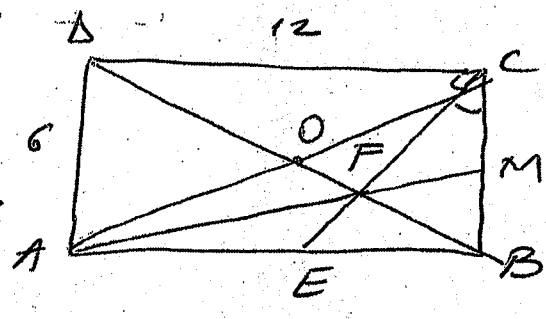
EN / 2025 / MODEL / III 4



$ABCD$ dreptunghi, $AB=12$, $BC=6$, CE bisect $(B\hat{C}D)$

a) arată perimetrul $ABCD=36$

b) lung. $AF=?$

---

a) $P_{ABCD} = 2(AB+BC) = 2(12+6) = 2\cdot 18 = 36$

b) CE bisect $B\hat{C}D \Rightarrow m(B\hat{C}E)=45^\circ$, $m(\hat{B})=90^\circ \xrightarrow{\Delta BCE}$

$m(C\hat{E}B)=45^\circ \Rightarrow \Delta BCE$ isoscel $\Rightarrow BC=BE=6$ cm

Dar, $AB=12$ cm $\Rightarrow E$ mijl AB

Fie AC diag $\Rightarrow AC \cap BD = \{O\}$ și în ΔABC, BO mediană,

CE mediană $\Rightarrow F$ centru greutate $\Rightarrow AM$ mediană

și $AF = \frac{2}{3} AM$

AM mediană $\Rightarrow MB = 3$ cm, $AB=12$ cm, $m(\hat{AFM})=90^\circ$

$\Rightarrow AM^2 = AB^2 + BM^2 \Rightarrow AM^2 = 12^2+3^2 = 144+9 = 153$

$AM = \sqrt{9\cdot 17} = 3\sqrt{17}$ cm

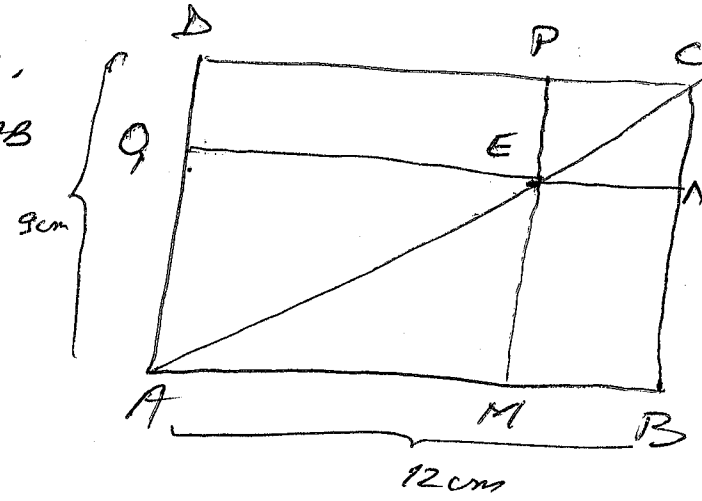
Dar, $AF = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{17}$ cm $= 2\sqrt{17}$ cm

[EN/2024/MODEL/II 4]

ABCD dreptunghi, $AB=12$ cm, $BC=9$ cm, $AE=10$ cm, $QN \parallel AB$ și $PM \parallel BC$

a) arată că $AC=15$ cm

b) arată că aria lui AMEQ este de 4 ori mai mare decât aria lui CNEP



---

a) $\triangle ABC$ dreptunghic, T. Pitagora $\Rightarrow AC^2=AB^2+BC^2 \Rightarrow$

$AC^2=12^2+9^2 \Rightarrow AC^2=144+81 \Rightarrow AC^2=225 \Rightarrow AC=15$ cm

b) $AE=10$ cm, $AC=15$ cm $\Rightarrow CE=AC-AE \Rightarrow CE=5$ cm

$\left.\begin{matrix} PM \parallel BC \\ AB \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp PM \Rightarrow m(P\hat{M}A)=90^\circ$

Dar, $DC \parallel AB$ și $PM \perp AB \Rightarrow PM \perp CD \Rightarrow m(C\hat{P}E)=90^\circ$

Cum $P\hat{E}C \equiv M\hat{E}A$ (opuse la vârf) $\Rightarrow \triangle PEC \sim \triangle MEA$ (UU)

