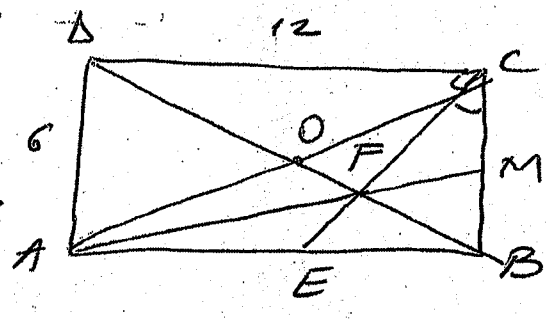
EN / 2025 / MODEL / III 4



$ABCD$ dreptunghi, $AB=12$, $BC=6$, CE bisect $(B\hat{C}D)$

a) arată perimetrul $ABCD=36$

b) lung. $AF=?$

---

a) $P_{ABCD} = 2(AB+BC) = 2(12+6) = 2\cdot 18 = 36$

b) CE bisect $B\hat{C}D \Rightarrow m(B\hat{C}E)=45^\circ$, $m(\hat{B})=90^\circ \xrightarrow{\Delta BCE}$

$m(C\hat{E}B)=45^\circ \Rightarrow \Delta BCE$ isoscel $\Rightarrow BC=BE=6$ cm

Dar, $AB=12$ cm $\Rightarrow E$ mijl AB

Fie AC diag $\Rightarrow AC \cap BD = \{O\}$ și în ΔABC, BO mediană,

CE mediană $\Rightarrow F$ centru greutate $\Rightarrow AM$ mediană

și $AF = \frac{2}{3} AM$

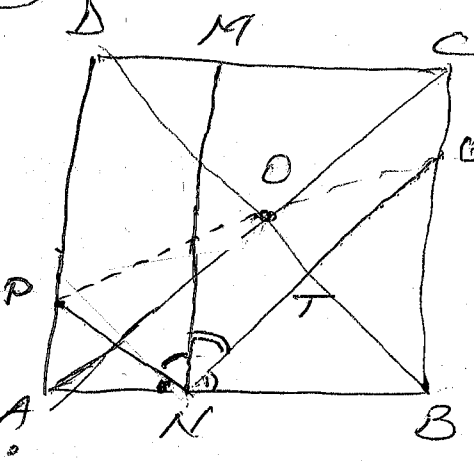
AM mediană $\Rightarrow MB = 3$ cm, $AB=12$ cm, $m(\hat{AFM})=90^\circ$

$\Rightarrow AM^2 = AB^2 + BM^2 \Rightarrow AM^2 = 12^2+3^2 = 144+9 = 153$

$AM = \sqrt{9\cdot 17} = 3\sqrt{17}$ cm

Dar, $AF = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{17}$ cm $= 2\sqrt{17}$ cm

(EN | 2024 | REZERVĂ | III 4)



$ABCD$ pătrat, M, N oarecare cu $MN \parallel DA$, NP și NQ bisectoare

a) Să se arate $m(P\hat{N}Q) = 90^\circ$

b) Arată că P, O și Q coliniare unde $\{O\} = AC \cap BD$

---

a) $m(A\hat{N}M) = 90^\circ$, NP bisect $\Rightarrow m(P\hat{N}M) = 45^\circ$

$m(M\hat{N}B) = 90^\circ$, NQ bisect $\Rightarrow m(M\hat{N}Q) = 45^\circ$

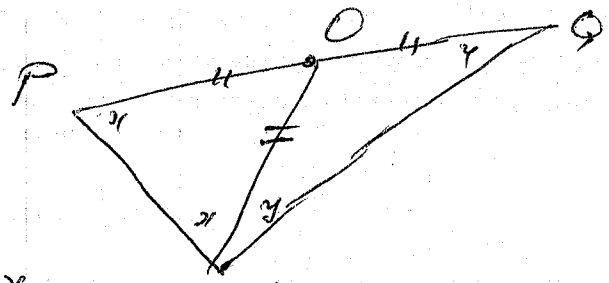
$m(P\hat{N}Q) = m(P\hat{N}M) + m(M\hat{N}Q) = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

b) $m(Q\hat{N}B) = 45^\circ$, $m(\hat{B}) = 90^\circ \Rightarrow m(N\hat{Q}B) = 45^\circ \Rightarrow \triangle NQB$ isoscel

$\Rightarrow NB \equiv QB$ și cum $m(N\hat{B}T) = m(Q\hat{B}T) = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle ONB \equiv \triangle OQB$ (LUL) $\Rightarrow ON \equiv OQ$

