptunghice au cele două catete respectiv congruente, atunci cele două triunghiuri sunt congreunte

b) cazul (IC)- dacă două triunghiuri au ipotenuzele congruente şi o catetă congruentă, atunci cele două triunghiuri sunt congruente

c)cazul (IU) – dacă două triunghiuri au ipotenuzele congruente şi un unghi ascuțit congruent, atunci cele două triunghiuri sunt congruente

d) cazul (CU) – dacă două triunghiuri au câte o catetă congruentă şi câte un unghi ascuțit congruent, atunci cele două triunghiuri sunt congruente

30) Proprietăți în triunghiul dreptunghic:

a) T.lui Pitagora ΔABC dreptunghic $\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$

(ΔABC dreptunghic $\Rightarrow ip^2 = (cateta_1)^2 + (cateta_2)^2$)

b) reciproca teoremei lui Pitagora: dacă $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow$ ΔABC dreptunghic cu $m(\sphericalangle A) = 90°$

c) T.înălțimii: ΔABC dreptunghic $\Rightarrow AD^2 = BD \cdot CD$

(ΔABC dreptunghic $\Rightarrow h^2 = proiectia_1 \cdot proiectia_2$)

d) T. catetei: ΔABC dreptunghic $\Rightarrow AB^2 = BD \cdot BC$

(cateta^2 = ipotenuza $\cdot$ proiecția celeilalte catete pe ipotenuză)

e) ΔABC dreptunghic $\Rightarrow AD^2 = \frac{AB \cdot AC}{BC}$ $\left(h_{\sphericalangle \text{drept}} = \frac{c_1 \cdot c_2}{ip} \right)$

f) Teorema medianei ΔABC dreptunghic $\Leftrightarrow AM = \frac{BC}{2}$,

unde AM – mediană (dacă ΔABC este dreptunghic, atunci mediana din vârful drept este jumătate din ipotenuză şi reciproc, dacă într-un triunghi o mediană este jumătate din latura pe care cade, atunci triunghiul este dreptunghic, cu unghiul drept în vârful de unde porneşte mediana)

g) Teorema unghiului de 30º- dacă ΔABC dreptunghic şi $m(\sphericalangle C) = 30° \Leftrightarrow AB = \frac{BC}{2}$ (într-un triunghi dreptunghic, cateta ce se opune unghiului de 30º este jumătate din ipotenuză şi reciproc, dacă într-un triunghi o catetă este jumătate din ipotenuză, atunci unghiul ce se opune acelei catete este de 30º)

h) Trigonometrie în triunghi dreptunghic

$\sin = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}}$; $\cos = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuză}}$;

$tg = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta alăturată}}$; ctg= $\frac{\text{cateta alăturată}}{\text{cateta opusă}}$

Obs.: $tg = \frac{\sin}{\cos}; ctg = \frac{\cos}{\sin}$

i) Formula fundamentală a trigonometriei ΔABC dreptunghic cu $m(\sphericalangle A)=90^\circ \Rightarrow \sin^2(\sphericalangle B)+\cos^2(\sphericalangle B)=1, \sin^2(\sphericalangle C)+\cos^2(\sphericalangle C)=1$

31) Metode de a arăta că un triunghi este dreptunghic:

met.I: dacă $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow m(\sphericalangle A)=90^\circ$ (reciproca teoremei lui Pitagora)

met II: arătăm că are un unghi cu măsura de 90°

32) Tabelul cu funcții trigonometrice

	0º	30º	45º	60º	90º
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	\ (nu există)
ctg	\ (nu exista)	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
Linie constructie	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

E1) În linia de construcție punem cifrele 0; 1; 2; 3; 4

E2) extragem radical din aceste numere $\sqrt{0};\sqrt{1};\sqrt{2};\sqrt{3};\sqrt{4}$

E3) împărțim aceşti radicali la 2, adică $\frac{\sqrt{0}}{2};\frac{\sqrt{1}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{4}}{2}$

E4) cu aceste rezultate completăm linia lui ***sin*** $\Rightarrow 0;\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1$

E5) linia lui ***cos*** conține valorile lui ***sin*** în ordine inversă:

$1;\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{2};0$

E6) pe linia lui *tg* folosim $tg=\frac{\sin}{\cos}$, iar pe linia lui *ctg* scriem rezultatele de la tg în ordine inversă

33) Rezolvarea triunghiului dreptunghic – însemnă determinarea tuturor elementelor unui triunghi dacă ştim trei elemente

- se aplică sin, cos, tg, ctg şi t. Pitagora, t. catetei, t. înălțimii

34) Determinarea tipului de unghi într-un triunghi cunoscând laturile

Dacă $l_1^2 < l_2^2 + l_3^2 \Rightarrow$ unghiul opus lui l_1 este ascutit

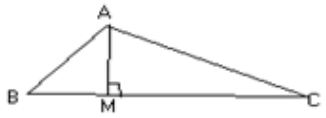
Dacă $l_1^2 = l_2^2 + l_3^2 \Rightarrow$ unghiul opus lui l_1 este drept

Dacă $l_1^2 > l_2^2 + l_3^2 \Rightarrow$ unghiul opus lui l_1 este obtuz

35) Determinarea înălțimii într-un triunghi oarecare dacă ştim laturile – cunoaştem $AB=c, BC=a, AC=b$

E1) notăm $BM=x \Rightarrow CM=BC-x$

E2) exprimăm AM cu Pitagora în ΔABM şi ΔACM, astfel în $\Delta ABM, AM^2=AB^2-BM^2$



$\Rightarrow AM^2=c^2-x^2$, iar în

$\Delta ACM, AM^2=AC^2-CM^2 \Rightarrow AM^2=b^2-(a-x)^2$

E3) egalăm AM^2 din cele 2 exprimări

$c^2-x^2=b^2-(a-x)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow c^2-\cancel{x^2}=b^2-a^2+2ax-\cancel{x^2} \Rightarrow x=\frac{c^2-b^2+a^2}{2a}$

E4) înlocuim valoarea lui x într-una din exprimările de mai sus, spre exemplu în $AM^2=c^2-x^2 \Rightarrow AM^2=c^2-\left(\frac{c^2-b^2+a^2}{2a}\right)^2$

36) Aria unui triunghi:

$A_{\Delta ABC}=\dfrac{b\cdot h}{2}=\dfrac{l_1\cdot l_2\cdot\sin\left(\sphericalangle\left(l_1,l_2\right)\right)}{2}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde

$p=\dfrac{a+b+c}{2}$ este semiperimetrul triunghiului.

Obs.1: $A_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ e numeşte **formula lui Heron**

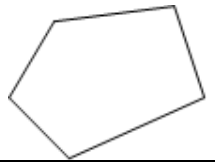
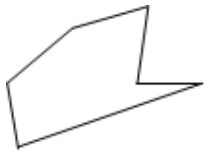
Obs. 2: formula lui Heron se foloseste dacă *a,b,c* sunt laturi fără radicali, daca *a,b,c* au radicali, găsim înălțimea cunoscând laturile

$\Rightarrow A_{\Delta ABC}=\dfrac{b\cdot h}{2}$

Obs.:3: ΔABC este dreptunghic $\Rightarrow A=\dfrac{c_1\cdot c_2}{2}$

Obs.4: Aria triunghiului echilateral $=\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$

37) Poligon – este o linie frântă închisă.

