Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul b_1 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, în care $b_2 = 20$ și $b_3 = 100$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x+3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=g(a)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x\cdot 3^3 = 3^{x+2}$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, $\sqrt{n}$ să fie număr natural par.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(6,2)$ și $C(4,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care dreptele AC și OB sunt paralele.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu aria egală cu 32 și $BC = AB\sqrt{2}$. Arătați că $AC = 8$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $M(x)=\begin{pmatrix}2x&3x&-3\\-x&-2x&1\\0&0&x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(0))=0$.

5p **b)** Arătați că $M(x)\cdot M(y)-xyI_3=(x+y+1)M(0)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $M(1)\cdot M(x)-M(2)\cdot M\left(\frac{x}{2}\right)=2M(0)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5(x-1)(y-1)+1$.

5p **a)** Arătați că $1*3=1$.

5p **b)** Arătați că $e=\frac{6}{5}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $\frac{m}{25}$ este simetricul elementului n în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x-2+\ln x}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x}=3$.

5p **c)** Determinați cel mai mare număr întreg m pentru care ecuația $f(x)=m$ are cel puțin o soluție.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+4}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 f(x)e^x\,dx=10$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx = 5 - \frac{6}{e}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}\,dx$. Arătați că $I_{n+1} + 4I_n \leq \frac{e}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$q=\frac{b_3}{b_2}=5$, unde q este rația progresiei geometrice	**3p**
	$b_1=\frac{b_2}{q}=4$	**2p**
2.	$f(a)=4a+3$, $g(a)=a-3$, pentru orice număr real a	**3p**
	$4a+3=a-3$, de unde obținem $a=-2$	**2p**
3.	$3^{2x+3}=3^{x+2}$, de unde obținem $2x+3=x+2$	**3p**
	$x=-1$	**2p**
4.	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 3 numere n pentru care $\sqrt{n}$ este număr natural par, deci sunt 3 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{3}{90}=\frac{1}{30}$	**3p**
5.	$m_{OB}=\frac{1}{3}$	**2p**
	$m_{AC}=\frac{a-3}{3}$ și, cum $m_{OB}=m_{AC}$, obținem $a=4$	**3p**
6.	$\frac{AB}{BC}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, de unde obținem $B=\frac{\pi}{4}$, deci $AB=AC$	**3p**
	$\frac{AB\cdot AC}{2}=32$, de unde obținem $AC=8$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(0)=\begin{pmatrix}0&0&-3\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(M(0))=\begin{vmatrix}0&0&-3\\0&0&1\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-0-0-0=0$	**3p**
b)	$M(x)\cdot M(y)-xyI_3=\begin{pmatrix}xy&0&-3x-3y-3\\0&xy&x+y+1\\0&0&xy+x+y+1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}xy&0&0\\0&xy&0\\0&0&xy\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}0&0&-3(x+y+1)\\0&0&x+y+1\\0&0&x+y+1\end{pmatrix}=(x+y+1)M(0)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$M(1)\cdot M(x)-M(2)\cdot M\left(\frac{x}{2}\right)=xI_3+(x+2)M(0)-xI_3-\left(\frac{x}{2}+3\right)M(0)=\left(\frac{x}{2}-1\right)M(0)$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\left(\frac{x}{2}-1\right)M(0)=2M(0)$, de unde obținem $x=6$	**2p**

2.a)	$1*3=5(1-1)(3-1)+1=$ $=0+1=1$	**3p** **2p**
b)	$x*\frac{6}{5}=5(x-1)\left(\frac{6}{5}-1\right)+1=x-1+1=x$, pentru orice număr real x $\frac{6}{5}*x=5\left(\frac{6}{5}-1\right)(x-1)+1=x-1+1=x$, pentru orice număr real x, deci $e=\frac{6}{5}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p** **3p**
c)	$\frac{m}{25}*n=n*\frac{m}{25}=\frac{6}{5}$, de unde obținem $5\left(\frac{m}{25}-1\right)(n-1)+1=5(n-1)\left(\frac{m}{25}-1\right)+1=\frac{6}{5}$ $(m-25)(n-1)=1$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem perechile $(24,0)$ și $(26,2)$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)\cdot x-(2x-2+\ln x)}{x^2}=$ $=\frac{2x+1-2x+2-\ln x}{x^2}=\frac{3-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-2+\ln x}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x-2+\ln x)'}{(x\ln x)'}=$ $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2+\frac{1}{x}}{\ln x+1}=3$	**3p** **2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=e^3$; pentru orice $x\in\left(0,e^3\right]$, $f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $\left(0,e^3\right]$ și, pentru orice $x\in\left[e^3,+\infty\right)$, $f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $\left[e^3,+\infty\right)$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$, $f\left(e^3\right)=2+\frac{1}{e^3}\in(2,3)$ și f este continuă, deci cel mai mare număr întreg m pentru care ecuația $f(x)=m$ are cel puțin o soluție este 2	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^2 f(x)e^x dx=\int_0^2(x+4)dx=\left(\frac{x^2}{2}+4x\right)\Big\vert_0^2=$ $=2+8=10$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(x+4)\left(-e^{-x}\right)'dx=(x+4)\left(-e^{-x}\right)\Big\vert_0^1-e^{-x}\Big\vert_0^1=$ $=-\frac{5}{e}+4-\frac{1}{e}+1=5-\frac{6}{e}$	**3p** **2p**
c)	$I_n=\int_0^1\frac{x^n e^x}{x+4}dx$, de unde obținem $I_{n+1}+4I_n=\int_0^1\frac{\left(x^{n+1}+4x^n\right)e^x}{x+4}dx=\int_0^1 x^n e^x dx$, pentru orice număr natural nenul n Cum $e^x\leq e$, pentru orice $x\in[0,1]$, obținem $I_{n+1}+4I_n\leq e\int_0^1 x^n dx=e\cdot\frac{x^n}{n+1}\Big\vert_0^1=\frac{e}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n	**2p** **3p**