Analog, $\triangle OPA \equiv \triangle ONA$ (LUL) $\Rightarrow OP \equiv ON$



Fie $m(O\hat{P}N) = x$,

$m(O\hat{Q}N) = y \Rightarrow m(P\hat{O}N) = 180^\circ - 2x$

și $m(P\hat{N}Q) = 90^\circ$ $\quad m(Q\hat{O}N) = 180^\circ - 2y$

$m(P\hat{O}N) + m(Q\hat{O}N) = 360^\circ - 2(\underbrace{x+y}_{90^\circ})$

$= 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow P, O, Q$ coliniare

mod II (cea din BAREM): $AP \equiv AN$, $BN \equiv BQ$ și notăm cu l latura pătrat $\Rightarrow AN + NB = l \Rightarrow AP + BQ = l$

Dar, $AP + PB = l$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow BQ \equiv DP$ și cum $BQ \parallel DP \Rightarrow DPBQ$ paralelogram

Dar, O mijl diag $\Rightarrow O \in PQ \Rightarrow P, O, Q$ coliniare

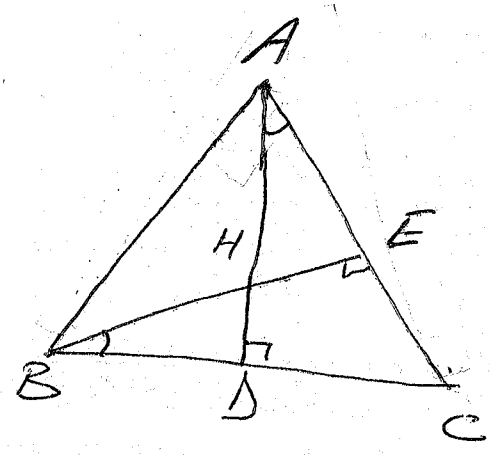
EN/2024/EXAMEN/III 4

ΔABC isoscel, $AB \equiv AC$ și $AD \equiv BC$

$AE \perp AC$

a) arată $m(\sphericalangle DAC) = m(\sphericalangle EBC)$

b) arată că $AH = 3 \cdot HD$



a) în ΔADC, $m(\hat{D}) = 90°$ ⇒

$m(\sphericalangle DAC) + m(\sphericalangle ACD) = 90°$ (1)

în ΔBEC, $m(\hat{E}) = 90°$ ⇒

$m(\sphericalangle EBC) + m(\sphericalangle ECD) = 90°$ (2)

Dar (1) + (2) ⇒ $m(\sphericalangle DAC) = m(\sphericalangle EBC)$

b) $\Delta BDH \sim \Delta AEH$ ($\hat{D} = \hat{E} = 90°$ și $B\hat{H}D \equiv A\hat{H}E$ (or vârf))

⇒ $\frac{BD}{AE} = \frac{DH}{EH} = \frac{HB}{HA}$ (1)

Cum $AB \equiv AC$ și AD înălțime ⇒ AD mediană

⇒ $BD = DC = x$ ⇒ $BC = 2x$ și cum $AD \equiv BC$ ⇒ $AD = 2x$

(1) ⇒ $\frac{x}{AE} = \frac{DH}{EH} = \frac{HB}{HA}$ ⇒ CORECT dar INUTIL

Caut altă asemănare de Δ:

$\Delta BDH \sim \Delta ADC$ ($\hat{D} = \hat{E} = 90°$ și $D\hat{B}H \equiv D\hat{A}C$) ⇒

⇒ $\frac{BD}{AD} = \frac{DH}{DC} = \frac{HB}{CA}$ ⇒ $\frac{x}{2x} = \frac{DH}{x} = \frac{HB}{CA}$

⇒ $\frac{1}{2} = \frac{DH}{x}$ ⇒ $x = 2DH$, o cure relație între AH, HD

Dar, $AD = 2x$ ⇒ $x = \frac{AD}{2}$ și cum $x = 2DH$

⇒ $\frac{AD}{2} = 2DH$ ⇒ $AD = 4DH$

⇒ $AH + HD = 4DH$ ⇒ $AH = 3DH$ ⇒ $\boxed{AH = 3HD}$

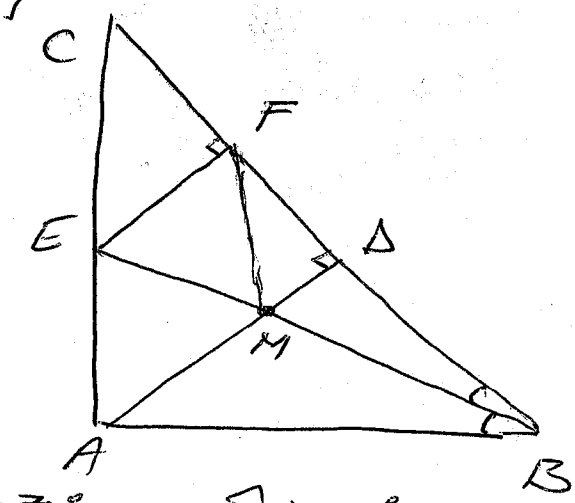
EN / 2024 / SIMULARE / III 4

$m(A)=90°$, $m(B)=40°$, (BE bisect.)