$\Rightarrow \frac{PE}{ME}=\frac{EC}{EA}=\frac{CP}{AM}$ și cum $\frac{EC}{EA}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{PE}{ME}=\frac{CP}{AM}=\frac{1}{2}$

Folosim $\triangle UVT \sim \triangle PRS \Leftrightarrow \frac{A_{UVT}}{A_{PRS}}=\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2$

Cum $\triangle PEC \sim \triangle MEA \Rightarrow \frac{A_{PEC}}{A_{MEA}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow 4A_{PEC}=A_{MEA}$

Cum, $A_{AMEQ}=2A_{MEA}$ și $A_{CNEP}=2A_{PEC}$, deci

$4A_{PEC}=A_{MEA} \mid \cdot 2 \Rightarrow 4A_{CNEP}=A_{AMEQ}$

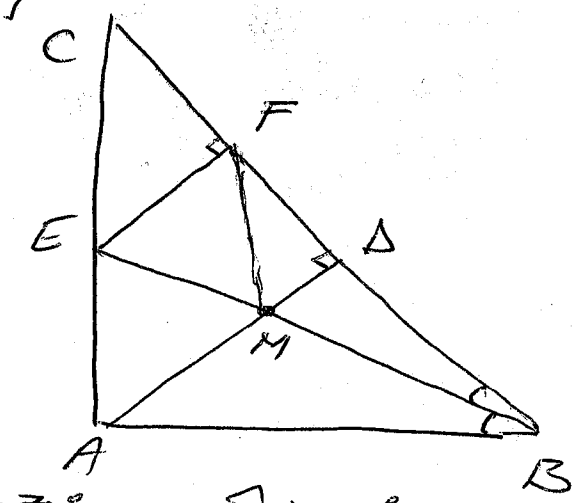
EN / 2024 / SIMULARE / III 4

$m(A)=90°$, $m(B)=40°$, (BE bisect.)

$AD \perp BC$, $EF \perp BC$, $BE \cap AD = \{M\}$

a) arată $m(E\hat{M}A)=70°$

b) arată $AMFE$ romb



a) $m(B)=40°$, BE bisect. $\Rightarrow$

$m(A\hat{B}E) = m(E\hat{B}D) = 20°$

Dar, $MD \perp AB \Rightarrow m(M\hat{D}B)=90°$ }

$\Rightarrow$ suma unghi. $\Delta MBD \Rightarrow m(B\hat{M}D)=70° \Rightarrow m(E\hat{M}A)=70°$

b) $AD \perp BC$, $EF \perp BC$ $\Rightarrow AD \parallel EF \Rightarrow AM \parallel EF$ (2)

Fie ΔEAB, ΔEFB | EB latură comună; $m(\hat{A})=m(\hat{F})=90°$; $E\hat{B}A \equiv E\hat{B}F$ } $\Rightarrow \Delta EAB \equiv \Delta EFB$

$\Rightarrow \boxed{AE \equiv FE}$ (1)

Cum în ΔABE, $m(A)=90°$, $m(A\hat{B}E)=20° \Rightarrow m(A\hat{E}B)=70°$ }

Dar, din a), $m(E\hat{M}A)=70°$

$\Rightarrow \Delta AME$ isoscel $\Rightarrow \boxed{AM \equiv AE} \overset{(1)}{\Rightarrow} AM \equiv EF$ } Cum $AM \parallel EF$ } $\Rightarrow$

$\Rightarrow AMFE$ paralelogram } $\Rightarrow AMFE$ romb

Dar, $AM \equiv AE$

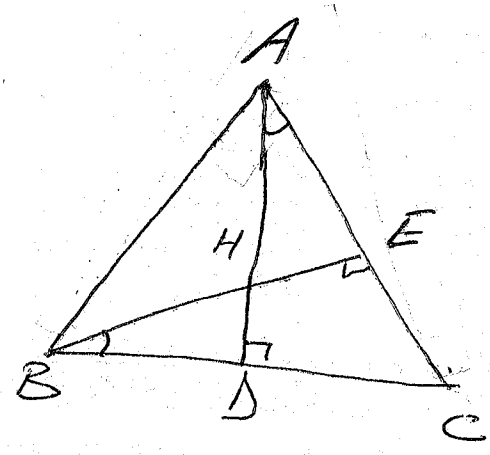
EN/2024/EXAMEN/III 4

ΔABC isoscel, $AB \equiv AC$ și $AD \equiv BC$

$AE \perp AC$

a) arată $m(\sphericalangle DAC) = m(\sphericalangle EBC)$

b) arată că $AH = 3 \cdot HD$



a) în ΔADC, $m(\hat{D}) = 90°$ ⇒

$m(\sphericalangle DAC) + m(\sphericalangle ACD) = 90°$ (1)