Poligon convex – are toate unghiurile în exteriorul celorlalte 	**Poligon concav –** are un unghi în interiorul altor unghiuri 

Obs.: suma unghiurilor unui poligon convex cu n laturi este: $S_n=(n-2)\cdot 180°$

Obs.: **un poligoan este regulat** $\Leftrightarrow$ toate laturile sunt congruente şi toate unghiurile sunt congruente

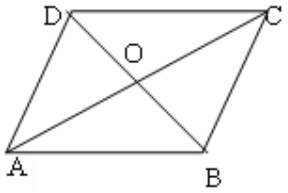
38) Patrulaterul – este un poligon cu patru laturi

Patrulater convex – are toate unghiurile în exteriorul celorlalte 	**Patrulater concav –** are un unghi în interiorul altor unghiuri 

Obs.: suma unghiurilor unui patrulater convex este: 360°

39) Paralelogramul – este un patrulater convex cu laturile opuse paralele.

Obs.: $ABCD$ paralelogram atunci $[AB],[BC],[CD],[DA]$ sunt laturile paralelogramului A,B,C,D sunt vârfurile paralelogramului, iar $[AC],[BD]$ sunt diagonale



Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $ABCD$ este paralelogram

b) $AB\parallel DC, BC\parallel AD$ (adică laturile opuse sunt paralele)

c) $AB\parallel DC, AB\equiv DC$ sau $BC\parallel AD, BC\equiv AD$ (adică are o pereche de laturi opuse paralele şi congruente)

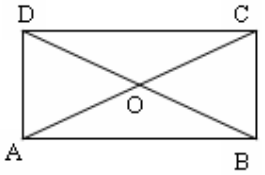
d) $\sphericalangle A\equiv\sphericalangle C$ şi $\sphericalangle B\equiv\sphericalangle D$ (adică unghiurile opuse sunt congruente)

e) $AO\equiv CO$ şi $BO\equiv DO$ (adică diagonalele se înjumătățesc)

Obs.2: Pentru a arăta că o figură geometrică este paralelogram, este suficient să arătăm oricare din relațiile de mai sus.

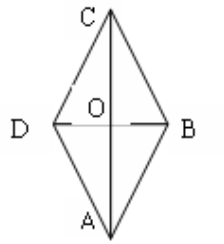
40) Dreptunghiul – este paralelogramul cu un unghi drept.

Obs.: $ABCD$ dreptunghi atunci $[AB],[BC],[CD],[DA]$ sunt laturile dreptunghiului, A,B,C,D sunt vârfurile dreptunghiului, iar $[AC],[BD]$ sunt diagonale



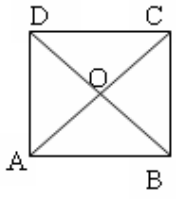
Următoarele afirmații sunt echivalente:
a) $ABCD$ este dreptunghi
b) $ABCD$ este paralelogram cu $m(\sphericalangle A)=90°$ (adică este un paralelogram cu un unghi drept)
c) $ABCD$ este paralelogram cu $AC \equiv BD$ (adică este un paralelogram cu diagonalele congruente)
d) $ABCD$ este patrulater cu $m(\sphericalangle A)=m(\sphericalangle B)=m(\sphericalangle C)=90°$ (adică este un patrulater cu trei unghiuri drepte)

41) Rombul – este paralelogramul cu două laturi alăturate congruente.



Următoarele afirmații sunt echivalente:
a) $ABCD$ este romb
b) $ABCD$ este paralelogram cu $AB \equiv BC$ (adică este un paralelogram cu două laturi alăturate congruente)
c) $ABCD$ este paralelogram cu $AC \perp BD$ (adică este un paralelogram cu diagonalele perpendiculare)
d) $ABCD$ este paralelogram cu $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle BAC$ (adică este un paralelogram cu una din diagonalele să fie bisectoare a unui unghi)
e) $ABCD$ este patrulater cu $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$ (adică este un patrulater cu toate laturile congruente).

42) Pătratul – este un dreptunghi care are două laturi alăturate congruente

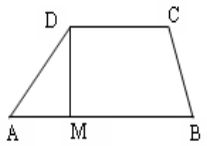


Următoarele afirmații sunt echivalente:
a) $ABCD$ este pătrat
b) $ABCD$ este dreptunghi cu $AB \equiv BC$ (adică este un dreptunghi cu două laturi alăturate congruente)
c) $ABCD$ este romb cu $m(\sphericalangle A)=90°$ (adică este un romb cu un unghi drept)

Obs.: Aşadar, pentru a arăta că $ABCD$ este pătrat, putem folosi orice metodă de a arăta că $ABCD$ dreptunghi şi că $ABCD$ romb.

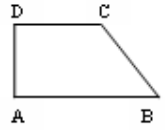
Putem folosi şi reciproc şi deci orice pătrat are toate proprietățile dreptunghiului şi toate proprietățile rombului.

43) Trapezul – este patrulaterul care are două laturi paralele şi celelalte două neparalele.

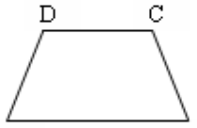


Obs.: AB, CD sunt baze ale trapezului, AB baza mare, CD iar baza mică.
DM este înălțimea trapezului

Trapezul dreptunghic – este trapezul la care una din laturile neparalele este perpendiculară pe cele două baze.

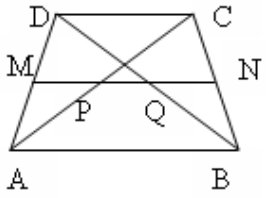


Trapezul isoscel – este trapezul care are laturile neparalele congruente



Obs.: următoarele afirmații sunt echivalente:
a)trapezul $ABCD$ este isoscel
b)trapezul $ABCD$ are $AD \equiv BC$
c)trapezul $ABCD$ are $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$ sau $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle D$
d)trapezul $ABCD$ are $AC \equiv BD$

Linia mijlocie în trapez – segmentul de dreaptă ce uneşte mijloacele laturilor neparalele.



Obs.: următoarele afirmații sunt echivalente:
a) MN linie mijlocie
b) M –mijlocul lui AD, N mijlocul lui BC
c) M mijlocul lui AD şi $MN \| AB$

Proprietăți:
a)Dacă MN este linie mijlocie în trapezul $ABCD \Rightarrow MN$ este paralelă cu bazele şi MN este egală cu suma bazelor, $MN = \dfrac{AB+CD}{2}$

b)Dacă MN este linie mijlocie în trapezul $ABCD$, segmentul determinat de diagonale pe linia mijlocie este egal cu semidiferența bazelor $PQ = \frac{AB - CD}{2}$