$AD \perp BC$, $EF \perp BC$, $BE \cap AD = \{M\}$

a) arată $m(E\hat{M}A)=70°$

b) arată $AMFE$ romb



a) $m(B)=40°$, BE bisect. $\Rightarrow$

$m(A\hat{B}E) = m(E\hat{B}D) = 20°$

Dar, $MD \perp AB \Rightarrow m(M\hat{D}B)=90°$ }

$\Rightarrow$ suma unghi. $\Delta MBD \Rightarrow m(B\hat{M}D)=70° \Rightarrow m(E\hat{M}A)=70°$

b) $AD \perp BC$, $EF \perp BC$ $\Rightarrow AD \parallel EF \Rightarrow AM \parallel EF$ (2)

Fie ΔEAB, ΔEFB | EB latură comună; $m(\hat{A})=m(\hat{F})=90°$; $E\hat{B}A \equiv E\hat{B}F$ } $\Rightarrow \Delta EAB \equiv \Delta EFB$

$\Rightarrow \boxed{AE \equiv FE}$ (1)

Cum în ΔABE, $m(A)=90°$, $m(A\hat{B}E)=20° \Rightarrow m(A\hat{E}B)=70°$ }

Dar, din a), $m(E\hat{M}A)=70°$

$\Rightarrow \Delta AME$ isoscel $\Rightarrow \boxed{AM \equiv AE} \overset{(1)}{\Rightarrow} AM \equiv EF$ } Cum $AM \parallel EF$ } $\Rightarrow$

$\Rightarrow AMFE$ paralelogram } $\Rightarrow AMFE$ romb

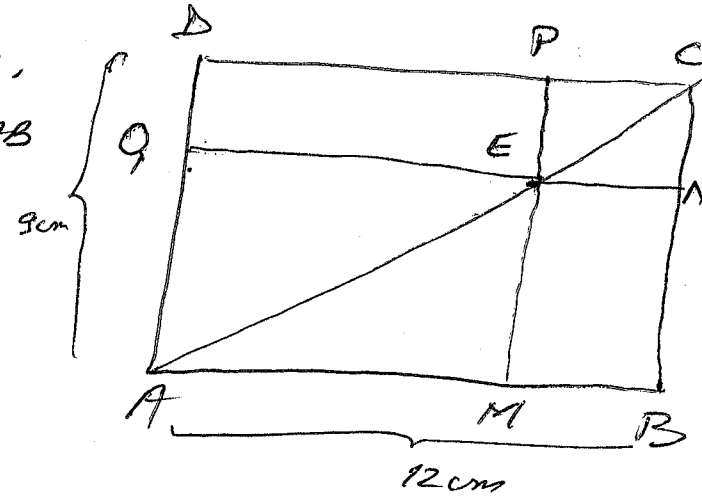
Dar, $AM \equiv AE$

[EN/2024/MODEL/II 4]

ABCD dreptunghi, $AB=12$ cm, $BC=9$ cm, $AE=10$ cm, $QN \parallel AB$ și $PM \parallel BC$

a) arată că $AC=15$ cm

b) arată că aria lui AMEQ este de 4 ori mai mare decât aria lui CNEP



---

a) $\triangle ABC$ dreptunghic, T. Pitagora $\Rightarrow AC^2=AB^2+BC^2 \Rightarrow$

$AC^2=12^2+9^2 \Rightarrow AC^2=144+81 \Rightarrow AC^2=225 \Rightarrow AC=15$ cm

b) $AE=10$ cm, $AC=15$ cm $\Rightarrow CE=AC-AE \Rightarrow CE=5$ cm

$\left.\begin{matrix} PM \parallel BC \\ AB \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp PM \Rightarrow m(P\hat{M}A)=90^\circ$

Dar, $DC \parallel AB$ și $PM \perp AB \Rightarrow PM \perp CD \Rightarrow m(C\hat{P}E)=90^\circ$

Cum $P\hat{E}C \equiv M\hat{E}A$ (opuse la vârf) $\Rightarrow \triangle PEC \sim \triangle MEA$ (UU)

$\Rightarrow \frac{PE}{ME}=\frac{EC}{EA}=\frac{CP}{AM}$ și cum $\frac{EC}{EA}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{PE}{ME}=\frac{CP}{AM}=\frac{1}{2}$

Folosim $\triangle UVT \sim \triangle PRS \Leftrightarrow \frac{A_{UVT}}{A_{PRS}}=\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2$

Cum $\triangle PEC \sim \triangle MEA \Rightarrow \frac{A_{PEC}}{A_{MEA}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow 4A_{PEC}=A_{MEA}$

Cum, $A_{AMEQ}=2A_{MEA}$ și $A_{CNEP}=2A_{PEC}$, deci

$4A_{PEC}=A_{MEA} \mid \cdot 2 \Rightarrow 4A_{CNEP}=A_{AMEQ}$