Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 4 + i$ și $z_2 = 2 - 4i$. Arătați că $i \cdot z_1 + z_2 = 1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 5$. Determinați numerele reale a pentru care punctul $A(a,5)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_6(7x-5) = \log_6(x+1) + \dfrac{1}{\log_x 6}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu impar al lui 9.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$, $B(2,4)$ și $C(5,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că dreptele OB și AC sunt paralele.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, cu $AB = 6$, $BC = 10$ și $\cos B = \dfrac{4}{5}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 18.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ -x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A = 1$.

5p **b)** Arătați că $A - B(x) \cdot A = xI_3$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $C(x)$ astfel încât $A \cdot C(x) = B(x)$. Arătați că $C(x) - C(y) = (y-x)A$, pentru orice numere reale x și y.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2y + xy^2 + x + y$.

5p **a)** Arătați că $1 * 3 = 16$.

5p **b)** Determinați numerele reale nenule x pentru care $x * \dfrac{2}{x} = 9x$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi, cu $m \le n$, pentru care $m * n = 1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \dfrac{1 - 3\ln x}{x^4}$, $x \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați mulțimea numerelor reale m pentru care ecuația $f(x) = m$ are cel puțin o soluție.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^2-1$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^4\left(f(x)-e^x\right)dx=18$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^2\frac{e^x}{f(x)-x^2}dx=\ln(e+1)$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^1\frac{x}{f(x)+1}dx\le 1-\frac{2}{e}$.

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$i\cdot z_1+z_2=4i+i^2+2-4i=$	**3p**
	$=-1+2=1$	**2p**
2.	$f(a)=5$, de unde obținem $a^2-3a=0$	**3p**
	$a=0$ sau $a=3$	**2p**
3.	$\log_6(7x-5)=\log_6(x^2+x)$, deci $7x-5=x^2+x$, de unde obținem $x^2-6x+5=0$	**3p**
	$x=1$, care nu convine, sau $x=5$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre, numerele 27, 45, 63, 81 și 99 sunt multiplii impari de 9, deci sunt 5 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}$	**3p**
5.	$m_{OB}=2$	**2p**
	$m_{AC}=\frac{a}{3}$ și, cum $m_{OB}=m_{AC}$, obținem $a=6$	**3p**
6.	$\sin B=\frac{3}{5}$	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot BC\cdot\sin B}{2}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 10\cdot\frac{3}{5}=18$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{vmatrix}=0\cdot 0\cdot 0+(-1)\cdot(-1)\cdot 1+0\cdot 0\cdot 0-1\cdot 0\cdot 0-0\cdot(-1)\cdot 0-0\cdot(-1)\cdot 0=$	**3p**
	$=0+1+0-0-0-0=1$	**2p**
b)	$B(x)\cdot A=\begin{pmatrix}-x&0&1\\-1&-x&0\\0&-1&-x\end{pmatrix}$, $A-B(x)\cdot A=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&x\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=x\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=xI_3$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$, $C(x)=A^{-1}\cdot B(x)=\begin{pmatrix}0&-1&-x\\x&0&-1\\1&x&0\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$C(x)-C(y)=\begin{pmatrix}0&0&-x+y\\x-y&0&0\\0&x-y&0\end{pmatrix}=(y-x)A$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

2.a)	$1*3=1^2\cdot 3+1\cdot 3^2+1+3=$ $=3+9+4=16$	**3p** **2p**
b)	$x*\frac{2}{x}=\frac{3x^2+6}{x}$, pentru orice număr real nenul x $\frac{3x^2+6}{x}=9x$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=1$, care convin	**3p** **2p**
c)	$m*n=(m+n)(mn+1)$, pentru orice numere întregi m și n $(m+n)(mn+1)=1$ și, cum m și n sunt numere întregi, cu $m\le n$, obținem perechile $(0,1)$ și $(-2,1)$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^3-3x^2\ln x}{x^6}=$ $=\frac{x^2-3x^2\ln x}{x^6}=\frac{1-3\ln x}{x^4}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2}=0$ Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p** **2p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=\sqrt[3]{e}$; pentru orice $x\in\left(0,\sqrt[3]{e}\right]$, $f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $\left(0,\sqrt[3]{e}\right]$ și, pentru orice $x\in\left[\sqrt[3]{e},+\infty\right)$, $f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $\left[\sqrt[3]{e},+\infty\right)$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$, $f\left(\sqrt[3]{e}\right)=\frac{1}{3e}$ și f este continuă, deci mulțimea numerelor reale m pentru care ecuația $f(x)=m$ are cel puțin o soluție este $\left(-\infty,\frac{1}{3e}\right]$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_1^4\left(f(x)-e^x\right)dx=\int_1^4\left(x^2-1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big\vert_1^4=$ $=\frac{64}{3}-4-\left(\frac{1}{3}-1\right)=18$	**3p** **2p**
b)	$\int_1^2\frac{e^x}{f(x)-x^2}dx=\int_1^2\frac{e^x}{e^x-1}dx=\int_1^2\frac{\left(e^x-1\right)'}{e^x-1}dx=\ln\left(e^x-1\right)\Big\vert_1^2=$ $=\ln\left(e^2-1\right)-\ln(e-1)=\ln(e+1)$	**3p** **2p**
c)	$\int_0^1\frac{x}{f(x)+1}dx=\int_0^1\frac{x}{e^x+x^2}dx$ și, cum $e^x+x^2\ge e^x$, pentru orice $x\in[0,1]$, obținem relația $\int_0^1\frac{x}{f(x)+1}dx\le\int_0^1 xe^{-x}dx$ $\int_0^1 xe^{-x}dx=\int_0^1 x\left(-e^{-x}\right)'dx=-e^{-x}(x+1)\Big\vert_0^1=1-\frac{2}{e}$, deci $\int_0^1\frac{x}{f(x)+1}dx\le 1-\frac{2}{e}$	**3p** **2p**