44) Ariile patrulaterelor

a) aria patrulaterului convex $ABCD$ este dată de suma a două arii de triunghiuri determinate de una din diagonale sau este dată de suma ariilor a patru triunghiuri determinate de cele două diagonale, adică: $A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ADC} = A_{AOB} + A_{BOC} + A_{COD} + A_{DOA}$

b) aria paralelogramului $ABCD$ este dată de produsul dintre o latură şi înălțimea corespunzătoare acelei laturi, sau de produsul a două laturi alăturate înmulțit cu sinusul unghiului dintre acele laturi, adică are formula: $A_{ABCD} = AB \cdot h_{AB} = AB \cdot BC \cdot \sin(\sphericalangle B)$

c) aria dreptunghiului $ABCD$ este dată de produsul dintre lungimea şi lățimea dreptunghiului, adică are formula: $A_{ABCD} = AB \cdot BC$

d) aria rombului $ABCD$ este dată de produsul a două laturi alăturate înmulțit cu sinusul unghiului dintre acele laturi sau de semiprodusul diagonalelor, adică are formula:

$$A_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin(\sphericalangle B) = \frac{AC \cdot BD}{2} = baza \cdot înălțimea$$

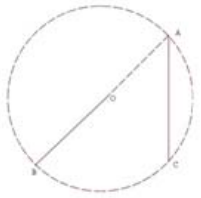
d) aria pătratului $ABCD$ este dată de lungimea laturii ridicate la pătrat, $A_{ABCD} = l^2$ sau de pătratul diagonalei împărțit la 2, adică are formula: $A_{ABCD} = AB^2 = \frac{AC^2}{2}$

e) aria trapezului $ABCD$ este dată de suma bazelor înmulțită cu înălțimea, şi rezultatul împărțit la 2, $\left(A_{ABCD} = \frac{(B+b) \cdot h}{2} \right)$ adică are formula: $A_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot h_{AB}}{2}$

45) Aria patrulaterelor cu diagonalele perpendiculare (inclusiv pătrat, romb) -este dată de semiprodusul diagonalelor

$\Rightarrow A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

46) Cercul: mulțimea punctelor egal depărtate de un punct fix numit centrul cercului.



Distanța oricărui punct de pe cerc la centru se numeşte raza cercului, notată r

Elementele cercului:

a) raza cercului - segmentul care uneşte centrul cercului cu un punct de pe cerc (toate razele sunt egale). Se notează cu r

b) diametrul cercului – este coarda care trece prin centrul cercului, are lungimea egală cu $2r$

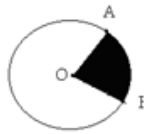
c) coarda – este segmentul care uneşte două puncte ale cercului

d) arc de cerc – porțiunea din cerc delimitată de două puncte de pe cerc

e)semicerc – porțiune din cerc delimitată de două puncte diametral opuse.

Exp.: $OA \rightarrow$ rază , $BA \rightarrow$ diametru, $AC \rightarrow$ coardă, $\overset{\frown}{AC} \rightarrow$ arc de cerc, $\overset{\frown}{ABC} \rightarrow$ arcul mare $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{AB} \rightarrow$ semicerc

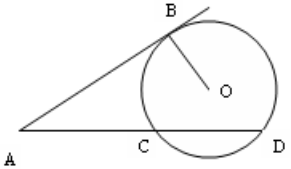
f) sector de cerc – porțiunea din interiorul cercului cuprinsă între 2 raze, în cazul nostru porțiunea haşurată, sectorul AOB



g) tangenta – dreapta care are un singur punct comun cu cercul

Obs. : tangenta este perpendiculara pe rază in punctul de contact

Exp. : AB este tangentă şi cum BO este rază $AB \perp BO$

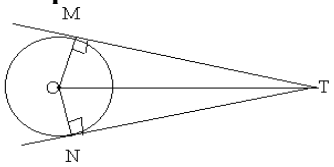


h) secanta - dreapta care are un două puncte comune cu cercul

Exp. : AD este secantă.

Obs. : cercul este doar linia curbă care îl alcătuieşte, iar **discul** este acea linie curbă împreună cu interiorul său.

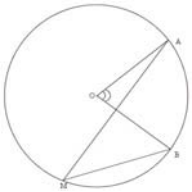
47) Tangentele duse la un cerc dintr-un punct exterior sunt congruente – dacă TM, TN sunt tangente din punctul T, atunci $TM \equiv TN$. Se arată uşor că $\Delta TMO \equiv \Delta TNO\left(IC\right) \Rightarrow TM \equiv TN$



48) Unghiuri în cerc

a) unghi la centru – are vârful în centru cercului, iar laturile lui sunt raze şi are măsura egală cu a arcului subîntins,

$m(\angle AOB) = m\left(\widehat{AB}\right)$



b) unghi înscris in cerc - are vârful pe cerc, iar laturile lui sunt coarde şi are măsura egală cu jumătate din a arcului subîntins,

$$m(\angle AMB) = \frac{m\left(\widehat{AB}\right)}{2}$$

49) Proprietăţi referitoare la coarde şi arce de cerc:

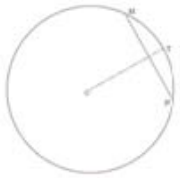
a) la arce congruente corespund coarde congruente şi reciproc

$\widehat{AB} \equiv \widehat{CD} \Rightarrow AB = CD$

$AB = CD \Rightarrow \widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$

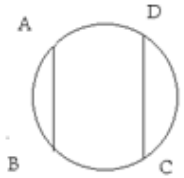


b) orice rază perpendiculară pe o coardă o înjumătăţeşte şi reciproc, dacă o rază înjumătăţeşte o coardă, atunci ea este perpendiculară pe coarda respectivă



c) arcele de cerc cuprinse între două coarde paralele sunt congruente şi reciproc

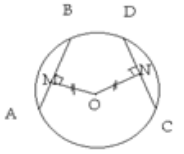
$AB \parallel CD \Rightarrow A\widehat{D} \equiv B\widehat{C}$



d) coardele egal depărtate de centru sunt egale şi reciproc

$OM \equiv ON \Rightarrow AB \equiv CD$

$AB \equiv CD \not\Rightarrow OM \equiv ON$



50) Puncte conciclice, poligoane inscriptibile, patrulater inscriptibil

a) puncte conciclice – există un cerc care trce prin acele puncte

b) un poligon este inscriptibil – vârfurile sale sunt situate pe un cerc

c) un patrulater este inscriptibil - vârfurile sale sunt situate pe un cerc

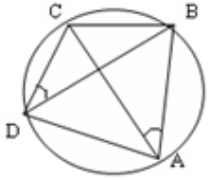
Obs.: următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) patrulaterul $ABCD$ -este inscriptibil

b) o pereche de unghiurile opuse sunt suplementare, adică

$m\left(\sphericalangle A\right) + m\left(\sphericalangle C\right) = 180°$ sau

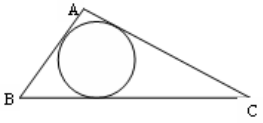
$m\left(\sphericalangle B\right) + m\left(\sphericalangle D\right) = 180°$



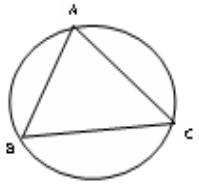
c)un unghi format de o latură cu o diagonală este congruent cu un unghi formate de cealaltă diagonală cu latura opusă, adică $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BDC$

51)Cerc înscris, cerc circumscris unui triunghi

a) un cerc este înscris într-un triunghi dacă laturile triunghiului sunt tangente la acel cerc (cercul este interior triunghiului, triunghiul este circumscris cercului). Centrul cercului înscris se găseşte la intersecţia bisectoarelor triunghiului



b) un cerc este circumscris unui triunghi dacă acel cerc trece prin vârfurile triunghiului (cercul este circumscris triunghiului, triunghiul este înscris în cerc).
Centrul cercului circumscris se găseşte la intesecția mediatoarelor triunghiului.