în ΔBEC, $m(\hat{E}) = 90°$ ⇒

$m(\sphericalangle EBC) + m(\sphericalangle ECD) = 90°$ (2)

Dar (1) + (2) ⇒ $m(\sphericalangle DAC) = m(\sphericalangle EBC)$

b) $\Delta BDH \sim \Delta AEH$ ($\hat{D} = \hat{E} = 90°$ și $B\hat{H}D \equiv A\hat{H}E$ (or vârf))

⇒ $\frac{BD}{AE} = \frac{DH}{EH} = \frac{HB}{HA}$ (1)

Cum $AB \equiv AC$ și AD înălțime ⇒ AD mediană

⇒ $BD = DC = x$ ⇒ $BC = 2x$ și cum $AD \equiv BC$ ⇒ $AD = 2x$

(1) ⇒ $\frac{x}{AE} = \frac{DH}{EH} = \frac{HB}{HA}$ ⇒ CORECT dar INUTIL

Caut altă asemănare de Δ:

$\Delta BDH \sim \Delta ADC$ ($\hat{D} = \hat{E} = 90°$ și $D\hat{B}H \equiv D\hat{A}C$) ⇒

⇒ $\frac{BD}{AD} = \frac{DH}{DC} = \frac{HB}{CA}$ ⇒ $\frac{x}{2x} = \frac{DH}{x} = \frac{HB}{CA}$

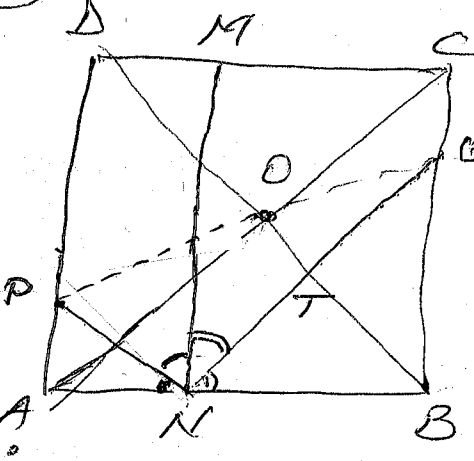
⇒ $\frac{1}{2} = \frac{DH}{x}$ ⇒ $x = 2DH$, o cure relație între AH, HD

Dar, $AD = 2x$ ⇒ $x = \frac{AD}{2}$ și cum $x = 2DH$

⇒ $\frac{AD}{2} = 2DH$ ⇒ $AD = 4DH$

⇒ $AH + HD = 4DH$ ⇒ $AH = 3DH$ ⇒ $\boxed{AH = 3HD}$

(EN | 2024 | REZERVĂ | III 4)



$ABCD$ pătrat, M, N oarecare cu $MN \parallel DA$, NP și NQ bisectoare

a) Să se arate $m(P\hat{N}Q) = 90^\circ$

b) Arată că P, O și Q coliniare unde $\{O\} = AC \cap BD$

---

a) $m(A\hat{N}M) = 90^\circ$, NP bisect $\Rightarrow m(P\hat{N}M) = 45^\circ$

$m(M\hat{N}B) = 90^\circ$, NQ bisect $\Rightarrow m(M\hat{N}Q) = 45^\circ$

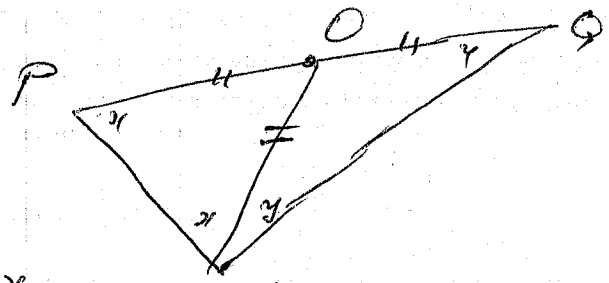
$m(P\hat{N}Q) = m(P\hat{N}M) + m(M\hat{N}Q) = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

b) $m(Q\hat{N}B) = 45^\circ$, $m(\hat{B}) = 90^\circ \Rightarrow m(N\hat{Q}B) = 45^\circ \Rightarrow \triangle NQB$ isoscel

$\Rightarrow NB \equiv QB$ și cum $m(N\hat{B}T) = m(Q\hat{B}T) = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle ONB \equiv \triangle OQB$ (LUL) $\Rightarrow ON \equiv OQ$

