Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul b_1 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, în care $b_3=40$ și $b_4=80$.

5p **2.** Determinați mulțimea numerelor reale m pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+2\cdot 3^{x+1}=63$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, n^2 să fie număr natural de trei cifre.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(7,4)$ și C, astfel încât $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$. Determinați coordonatele punctului D pentru care $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{CB}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC, cu $AB=10$, înălțimea $AD=8$ și distanța de la punctul D la dreapta AC egală cu $4\sqrt{2}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 56.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & -a \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y-az=1 \\ 3x+y-2z=1 \\ x-3y+az=-3 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=-2$.

5p **b)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** Pentru $a=1$, determinați soluțiile (x_1,y_1,z_1) și (x_2,y_2,z_2) ale sistemului de ecuații pentru care $y_1=x_2$ și $z_1=y_2$.

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\sqrt{xy}+\dfrac{1}{\sqrt{xy}}+\dfrac{x+y}{2}-2$.

5p **a)** Arătați că $1*4=3$.

5p **b)** Determinați $x\in M$ pentru care $x*x=1$.

5p **c)** Demonstrați că mulțimea $[1,+\infty)$ este parte stabilă a mulțimii M în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x-2}{x+2}+\ln\dfrac{x+2}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{4(x-1)}{x(x+2)^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați numerele naturale n pentru care ecuația $f(x)=n$ **nu** are soluții.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{2x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(2x^2+1\right)f(x)\,dx=3$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_{0}^{2}\sqrt{f(x)}dx=1$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{f\left(\sqrt{e^x}\right)}dx$. Arătați că $(n+1)I_n-I_{n+1}=\dfrac{2(n+1)}{n+2}+\dfrac{1}{e}$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$q=\frac{b_4}{b_3}=2$, unde q este rația progresiei geometrice	**2p**
	$b_1=\frac{b_3}{q^2}$, deci $b_1=\frac{40}{4}=10$	**3p**
2.	$f(x)=0$ are două soluții reale distincte, deci $4-4m>0$	**3p**
	$m\in(-\infty,1)$	**2p**
3.	$3^x+6\cdot 3^x=63$, deci $3^x=9$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Cum $10^2\le n^2\le 31^2$, obținem 22 de cazuri favorabile, deci $p=\frac{22}{90}=\frac{11}{45}$	**3p**
5.	$\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AB}=6\vec{i}+2\vec{j}$	**3p**
	$\overrightarrow{OD}=3\vec{i}+\vec{j}$, deci punctul D are coordonatele $(3,1)$	**2p**
6.	$DC=8$, $BD=6$	**3p**
	$BC=14$ și $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{BC\cdot AD}{2}=\frac{14\cdot 8}{2}=56$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&0\\3&1&-2\\1&-3&0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&0\\3&1&-2\\1&-3&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0-2+0-0-0-0=-2$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}a&1&-a\\3&1&-2\\1&-3&a\end{vmatrix}=a^2+a-2$, pentru orice număr real a	**2p**
	$\det(A(a))=0\Leftrightarrow a=-2$ sau $a=1$, deci sistemul de ecuații are soluție unică dacă și numai dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$	**3p**
c)	Pentru $a=1$, soluțiile sistemului de ecuații sunt $(\alpha,\alpha+1,2\alpha)$, cu $\alpha\in\mathbb{C}$	**2p**
	$\alpha_1+1=\alpha_2$ și $2\alpha_1=\alpha_2+1$, de unde obținem $\alpha_1=2$ și $\alpha_2=3$, deci soluțiile sunt $(2,3,4)$ și $(3,4,6)$	**3p**

2.a)	$1*4=\sqrt{1\cdot 4}+\frac{1}{\sqrt{1\cdot 4}}+\frac{1+4}{2}-2=$	**3p**
	$=2+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}-2=3$	**2p**
b)	$x*x=\frac{2x^2-2x+1}{x}$, pentru orice $x\in M$	**2p**
	$\frac{2x^2-2x+1}{x}=1$, deci $2x^2-3x+1=0$, de unde obținem $x=\frac{1}{2}$ sau $x=1$, care convin	**3p**
c)	$x*y=\frac{\left(\sqrt{xy}-1\right)^2}{\sqrt{xy}}+\frac{x+y}{2}\geq\frac{x+y}{2}$, pentru orice $x,y\in M$	**3p**
	Pentru $x,y\in[1,+\infty)$, rezultă $\frac{x+y}{2}\geq 1$, deci $x*y\in[1,+\infty)$, de unde obținem că $[1,+\infty)$ este parte stabilă a mulțimii M în raport cu legea de compoziție „$*$”	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{2(x+2)-(2x-2)}{(x+2)^2}+\frac{x}{x+2}\cdot\frac{x-(x+2)}{x^2}=$	**3p**
	$=\frac{6}{(x+2)^2}-\frac{2}{x(x+2)}=\frac{4(x-1)}{x(x+2)^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-2}{x+2}+\ln\frac{x+2}{x}\right)=2+0=2$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=2$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$; pentru orice $x\in(0,1]$, $f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$ și, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, $f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$, $f(1)=\ln 3$, f este continuă și, cum $1<\ln 3<2$, obținem $n=0$ sau $n=1$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{2}\left(2x^2+1\right)f(x)dx=\int_{-1}^{2}x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big\vert_{-1}^{2}=$	**3p**
	$=\frac{8}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=3$	**2p**
b)	$\int_{0}^{2}\sqrt{f(x)}dx=\int_{0}^{2}\frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}\frac{\left(2x^2+1\right)'}{2\sqrt{2x^2+1}}dx=\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+1}\Big\vert_{0}^{2}=$	**3p**
	$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$	**2p**
c)	$I_n=\int_{0}^{1}x^n\left(2+e^{-x}\right)dx$, $(n+1)I_n-I_{n+1}=\int_{0}^{1}\left((n+1)x^n-x^{n+1}\right)\left(2+e^{-x}\right)dx=$	**2p**
	$=2x^{n+1}\Big\vert_{0}^{1}-\frac{2x^{n+2}}{n+2}\Big\vert_{0}^{1}+\int_{0}^{1}\left(x^{n+1}e^{-x}\right)'dx=2-\frac{2}{n+2}+x^{n+1}e^{-x}\Big\vert_{0}^{1}=\frac{2(n+1)}{n+2}+\frac{1}{e}$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**