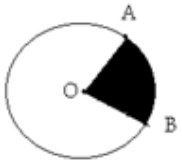


52) Lugimea şi aria cercului şi a sectorului de cerc

a) lungimea cercului - $L = 2\pi \cdot R$

b) aria cercului - $A = \pi \cdot R^2$

c) lungimea arcului de cerc



$$L_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{2\pi \cdot R \cdot m(\sphericalangle_{\text{centru}})}{360^\circ} \Rightarrow L_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\pi \cdot R \cdot m(\sphericalangle_{\text{centru}})}{180^\circ}$$

d) aria sectorului circular

$$A_{\text{sector}} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot m(\sphericalangle_{\text{centru}})}{360^\circ}$$

53) Elementele importante în poligoanele regulate

a) latura, notată cu ***l***

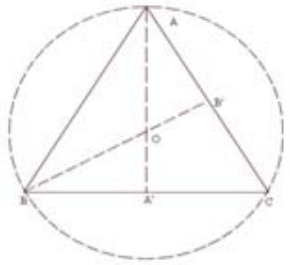
b) apotemă – reprezintă distanța de la centru la una din laturi(într-un poligon regulat, apotemele sunt congruente), se notează cu ***a,*** este aceeaşi cu raza cercului înscris

c) raza cercului circumscris – este lungimea segmentului ce uneşte centrul cercului circumscris cu unul din vârfuri, se notează cu ***R***

d) perimetru – este suma laturilor, se notează cu ***P***

e) aria – se notează cu ***A***

54) deducerea elementelor în triunghi echilateral (este poligonul regulat cu trei laturi)



înălțimea : $h_3 = \frac{l_3 \cdot \sqrt{3}}{2}$, (se face teorema lui Pitagora în $\Delta ABA'$ şi folosim că $BA' = \frac{l_3}{2}$)

apotema: $a_3 = \frac{l_3 \cdot \sqrt{3}}{6} = r_3, OA' = OB' = \frac{1}{3} \cdot \frac{l_3 \cdot \sqrt{3}}{2}$, adică folosim faptul că centrul triunghiului echilateral, deoarece este şi centru de greutate, este o treime de bază din înălțime

Raza cercului circumscris: $R_3 = \frac{l_3 \cdot \sqrt{3}}{3}$, căci $R_3 = OA = OB =$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{l_3 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{l_3 \cdot \sqrt{3}}{3}$ adică folosim că centrul triunghiului echilateral, deoarece este şi centru de greutate, este la două treimi de vârf din înălțime

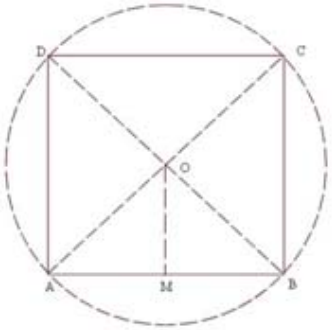
Perimetru - $P_3 = 3 \cdot l_3$

Aria $A_3 = \frac{(l_3)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, căci $A_3 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{l_3 \cdot \frac{l_3 \cdot \sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{(l_3)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

Obs.: putem exprima şi latura în funcție de aceste elemente, de exemplu, o să determinăm l_3 în funcție de a_3. Astfel,

$$\Rightarrow a_3 = \frac{l_3 \cdot \sqrt{3}}{6} \Rightarrow l_3 = \frac{6 \cdot a_3}{\sqrt{3}} = \frac{6a_3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow l_3 = 2a_3\sqrt{3}$$

55) Deducerea elementelor în pătrat (este poligonul regulat cu patru laturi)



diagonala - $d = l_4 \cdot \sqrt{2}$, căci facem teorema lui Pitagora în ΔABC cu $AB = BC = l_4$

apotema - $a_4 = \frac{l_4}{2} = r_4$, căci apotema OM este linie mijlocie în ΔBDA, deci e jumătate din bază

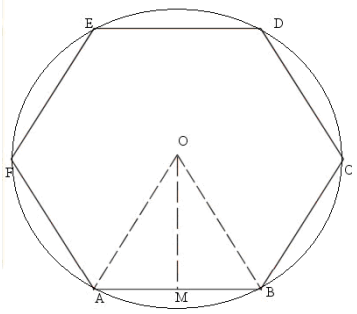
Raza cercului circumscris: $R_4 = \frac{l_2 \cdot \sqrt{2}}{2}$, căci e jumătate din diagonală

Perimetru - $P_4 = 4 \cdot l_4$

Aria $A = l^2 = \frac{BD \cdot AC}{2}$, căci orice pătrat e dreptunghi, deci aria este $A_4 = L \cdot l$ şi orice pătrat are diagonalele perpendiculare, deci $A_4 = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

56) Deducerea elementelor în hexagonul regulat(este poligonul regulat cu şase laturi)

hexagonul poate fi împărţit în şase triunghiuri echilaterale, deci apotema sa este înălţime într-un triunghi echilateral,



apotema - $a_6 = \frac{l_6 \cdot \sqrt{3}}{2} = r_6$

Raza cercului circumscris: $R_6 = l_6$

perimetrul - $P_6 = 6 \cdot l_6$

aria $A_6 = \frac{3(l_6)^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$ căci hexagonul poate fi împărţit în şase triunghiuri echilaterale, $A_6 = 6 \cdot A_{\Delta AOB} = 6 \cdot \frac{(l_6)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3(l_6)^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$

57) Tabel cu exprimarea elementelor în poligoanele regulate cu trei, patru şi cu şase laturi

	triunghi echilateral	**pătrat**	**hexagon regulat**
Elemente specifice	înălţimea $h_3 = \frac{l_3 \cdot \sqrt{3}}{2}$	diagonala $d = l_4 \cdot \sqrt{2}$	
apotemă	$a_3 = \frac{l_3 \cdot \sqrt{3}}{6} = r_3$	$a_4 = \frac{l_4}{2} = r_4$	$a_6 = \frac{l_6 \cdot \sqrt{3}}{2} = r_6$
Raza cercului circumscris	$R_3 = \frac{l_3 \cdot \sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \frac{l_2 \cdot \sqrt{2}}{2}$	$R_6 = l_6$
perimetrul	$P_3 = 3 \cdot l_3$	$P_4 = 4 \cdot l_4$	$P_6 = 6 \cdot l_6$
aria	$A_3 = \frac{(l_3)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$	$A = (l_4)^2$	$A_6 = \frac{3(l_6)^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$

