EN / 2025 / MODEL / Nr. 2

$$E(x)=\left(\frac{x+4}{x-3}-\frac{x-3}{x+4}+\frac{49}{x^2+x-12}\right):\frac{7}{x-3},\ x\neq -4,\ x\neq 3$$

a) arătăm că $x^2+x-12=(x-3)(x+4)$

met. I: $T_d=(x-3)(x+4)=x^2+4x-3x-12=x^2+x-12=T_s$

$\Rightarrow$ egalitate

met. II: $T_s=x^2+x-12=x^2+4x-3x-12=$

$=x(x+4)-3(x+4)=(x+4)(x-3)=(x-3)(x+4)$

$\Rightarrow$ egalitate

b) arătăm $N=\sqrt{E(2)+E(4)+\dots+E(16)}$ este natural

$$E(x)=\left(\frac{x+4}{x-3}-\frac{x-3}{x+4}+\frac{49}{(x-3)(x+4)}\right)\cdot\frac{x-3}{7}$$

$$E(x)=\frac{(x+4)^2-(x-3)^2+49}{(x-3)(x+4)}\cdot\frac{x-3}{7}$$

$$E(x)=\frac{(x^2+8x+16)-(x^2-6x+9)+49}{x+4}\cdot\frac{1}{7}$$

$$E(x)=\frac{x^2+8x+16-x^2+6x-9+49}{7(x+4)}=\frac{14x+56}{7(x+4)}=$$

$$=\frac{14(x+4)}{7(x+4)}=2,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-4,3\}\Rightarrow E(2)=2,\ E(4)=2,\ \dots\ E(16)=2$$

Obs. $E(2)+E(4)+\dots+E(16)=\underbrace{2+2+\dots+2}_{8\text{ ori}}=16$

$\Rightarrow N=\sqrt{16}\in\mathbb{N}$

EN / 2024 / REZERVĂ / III 2

$$E(x)=\left(\frac{2}{x-2}+\frac{x}{x+2}\right):\frac{x^2+4}{x^2+4x+4},\ x\neq -2,\ x\neq 2$$

a) arată că $\frac{2}{x-2}+\frac{x}{x+2}=\frac{x^2+4}{(x-2)(x+2)}$

b) $n=?$, $n\in\mathbb{N}$, $n\neq 2$ a.î. $N=E(n)-1$ este natural

a) $\frac{2}{x-2}+\frac{x}{x+2}=\frac{2(x+2)+x(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{2x+4+x^2-2x}{(x-2)(x+2)}=$

$$=\frac{x^2+4}{(x-2)(x+2)}$$

b) $E(x)\overset{a)}{=}\frac{x^2+4}{(x-2)(x+2)}:\frac{x^2+4}{(x+2)^2}=$

$$=\frac{x^2+4}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{(x+2)^2}{x^2+4}=\frac{x+2}{x-2}$$

$$N=E(n)-1=\frac{n+2}{n-2}-\frac{n-2}{1}=\frac{(n+2)-(n-2)}{n-2}=\frac{4}{n-2}$$

$N\in\mathbb{N}\Rightarrow n-2\in\{1;2;4\}$ și $n\in\mathbb{N}$, $n\neq 2$

$n-2=1\Rightarrow n=3$

$n-2=2\Rightarrow n=4$ $\Rightarrow n\in\{3;4;6\}$

$n-2=4\Rightarrow n=6$

EN / 2024 / EXAMEN / III 2

$$E(x)=\left(\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x-1}\right)\cdot(x^2-4)$$

a) arată $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

b) găsește $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 1$, $n\neq 2$ astfel încât $N=\frac{5}{E(n)}\in\mathbb{N}$

---

a) $(x-1)(x-2)=x^2-2x-x+2=x^2-3x+2$

$\Rightarrow x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

b) $E(x)=\left(\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{x-2}{x-1}\right)\cdot(x^2-4)$

$$E(x)=\frac{1+x-2}{(x-1)(x-2)}\cdot(x-2)(x+2)$$

$$E(x)=\frac{x-1}{(x-1)}\cdot(x+2)=x+2$$

$$N=\frac{5}{E(n)}=\frac{5}{n+2},\ n\in\mathbb{Z}\Rightarrow n+2\in D_5\Rightarrow n+2\in\{\pm1;\pm5\}$$

cu $n\neq1$, $n\neq2$ și $N\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow n+2\in\{1;5\}$