Analog, $\triangle OPA \equiv \triangle ONA$ (LUL) $\Rightarrow OP \equiv ON$



Fie $m(O\hat{P}N) = x$,

$m(O\hat{Q}N) = y \Rightarrow m(P\hat{O}N) = 180^\circ - 2x$

și $m(P\hat{N}Q) = 90^\circ$ $\quad m(Q\hat{O}N) = 180^\circ - 2y$

$m(P\hat{O}N) + m(Q\hat{O}N) = 360^\circ - 2(\underbrace{x+y}_{90^\circ})$

$= 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow P, O, Q$ coliniare

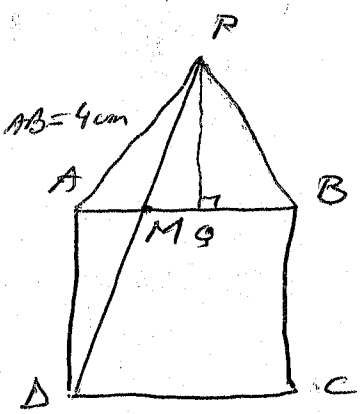
mod II (cea din BAREM): $AP \equiv AN$, $BN \equiv BQ$ și notăm cu l latura pătrat $\Rightarrow AN + NB = l \Rightarrow AP + BQ = l$

Dar, $AP + PB = l$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow BQ \equiv DP$ și cum $BQ \parallel DP \Rightarrow DPBQ$ paralelogram

Dar, O mijl diag $\Rightarrow O \in PQ \Rightarrow P, O, Q$ coliniare

EN/2023/MODEL/III 4



$ABCD$ pătrat, ABP triunghi echilateral, $AB=4$ cm

a) arată că $m(\sphericalangle PB)=45^\circ$

b) arată că $AM=4(2-\sqrt{3})$ cm

---

a) $ABCD$ pătrat $\Rightarrow AB=\ell$

ABP triunghi echilateral $\Rightarrow AP=\ell$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AAP$ isoscel cu $AP=A \Rightarrow m(A\hat{A}P)=m(A\hat{P}A) \overset{not}{=} x$

$m(B\hat{A}A)=90^\circ$, $m(P\hat{A}B)=60^\circ \Rightarrow m(P\hat{A}A)=15^\circ$

Suma $\sphericalangle$ în $\triangle PAA \Rightarrow x+150^\circ+x=180^\circ \Rightarrow 2x=30^\circ$

$\Rightarrow x=15^\circ$

$m(A\hat{P}B)=60^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle PB)=60^\circ-15^\circ=45^\circ$

---

b) ne gândim la $\triangle$ asemenea, fie $PQ\perp AB$ și cum $A\perp AB$

$\Rightarrow \triangle PQM \sim \triangle AM$ (UU) $\Rightarrow \frac{PQ}{A}=\frac{QM}{AM}=\frac{MP}{M}$, alegem

$\frac{PQ}{A}=\frac{QM}{AM}$ deoarece PQ înălțime $\triangle$ echilateral $\Rightarrow$

$\Rightarrow PQ=\frac{\ell\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ cm, $A=4$ cm

not $AM=x \Rightarrow QM=AQ-x$

$\triangle PAB$ echilateral, $PQ\perp AB \Rightarrow Q$ mijl $AB \Rightarrow AQ=\frac{\ell}{2}=2$ cm

$\Rightarrow QM=2-x$

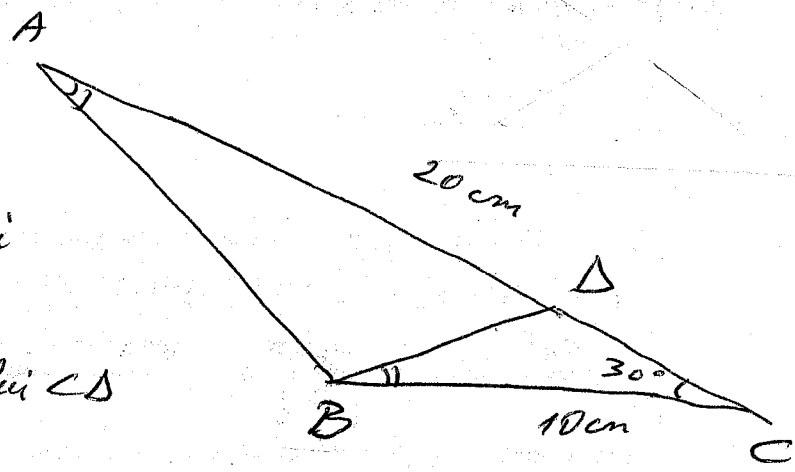
înlocuim în $\frac{PQ}{A}=\frac{QM}{AM} \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{2-x}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-x}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{3}x=4-2x \Rightarrow x(2+\sqrt{3})=4 \Rightarrow x=\frac{4}{2+\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{4(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\frac{4(2-\sqrt{3})}{4-3}=4(2-\sqrt{3})$ cm