58) Poziţiile relative a două drepte în spaţiu

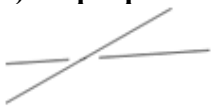
a) drepte coplanare - sunt drepte situate în acelaşi plan

b) drepte necoplanare – drepte care nu sunt situate în acelaşi plan

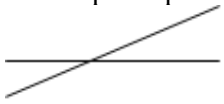
c) drepte concurente – intersecţia lor este formată dintr-un singur punct

d) drepte confundate(coincid) – sunt drepte care se suprapun

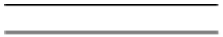
e) drepte paralele – sunt drepte coplanare care nu sunt concurente



drepte necoplanare



drepte concurente



drepte paralele

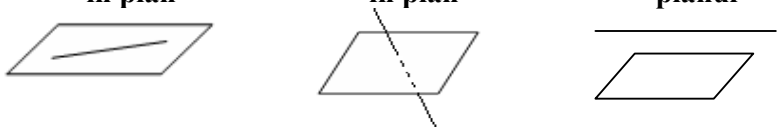
59) Poziţiile relative ale unei drepte faţă de un plan

a) conţinută în plan – are toate punctele în plan

b) concurentă cu planul – are un singur punct comun cu planul

c) paralelă cu planul – nu are nici un punct comun cu planul

dreaptă conţintută în plan	**dreaptă conţintută în plan**	**dreaptă paralelă cu planul**



60) Poziţiile relative ale două plane

a) plane ce se intesectează – intersecţia lor este o dreaptă

b)plane paralele – nu au nici un punct comun

Obs.: dacă două plane au un punct comun, atunci cele două plane au o dreaptă comună

61)Poziţiile relative a trei plane

a) plane ce se intesectează într-un singur punct

b) plane ce se intersectează după o dreaptă comună

c) plane paralele – nu au nici un punct comun

62) Unghiul a două drepte în spaţiu – întotdeauna se ia unghiul ascuţit

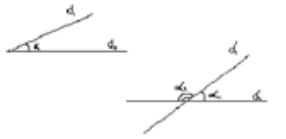
metoda I. alegem un punct pe una din ele, ducem paralela la cealaltă

metoda II: alegem un punct exterior celor două drepte, ducem paralele la ambele drepte

Obs.1: în spaţiu există, ca şi în plan:

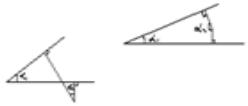
a) unghiuri cu laturi respectiv paralele

Obs: două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente sau suplementare



b) unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare

Obs: două unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare sunt congruente sau suplementare



63) Paralelismul în spaţiu

a) două drepte sunt paralele

$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow d_1, d_2$ coplanare şi d_1, d_2 nu au puncte comune

Obs: Există drepte fără puncte comune dar neparalele (se numesc necoplanare)

b) axioma paralelelor: printr-un punct exterior unei drepte trece o singură dreaptă paralelă cu ea

c) paralelismul unei drepte cu un plan

$d_1 \parallel \alpha : \exists d \subset \alpha$ astfel încât $d_1 \parallel d$

Obs.: reciproc nu e adevărat, adică din $d_1 \parallel \alpha \not\Rightarrow d_1 \parallel d, \forall d \subset \alpha$

d) paralelismul a două plane – două plane sunt paralele dacă unul din plane conţine două drepte concurente paralele cu cel de-al doilea plan, adică $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \exists\, d_1, d_2 \subset \alpha$ astfel încât $d_1 \parallel \beta$ *si* $d_2 \parallel \beta$

64) Perpendicularitate în spaţiu

a) perpendicularitatea a 2 drepte

$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m(\sphericalangle(d_1, d_2)) = 90^\circ$

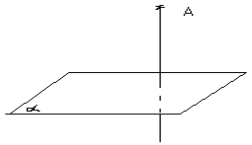
Obs: Pentru d_1, în spaţiu există o infinitate de drepte perpendiculare în acelaşi punct (care alcătuiesc planul perpendicular pe dreaptă în punctual respectiv)

b) perpendicularitatea unei drepte pe un plan

$d_1 \perp \alpha \Leftrightarrow d_1 \perp$ pe două drepte concurente din planul α

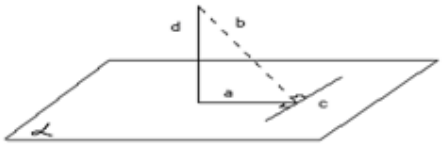
Obs: dacă $d_1 \perp \alpha \Rightarrow d_1 \perp$ pe orice dreaptă din α

65) Distanţa de la un punct la un plan– lungimea perpendicularei din punct pe plan



66) Distanţa între două plane paralele –este lungimea perpendicularei comune a celor două plane

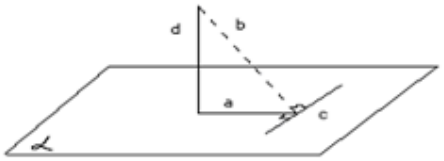
67) Teorema celor trei perpendiculare



$$\left.\begin{array}{l} d \perp \alpha \,,\, a \perp c \\ a, c \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow b \perp c$$

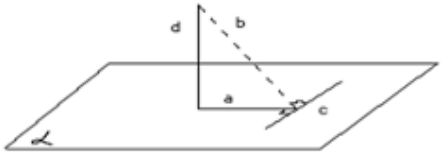
68) Reciprocele teoremei celor trei perpendiculare

Reciproca 1:



$$\left.\begin{array}{l} d \perp a \\ a \perp c \\ b \perp c \\ a, c \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp \alpha$$

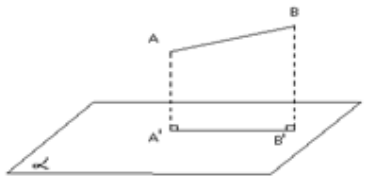
Reciproca 2:



$$\left.\begin{array}{l} d \perp \alpha \\ a, c \subset \alpha \\ b \perp c \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp c$$

68) Proiecții ortogonale: ducem perpendiculare din toate punctele figurii pe acel plan.

a) proiecția unui segment – se determină proiectând capetele segmentului pe acel plan



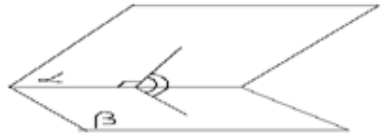
Exp.: dacă $AB \nparallel \alpha$ proiecția va fi un segment de lungime mai mică

Obs.2: $A'B' = AB \cdot \cos\left(\sphericalangle\left(AB, \alpha\right)\right)$

Obs.3: Dacă proiectăm ΔABC pe un plan α obținem $\Delta A'B'C'$ şi atunci $A_{\Delta ABC} = A_{\Delta A'B'C'} \cdot \cos\left(\sphericalangle\left(ABC, \alpha\right)\right)$

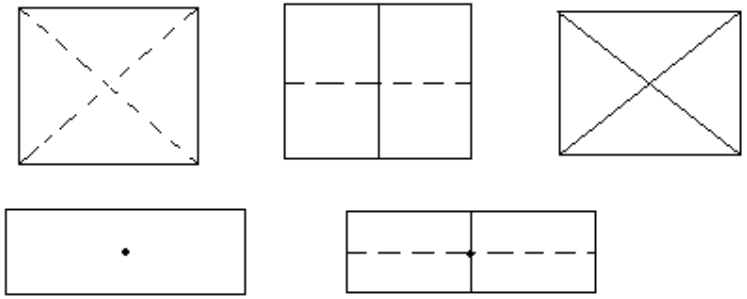
69) Unghiul unei drepte cu un plan – unghiul dintre paralela la dreaptă şi proiecția sa

