Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $6-2\sqrt{5}+\sqrt{5}\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=2x-3$. Determinați numărul real a pentru care $f\left(a\right)+f\left(1\right)=0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $10^{x-1}=10^{-2x}\cdot 10^{2}$.

5p **4.** Determinați câte dintre numerele naturale de două cifre distincte, care se pot forma cu cifre din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, au ambele cifre pare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A\left(4,6\right)$ și $B\left(6,0\right)$. Determinați distanța dintre punctele B și M, unde punctul M este mijlocul segmentului OA.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AC=6$ și aria egală cu 24. Arătați că $AB=8$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ și $B\left(x\right)=\begin{pmatrix}x+1 & x+4\\ 2x & 4x-3\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $\det\left(B\left(x\right)-xA\right)=x$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $B\left(x\right)+B\left(x+2\right)=2A\cdot A\cdot A$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2-2X-4$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=6$, arătați că $f\left(1\right)=1$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care $\left(x_1x_2x_3\right)^2=x_1+x_2+x_3+x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați rădăcinile polinomului f, știind că restul împărțirii lui f la polinomul $X-2$ este egal cu 8.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=\dfrac{3-x}{x^2}+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'\left(x\right)=\dfrac{x^2+x-6}{x^3}$, $x\in\left(0,+\infty\right)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-\ln x\right)=0$.

5p **c)** Arătați că $4f\left(x\right)-1\geq\ln 16$, pentru orice $x\in\left(0,+\infty\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\left(-3,+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=3x+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_2^4\left(f\left(x\right)-\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}\right)dx=18$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^6\left(f\left(x\right)-3x\right)dx=2$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_{-2}^{1}\dfrac{1}{x+3}\left(f\left(x\right)-\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}\right)dx=9\left(a-2\ln 2\right)$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$6-2\sqrt{5}+\sqrt{5}\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)=6-2\sqrt{5}+2\sqrt{5}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=$	**2p**
	$=6-5=1$	**3p**
2.	$f\left(a\right)=2a-3$, $f\left(1\right)=-1$	**3p**
	$2a-3-1=0$, de unde obținem $a=2$	**2p**
3.	$10^{x-1}=10^{-2x+2}$, de unde obținem $x-1=-2x+2$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Cifra zecilor se poate alege în 3 moduri	**3p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 2 moduri, deci sunt $3\cdot 2=6$ numere	**2p**
5.	$M\left(2,3\right)$	**2p**
	$BM=5$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot AC}{2}$, deci $24=\dfrac{AB\cdot 6}{2}$	**3p**
	$AB=\dfrac{24\cdot 2}{6}=8$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-1\cdot 1=$	**3p**
	$=2-1=1$	**2p**
b)	$B\left(x\right)-xA=\begin{pmatrix}1 & 4\\ x & 2x-3\end{pmatrix}$, de unde obținem $\det\left(B\left(x\right)-xA\right)=-2x-3$, pentru orice număr real x	**3p**
	$-2x-3=x$, de unde obținem $x=-1$	**2p**
c)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$, $2A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix}10 & 16\\ 16 & 26\end{pmatrix}$	**3p**
	$B\left(x\right)+B\left(x+2\right)=\begin{pmatrix}2x+4 & 2x+10\\ 4x+4 & 8x+2\end{pmatrix}$, deci $\begin{pmatrix}2x+4 & 2x+10\\ 4x+4 & 8x+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 16\\ 16 & 26\end{pmatrix}$ și obținem $x=3$	**2p**
2.a)	$f=X^3+6X^2-2X-4\Rightarrow f\left(1\right)=1^3+6\cdot 1^2-2\cdot 1-4=$	**3p**
	$=1+6-2-4=1$	**2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=-m$, $x_1x_2x_3=4$	**2p**
	$16=-m+4$, de unde obținem $m=-12$	**3p**
c)	$f\left(2\right)=8\Rightarrow 4m=8$, de unde obținem $m=2$	**2p**
	$f=X^3+2X^2-2X-4=\left(X+2\right)\left(X-\sqrt{2}\right)\left(X+\sqrt{2}\right)$, deci rădăcinile polinomului f sunt -2, $-\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{-x^2-2x(3-x)}{x^4}+\dfrac{1}{x}=$	**3p**
	$=\dfrac{x-6}{x^3}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2+x-6}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{x}{x^2}\right)=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)=0$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=2$; pentru orice $x\in(0,2]$, $f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,2]$ și, pentru orice $x\in[2,+\infty)$, $f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\ge f(2)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$ și, cum $f(2)=\dfrac{1}{4}+\ln 2$, obținem $4f(x)-1\ge\ln 16$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_2^4\left(f(x)-\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)dx=\int_2^4 3x\,dx=\frac{3x^2}{2}\Big|_2^4=$	**3p**
	$=\dfrac{48}{2}-\dfrac{12}{2}=18$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_1^6\left(f(x)-3x\right)dx=\int_1^6\frac{1}{\sqrt{x+3}}dx=2\int_1^6\frac{(x+3)'}{2\sqrt{x+3}}dx=2\sqrt{x+3}\Big|_1^6=$	**3p**
	$=6-4=2$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_{-2}^1\frac{1}{x+3}\left(f(x)-\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)dx=\int_{-2}^1\left(3-\frac{9}{x+3}\right)dx=3x\Big|_{-2}^1-9\ln(x+3)\Big|_{-2}^1=9(1-\ln 4)$	**3p**
	$9(1-2\ln 2)=9(a-2\ln 2)$, de unde obținem $a=1$	**2p**