[EN/2025/SIMULARE/IV 4]

ΔABC, $m(A\hat{C}B) = 30°$,
$m(D\hat{A}B) = m(D\hat{B}C)$
$BC = 10$ cm, $AC = 20$ cm



a) arată că aria lui $ABC = 50\ cm^2$

b) calculează lung. lui CD

---

a) $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin C}{2} = \frac{20 \cdot 10 \cdot \sin 30°}{2} =$

$= \frac{200 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{100}{2} = 50\ cm^2$

b) neavând Δ dreptunghice, ne gândim la asemănare, $\Delta CBD \sim \Delta CAB$ deoarece

$C\hat{B}D \equiv C\hat{A}B$ (i) și $D\hat{C}B = B\hat{C}A$ (același unghi)

$\Rightarrow \frac{CB}{CA} = \frac{BD}{AB} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow \frac{10}{20} = \frac{BD}{AB} = \frac{DC}{10}$

$\Rightarrow \frac{10}{20} = \frac{DC}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{DC}{10} \Rightarrow 2DC = 10$

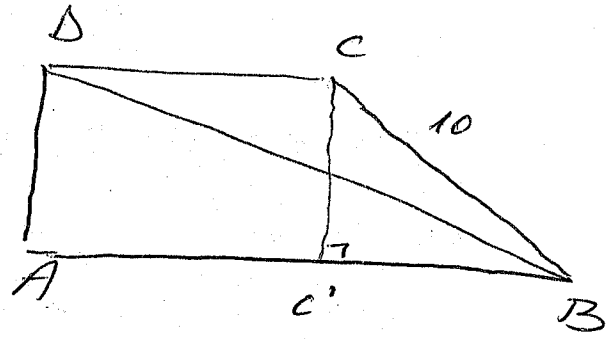
$\Rightarrow DC = 5$ cm

(EN/2023/EXAMEN/III 4)

$ABC\Delta$ trapez dreptunghic cu $m(A\hat{B}\Delta)=15^\circ$ și $B\Delta$ bisectoarea $\sphericalangle ABC$ cu $BC=10$ cm

a) $m(B\hat{C}\Delta)=?$

b) arată că $AB-A\Delta<14$ cm



a) $B\Delta$ bisect $\sphericalangle ABC$, $m(A\hat{B}\Delta)=15^\circ$ $\Rightarrow m(C\hat{B}\Delta)=15^\circ$

Dar, $AB\parallel\Delta C$, $B\Delta$ secantă $\Rightarrow A\hat{B}\Delta=C\hat{\Delta}B$ $\Rightarrow m(B\hat{\Delta}C)=15^\circ$

În $\Delta BC\Delta$, $m(B\hat{\Delta}C)=15^\circ$, $m(\Delta\hat{B}C)=15^\circ$, suma $\sphericalangle\Delta BC\Delta$

$\Rightarrow m(B\hat{C}\Delta)+15^\circ+15^\circ=180^\circ \Rightarrow m(B\hat{C}\Delta)=150^\circ$

b) Fie $CC'\perp\Delta A$ și cum $m(C\hat{B}C')=30^\circ \Rightarrow CC'=\frac{BC}{2}=5$ cm

$\Rightarrow A\Delta=5$ cm

$AB=AC'+C'B$ și cum $\Delta BC\Delta$ isoscel $\Rightarrow \Delta C=10$ cm $\Rightarrow$

$\Rightarrow AC'=10$ cm

În $\Delta BCC'$, $m(B\hat{C}'C)=90^\circ \Rightarrow BC^2=BC'^2+CC'^2$

$\Rightarrow 100=BC'^2+25 \Rightarrow BC'^2=75 \Rightarrow BC'=5\sqrt{3}$

$\Rightarrow AB=AC'+C'B=10+5\sqrt{3}$

Trebuie să arăt că $AB-A\Delta<14$

$\Leftrightarrow (10+5\sqrt{3})-5<14 \Leftrightarrow 5+5\sqrt{3}<14$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{3}<9 \Leftrightarrow \sqrt{5^2\cdot 3}<\sqrt{81} \Leftrightarrow \sqrt{75}<\sqrt{81}$ adev.

$\Rightarrow AB-A\Delta<14$ cm