70) Unghi diedru a două plane neparalele : - se alege un punct pe dreapta de intesecție a planelor, se duce în fiecare plan câte o semidreaptă, cel puțin una perpendiculară pe dreapta comună. Unghiul diedru căutat este unghiul format de cele două semidrepte



71) Centru (axă de simetrie) : figura să fie identică de cealaltă parte

Exp:



72) Prismă dreaptă şi prismă regulată. generalități:

a) prismă dreaptă– muchiile laterale sunt perpendiculare pe baze iar cele două baze sunt poligoane

b) prismă regulată- muchiile laterale sunt perpendiculare pe baze iar cele două baze sunt poligoane regulate

c) muchii laterale – laturile fețelor laterale

muchiile bazelor – laturile bazelor

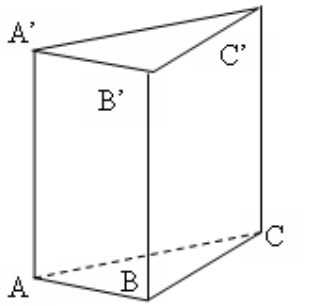
diagonala prismei – segmentul ce unește un vârf al bazei de jos cu un vârf al bazei de sus, aceste vârfuri neaparținând aceleiaşi fețe laterale

a) prismă triunghiulară dreaptă – este o prismă la care muchiile laterale sunt perpendiculare pe bază, iar $\Delta ABC, \Delta A'B'C'$ sunt triunghiuri congreunte

AA', BB', CC' muchii laterale

AB, BC, AC muchiile bazei

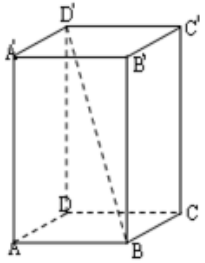
$AA' \perp$ (ABC)



Obs.: Prisma triunghiulară dreaptă nu are diagonale

Obs.:**prismă triunghiulară regulată –** este o prismă triunghiulară dreaptă la care cele două baze sunt triunghiuri echilaterale.

b) prismă patrulateră dreaptă – muchiile laterale sunt perpendiculare pe baze, iar bazele sunt dreptunghiuri congruente



Obs.:**diagonalele prismei** sunt $AC'; A'C; BD'; B'D$

Obs.: Prisma patrulateră dreaptă se numeşte şi **paralelipiped dreptunghic**

Obs.: într-o prismă patrulateră dreaptă diagonalele sunt congruente şi au lungimea $d = \sqrt{L^2 + l^2 + h^2}$

Obs.2: **Prismă patrulateră regulată**-este o prismă patrulateră dreaptă la care cele două baze sunt pătrate.

Obs.3: **Cubul** – este o prismă patrulateră la care toate feţele sunt pătrate, deci toate muchiile (şi ale bazei, şi cele laterale) sunt congruente.

Obs.:într-un cub, diagonalele sunt egale şi au lungimea $d = l\sqrt{3}$

c) Prismă hexagonală dreaptă – muchiile laterale sunt perpendiculare pe baze, iar bazele sunt hexagoane congruente

Obs.2: **Prismă hexagonală regulată** - este o prismă hexagonală dreaptă la care cele două baze sunt hexagoane regulate.

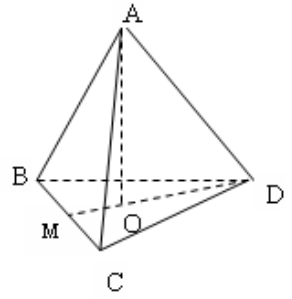
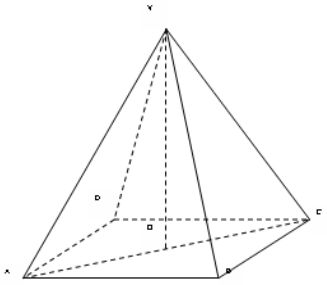
Desenarea ei este identică ca şi la prisma triunghiulară, respectiv cea patrulateră, singura deosebire este că aici bazele sunt hexagoane regulate.

73) Piramidă – are un vârf iar baza este poligon.

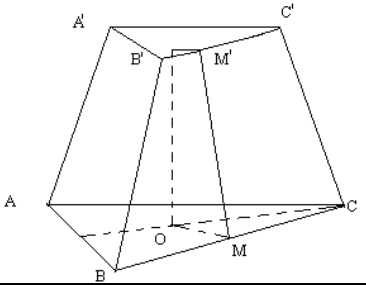
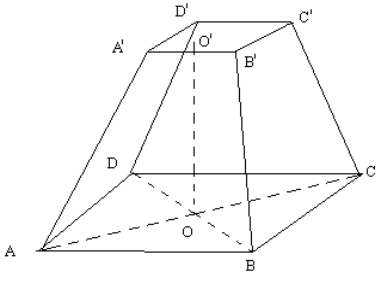
Obs.: **tetraedru -** piramidă triunghiulară

Piramidă regulată – este o piramidă cu baza poligon regulat

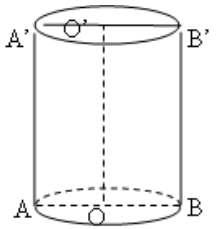
Obs.: **Tetraedru regulat** este o piramidă cu toate feţele triunghiuri echilaterale congruente(deci are toate muchiile, şi ale bazei şi cele laterale congruente).

a) piramida triunghiulară regulată	**b) Piramida patrulateră regulată**
	

74) Trunchi de piramidă – ducem piramida, o secţionăm şi ştergem vârful. Bazele vor fi figuri asemenea.

Trunchi de piramidă triunghiulară regulată	**Trunchi de piramidă patrulateră regulată**
	

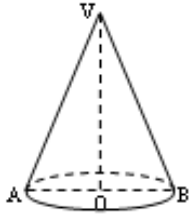
75)Cilindrul circular drept – este corpul geometric cu două baze cercuri congruente, la care linia ce uneşte centrele celor două cercuri este perpendiculară pe baze.



AO – raze, AA' – generatoare

înălțimea este OO'

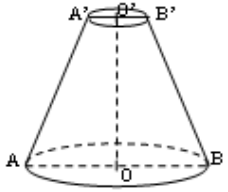
73) Conul circular drept – este corpul geometric cu un vârf şi cu baza cerc, proiecția înălțimii pe bază fiind centrul cercului



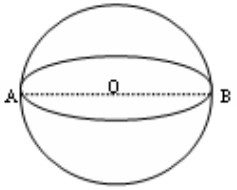
VB – Generatoare

VO – Inaltime

76) Trunchi de con circular drept – este corpul obținut prin secționarea unui con cu un plan paralel cu cele două baze. Bazele trunchiului de con circular drept sunt două cercuri asemenea, de raze diferite



77) Sfera – este mulțimea punctelor din spațiu egal depărtat de un punct fix, numit centrul sferei