$n+2=1\Rightarrow n=1-2=-1\in\mathbb{Z}$

$n+2=5\Rightarrow n=5-2=3\in\mathbb{Z}$

$S_f:\ n\in\{-1;3\}$

EN/2024/SIMULARE/VI

Maria aranjează cărțile în bibliotecă și observă că dacă le grupează câte 8, câte 12 sau câte 18 îi rămân de fiecare dată 5 cărți.

a) verifică dacă Maria poate avea 53 de cărți

b) determină câte cărți are Maria, dacă ea are cel mai mic număr natural cu trei cifre de mai sus

a) Dacă ar avea 53 de cărți, grupate câte 8 i-ar rămâne 5 cărți, le-ar câte 12 respectiv câte 17

$53 : 8 = 6$ rest 5, e posibil

$53 : 12 = 4$ rest 5, e posibil

$53 : 17 = 3$ rest 2 și cum restul e $2 \neq 5 \Rightarrow$ nu e posibil să aibă 53 de cărți

b) $n : 8 = c_1$ rest $5 \Rightarrow n = 8c_1 + 5$

$n : 12 = c_2$ rest $5 \Rightarrow n = 12c_2 + 5$

$n : 18 = c_3$ rest $5 \Rightarrow n = 18c_3 + 5$

Deci $n = 8c_1 + 5 \mid -5 \Rightarrow n - 5 = 8c_1$

$n = 12c_2 + 5 \mid -5 \Rightarrow n - 5 = 12c_1$

$n = 18c_3 + 5 \mid -5 \Rightarrow n - 5 = 18c_3$

$\Rightarrow (n-5) \vdots 8$, $(n-5) \vdots 12$, $(n-5) \vdots 18$

$\Rightarrow (n-5) \vdots$ c.m.m.m.c. pt (8, 12, 18)

$8 = 2^3$, $12 = 2^2 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3^2$

$\Rightarrow$ c.m.m.m.c. este $2^3 \cdot 3^2 = 72 \Rightarrow (n-5) \vdots 72 \Rightarrow$

$\Rightarrow (n-5) = 72k$, se cere cel mai mic număr n

$\Rightarrow n-5$ cel mai mic număr cu 3 cifre de mai sus

$n - 5 = 72k \Rightarrow n = 72k + 5$, pt $k = 1 \Rightarrow n = 72 + 5 = 77$

pt $k = 2 \Rightarrow n = 144 + 5 = 149 \Rightarrow \boxed{n = 149}$

[EN/2024/MODEL/III.2]

$E(x)=\left(\frac{x}{9+3x}-\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x^2+3x}\right):\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{x}-2\right)$ unde

$x\neq -3, x\neq 0, x\neq 3$

a) arata ca $\frac{x}{9+3x}-\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x^2+3x}=\frac{(x-3)^2}{3x(x+3)}$

b) $n=?, n\in\mathbb{N}$ a.i. $5\cdot E(n)\in\mathbb{N}$

---

a) $\frac{x}{9+3x}-\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x^2+3x}=\frac{x}{3(3+x)}-\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x(x+3)}=$

$=\frac{x^2-6x+9}{3x(x+3)}=\frac{(x-3)^2}{3x(x+3)}$

b) $E(x)\overset{a)}{=}\frac{(x-3)^2}{3x(x+3)}:\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{x}-2\right)=$

$=\frac{(x-3)^2}{3x(x+3)}:\frac{x^2+9-6x}{3x}=\frac{(x-3)^2}{3x(x+3)}\cdot\frac{3x}{(x-3)^2}=\frac{1}{x+3}$

Dar, $5\cdot E(n)\in\mathbb{N}\Rightarrow \frac{5}{n+3}\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow n+3\in D_5$

$\Rightarrow n+3\in\{\pm 1;\pm 5\}$

$n+3=1\Rightarrow n=-2\notin\mathbb{N}$

$n+3=-1\Rightarrow n=-4\notin\mathbb{N}$

$n+3=5\Rightarrow n=2\in\mathbb{N}$

$n+3=-5\Rightarrow n=-8\notin\mathbb{N}$

$S_f: n=2$