## PROBLEME DE ALGEBRĂ (simbol AL)

**AL 1** Să se calculeze

$$\{3,3\}+\{-3,3\}\ ,$$

unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real $x$.

a) 0 b) $0,3$ c) $0,6$ d) $6,6$ e) 1 f) $-1$

**AL 2** Fie $A=(\sqrt{2}\ ,100-\sqrt{2}\ )$ şi $B=(\sqrt{5}\ ,100+\sqrt{5}\ )$. Câte numere naturale conţine mulţimea $A\cap B$?

a) 96 b) 97 c) 100 d) 101 e) 197 f) o infinitate

**AL 3** Să se determine suma soluţiilor ecuaţiei $|x|+|x+2|=3$.

a) $-3$ b) $-2$ c) $-1$ d) 1 e) 2 f) 3

**AL 4** Câte numere întregi se găsesc în mulţimea $A=\{x\in\mathbb{R},\ |2x-3|\leq 6\}$ ?

a) 0 b) 7 c) 4 d) 2 e) 6 f) 5

**AL 5** Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui $x$ pentru care

$$\frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}\geq 0.$$

a) $(-\infty, -1) \cup [0, 1)$ b) $(-\infty, -1)$ c) $\mathbb{R}$

d) $\emptyset$ e) $(1, +\infty)$ f) $(-\infty, -2)$

**AL 6** Andrei şi Cristian joacă un joc în care persoana care pierde o rundă îi dă celuilalt jumătate din punctele pe care le are în acel moment. Ei încep jocul cu $4a$, respectiv $4c$ puncte. Dacă Andrei câştigă prima rundă, iar Cristian o câştigă pe a doua, câte puncte are Cristian la sfârşitul celei de-a doua runde?

a) $2c$ b) $2c + a$ c) $2a + c$ d) $3c + a$ e) $3c + 2a$ f) $2c + 2a$

**AL 7** Maria cheltuieşte $\frac{3}{8}$ din salariul său lunar pe chirie şi $\frac{5}{12}$ pe mâncare. Ana, care câştigă dublu faţă de Maria, cheltuieşte un sfert din salariul său pe chirie şi jumătate pe mâncare. Cele două fete decid să doneze restul banilor din salariul pe o lună. Care este raportul dintre suma totală donată şi suma pe care o câştigă fetele împreună?

a) $\frac{17}{72}$ b) $\frac{17}{24}$ c) $\frac{17}{48}$ d) $\frac{23}{24}$ e) $\frac{23}{72}$ f) $\frac{23}{48}$

**AL 8** Dacă $a = b \cdot c^2$, $c$ scade cu 20%, iar $a$ rămâne constant, cu ce procent creşte $b$?

a) $56,25\%$ b) $40\%$ c) $20\%$

d) $0,025\%$ e) $0,5\%$ f) $60\%$

**AL 9** Suma totală de bani depusă la Smart Bank se măreşte de 10 ori pe parcursul unui an, timp în care numărul conturilor deschise scade cu 20%. Cu ce factor creşte suma medie depusă în fiecare cont?

a) 2 b) 8 c) $9,8$ d) 12 e) $12,5$ f) 13

**AL 10** Preţul transportului pentru o comandă mai mică sau egală cu $p$ lei este $s$ lei. Pentru comenzi ce depăşesc $p$ lei se percepe o taxă suplimentară de 5% din ce depăşeste $p$ lei. Dacă valoarea comenzii este $x$ lei ($x > p$), care este preţul transportului?

a) $s + 0,05x$ b) $s + 0,05p$ c) $0,05(s - p + x)$

d) $s + 0,05(x - p)$ e) $s + 0,05(p - x)$ f) $s + 0,05(x + p)$

**AL 11** Să se determine mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] = \frac{1}{[x]} ,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real $a$.

a) $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ b) $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \left[k, k + \frac{1}{k}\right]$ c) $\{n^2, n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}\}$

d) $\{1\}$ e) $[0, 1]$ f) $(0, 1)$

**AL 12** Să se calculeze suma soluţiilor ecuaţiei

$$\left[\frac{5 + 6x}{8}\right] = \frac{15x - 7}{5} .$$

a) $\frac{19}{15}$ b) $\frac{20}{15}$ c) $\frac{14}{15}$ d) 1 e) $\frac{13}{15}$ f) $\frac{10}{15}$

**AL 13** Să se calculeze media aritmetică a soluţiilor ecuaţiei

$$[x] + [2x] + [3x] = 4x.$$

a) 0 b) $\frac{5}{8}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{5}{12}$ e) $\frac{7}{16}$ f) 1

**AL 14** Să se determine mulţimea soluţiilor ecuaţiei

$$[a]^2 - (2a - 1)[a] + 3a = 0.$$

a) $[-1,4] \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ b) $[0,4] \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ c) $[0,5)$

d) $\{-3,-2,0,4,5\}$ e) $(-1,4] \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ f) $\{0,4\}$