OA, OB sunt raze, iar

AB este diametrul sferei

78) Notații uzuale la corpurile geometrice:

a – *latura cubului* L – *lungime* l – *latime*

h – *inaltimea corpului* A_l – *aria laterala* A_t – *aria totala*

V = *volumul* A_b – *aria bazei mici* A_B – *aria bazei mari*

79) Ariile şi volumele prismelor (au două baze congruente)

a) Aria laterală – suma ariilor fețelor laterale

b) Aria totală – $A_t = A_l + 2 \cdot A_b$

c) Volumul – $V = A_b \cdot h$

Cubul	**Paralelipipedul dreptunghic**	**Prisma hexagonală regulată**
$A_l = 4 \cdot a^2$	$A_l = 2 \cdot (L \cdot h + l \cdot h)$	$A_l = 6 \cdot l_b \cdot h$
$A_t = 6 \cdot a^2$	$A_t = 2 \cdot (L \cdot h + l \cdot h + L \cdot l)$	$A_t = 6 \cdot l_b \cdot h + 2 \cdot \frac{3 \cdot (l_b)^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$
$V = a^3$	$V = L \cdot l \cdot h$	$V = \frac{3 \cdot (l_b)^2 \cdot \sqrt{3} \cdot h}{3}$

80) Ariile şi volumele piramidelor (au o bază poligon şi un vârf)

a) Aria laterală – suma ariilor fețelor laterale

b) Aria totală – $A_t = A_l + A_b$

c) Volumul – $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$

Piramida triungh. regulată	**Piramida patrulateră regulată**	**Piramida hexagon. regulată**
$A_l = 3 \cdot \frac{l_b \cdot a_p}{2}$	$A_l = 4 \cdot \frac{l_b \cdot a_p}{2} = 2 \cdot l_b \cdot a_p$	$A_l = 6 \cdot \frac{l_b \cdot a_p}{2}$
$A_l = 3 \cdot \frac{l_b \cdot a_p}{2} + \frac{l_b^2 \sqrt{3}}{4}$	$A_l = 2 \cdot l_b \cdot a_p + \frac{l_b^2 \sqrt{3}}{4}$	$A_t = 6 \cdot \frac{l_b \cdot a_p}{2} + \frac{3(l_b)^2 \sqrt{3}}{2}$
$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h$	$V = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot h$	$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot l^2 \sqrt{3}}{2} \cdot h$

Aria şi volumul tetraedrului regulat

$A_l = 3 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$; $A_t = l^2 \cdot \sqrt{3}$; $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h$

81) Ariile şi volumele trunchiurilor de piramidă (corpuri obținute prin secționarea piramidelor cu un plan paralel cu baza)

a) Aria laterală – suma ariilor fețelor laterale

b) Aria totală – $A_t = A_l + A_B + A_b$

c) Volumul – $V = \frac{h}{3} \cdot \left(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b} \right)$

Trunchi de piramidă triunghiulară regulată	Trunchi de piramidă patrulateră regulată
$A_l = 3 \cdot \frac{(l_b + l_B) \cdot a_p}{2}$	$A_l = 4 \cdot \frac{(l_b + l_B) \cdot a_p}{2}$
$A_t = 3 \cdot \frac{(l_b + l_B) \cdot a_p}{2} + \frac{l_b^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{l_B^2 \sqrt{3}}{4}$	$A_t = 4 \cdot \frac{(l_b + l_B) \cdot a_p}{2} + l_B^2 + l_b^2$
$V = \frac{h}{3} \cdot \left(\frac{l_B^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{l_b^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{l_B \cdot l_b \sqrt{3}}{4} \right)$	$V = \frac{h}{3} \cdot \left(l_B^2 + l_b^2 + l_B \cdot l_b \right)$

Obs.: se deduc ariile, volumul trnchiului de piramidă hexagonală regulată

82) Aria şi volumul cilindrului (corp rotund ce are 2 baze identice)

a) Aria laterală – aria feței obținute prin desfăşurare b) Aria totală – $A_t = A_l + 2 \cdot A_b$ c) Volumul – $V = A_b \cdot h$	$A_l = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot G$ $A_t = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot (R + G)$ $V = \pi \cdot R^2 \cdot h$

83) Aria şi volumul conului (corp rotund cu 1 bază cerc şi un vârf)

a) Aria laterală – aria feței obținute prin desfăşurare b) Aria totală – $A_t = A_l + A_b$ c) Volumul – $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$	$A_l = \pi \cdot R \cdot G$ $A_l = \pi \cdot R \cdot (R + G)$ $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$

84) Aria şi volumul trunchiului de con

a) Aria laterală – aria feței obținute prin desfăşurare b) Aria totală – $A_t = A_l + A_b$ c) Volumul – $V = \frac{h}{3} \cdot \left(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b} \right)$	$A_l = \pi \cdot G \cdot (R + r)$ $A_l = \pi \cdot G \cdot (R + r) + \pi \left(R^2 + r^2 \right)$ $V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot \left(R^2 + r^2 + R \cdot r \right)$

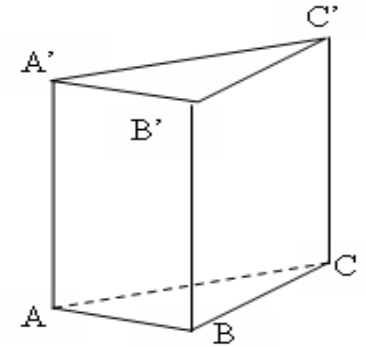
85) Aria şi volumul sferei

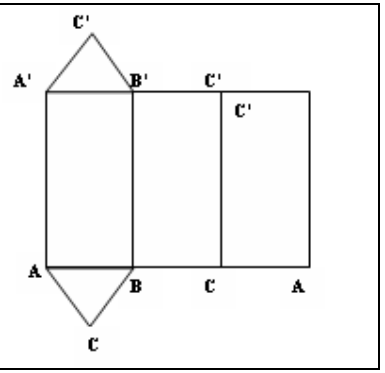
a) Aria $A = 4 \cdot \pi \cdot R^2$

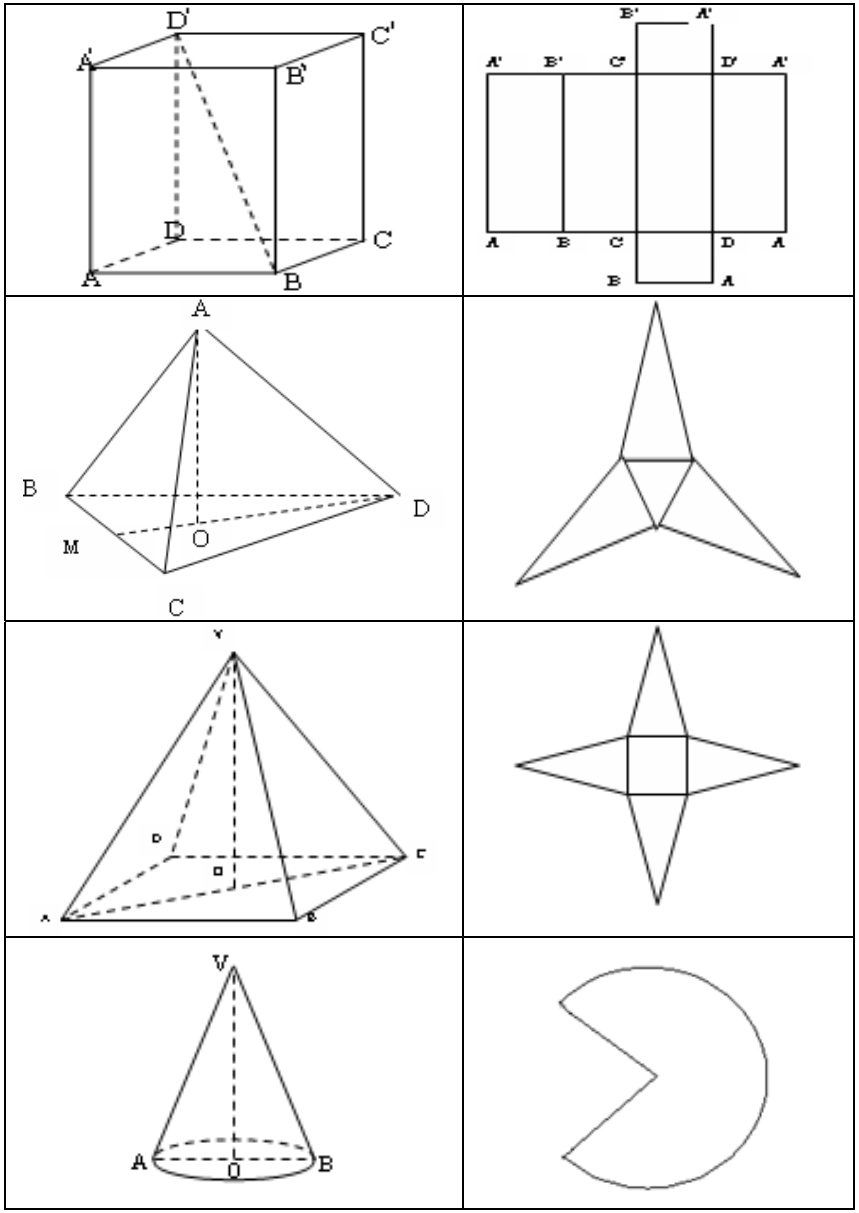
b) Volumul $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$

86)Desfăşurări : -desfăşurarea unui anumit corp înseamnă „tăierea" acelui corp şi întinderea componentelor acelui corp pe acelaşi plan.

O să prezint cele mai importante desfăşurări (cele care apar în probleme).







87) Secțiuni paralele cu baza :

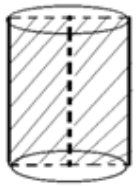
-la prisma, cilindru = congruente cu baza

-la piramida, con , trunchi = asemenea cu baza

Obs: $F_1 \sim F_2 \Rightarrow \frac{P_{F_1}}{P_{F_2}} = \frac{l_1}{l_2}, \frac{A_{F_1}}{A_{F_2}} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2, \frac{V_{F_1}}{V_{F_2}} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3$

88)Sectiuni axiale :

-sectiunile ce conţin înălţimea figurii şi sunt perpendiculare pe bază

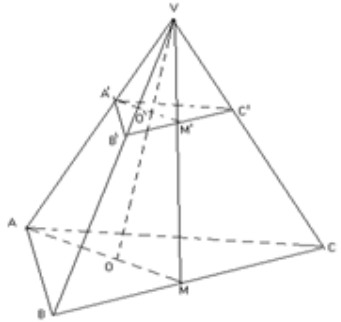




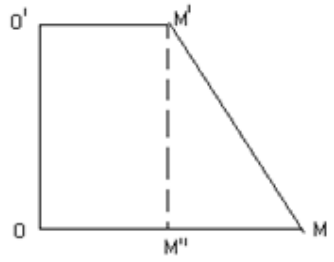
89) Determinarea elementelor intr-un trunchi de piramidă triunghiulară regulată şi într-o piramidă triunghiulară regulată

ştim $m_B, m_b, h_{trunchi}$

- se cere : a) $a_{trunchi}$
  b) $m_{l.trunchi}$
  c) $h_{piramida}$
  d) $m_{l.piramida}$
  e) $a_{piramidei}$



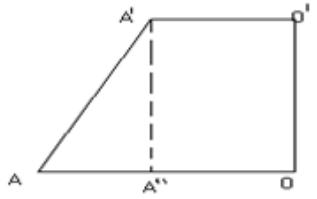
Găsim apotema trunchiului
Decupăm trapezul dreptunghic $OMM'O'$ şi obţinem:
E1) $M'M'' \| OO' \Rightarrow M'M''$ (1)
E2) OM apotemă, deci din triunghi echilateral =>
$OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{m_B\sqrt{3}}{6} \Rightarrow OM$



$O'M' = \frac{m_b\sqrt{3}}{6} \Rightarrow O'M' \quad M''M = OM - O'M' \Rightarrow M''M$ (2)

Din (1) si (2) Pitagora => $M'M = ...$

Găsim muchia laterală a trunchiului
E1) stim $A'A'' \| O'O \Rightarrow A'A''$
E2) $AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{m_B\sqrt{3}}{2} = \frac{m_B\sqrt{3}}{3} = AO$



$A'O' = \frac{m_b\sqrt{3}}{3} \Rightarrow A'O' \Rightarrow AA'' = AO - A''O \Rightarrow AA''$, iar cu Pitagora => $AA' = \ldots$

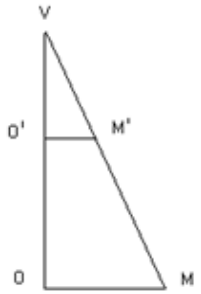
Găsim înălţimea, apotema şi muchia laterală a piramidei,

$OM = \frac{m_B\sqrt{3}}{6}, O'M' = \frac{m_b\sqrt{3}}{6}$

Δ VO'M' ~ Δ VOM $\Rightarrow$

$\frac{VO'}{VO} = \frac{O'M'}{OM} = \frac{VM'}{VM}$

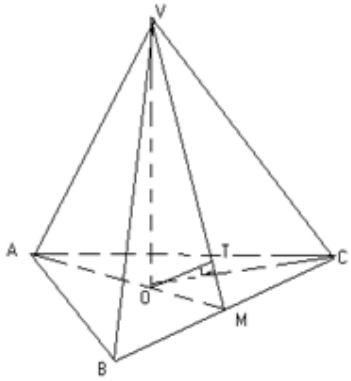
$\frac{VO'}{OO' + VO'} = \frac{O'M'}{OM} = \frac{VM'}{VM' + MM'}$



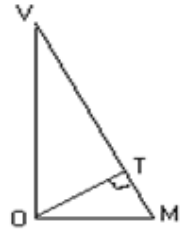
ştim OO'=> VO'=….. => VO=….., VM'=…. => VM=….

90) determinarea distanţei de la centrul bazei la o faţă laterală

Ştim muchiile bazei şi înălţimea piramidei
E1) se arată că distanţa de la centrul bazei la o faţă laterală este perpendiculara din centrul bazei pe apotema piramidei
E2) în ΔABC echilateral,
$AM = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ fiind înălţime, iar
$OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{6}$



E2) în ΔVOM dreptunghic, folosind teorema lui Pitagora determinăm apotema VM
E4)decupăm figura şi obţinem triunghiul dreptunghic ΔVOM, şi folosim formula înălţimii din unghiul drept, $OT = \frac{OV \cdot OM}{VM}$



Formule adăugate de voi pe care eu le-am uitat ☺