**AL 15** Care dintre următoarele variante reprezintă negaţia afirmaţiei

$$\text{"}\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \text{ "?}$$

a) $\forall \varepsilon > 0, \nexists \eta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

b) $\nexists \varepsilon > 0, \nexists \eta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

c) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| \geq \varepsilon$

d) $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in D : |x - x_0| \geq \eta$ şi $|f(x) - l| \geq \varepsilon$

e) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| \geq \varepsilon$

f) $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in D : |x - x_0| < \eta$ şi $|f(x) - l| \geq \varepsilon$

**AL 16** A demonstra prin contrapoziţie afirmaţia $p \to q$ înseamnă a demonstra că este adevărată implicaţia $\bar{q} \to \bar{p}$. Care dintre enunţurile de mai jos trebuie argumentat pentru a demonstra prin contrapoziţie proprietatea

$$\text{" } \forall\ m \in M,\ \ \forall\ n \in N,\quad p(m,n) \wedge q(m,n)\ \to\ r(m,n) \text{ "}\quad ?$$

a) $\forall\ m \in M,\ \ \forall\ n \in N,\quad \bar{r}(m,n)\ \to\ \bar{p}(m,n) \vee \bar{q}(m,n)$

b) $\exists\ m \in M,\ \ \exists\ n \in N,\quad \bar{r}(m,n)\ \to\ \bar{p}(m,n) \vee \bar{q}(m,n)$

c) $\exists\ m \in M,\ \ \exists\ n \in N,\quad \bar{r}(m,n)\ \to\ \bar{p}(m,n) \wedge \bar{q}(m,n)$

d) $\forall\ m \in M,\ \ \exists\ n \in N,\quad \bar{r}(m,n)\ \to\ \bar{p}(m,n) \vee \bar{q}(m,n)$

e) $\forall\ m \in M,\ \ \forall\ n \in N,\quad \bar{r}(m,n)\ \to\ \bar{p}(m,n) \wedge \bar{q}(m,n)$

f) $\exists\ m \in M,\ \ \forall\ n \in N,\quad \bar{r}(m,n)\ \to\ \bar{p}(m,n) \vee \bar{q}(m,n)$

**AL 17** Despre mulţimile $A, B, C, D, E$ se ştie că: toate elementele lui $A$ sunt şi în $B$, toate elementele lui $B$ sunt şi în $C$, există elemente ale lui $C$ care nu sunt în $B$, toate elementele lui $D$ sunt şi în $C$, dar nu toate elementele din $C$ sunt în $D$, nu există elemente comune mulţimilor $A$ şi $D$, există elemente care aparţin atât lui $B$, cât şi lui $D$, unele elemente ale lui $E$ sunt şi elemente ale lui $D$, dar nu sunt elemente ale lui $B$. Care din următoarele afirmaţii rezultă din ipotezele anterioare?

a) există elemente ale lui $E$ care aparţin lui $A$

b) mulţimea $E$ este inclusă în mulţimea $B$

c) toate elementele lui $E$ aparţin şi lui $C$

d) există elemente ale lui $B$ care sunt şi în $A$ şi în $E$

e) unele elemente ale lui $E$ sunt elemente ale lui $C$

f) mulţimile $C$ şi $E$ nu au elemente comune

**AL 18** Fie propoziţiile $p$ şi $q$. Să se precizeze în câte cazuri din cele prezentate în următoarele tabele de adevăr se poate trage concluzia că propoziţia $q$ este adevărată:

| $p$ | $p \to q$ |
|---|---|
| 1 | 1 |

| $p$ | $p \vee q$ |
|---|---|
| 0 | 1 |

| $p$ | $\bar{q} \to \bar{p}$ |
|---|---|
| 1 | 1 |

| $p$ | $\bar{q} \to p$ |
|---|---|
| 0 | 1 |

| $p$ | $p \vee q$ |
|---|---|
| 1 | 1 |

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

**AL 19** Să se calculeze suma $\sum_{i=1}^{100} \left( \sum_{j=1}^{i} j \right)$.

a) 171700 b) $\frac{5050}{3}$ c) 17

d) 206040 e) 2550 f) $\frac{51}{2}$

**AL 20** Câte perechi $(x, y)$ de numere întregi satisfac inecuaţia

$$|x| + |y| < 10?$$

a) 181 b) 180 c) 90 d) 91 e) 101 f) $4 \cdot 181$

**AL 21** Câte triplete $(x, y, z)$ de numere naturale verifică ecuaţia

$$x + y + z = 10 \ ?$$

a) 66 b) 60 c) 72 d) 120 e) 144 f) o infinitate

**AL 22** Câte triplete $(a, b, c)$ de numere întregi verifică inecuaţia

$$(a-1)(a-3) + (b-5)(b-7) + (c-9)(c-11) < 0\,?$$

a) 0 b) 1 c) 6 d) 12 e) 18 f) 19

**AL 23** Să se determine câte numere de 6 cifre au toate cifrele pare.

a) $4 \cdot 5^5$ b) $4 \cdot 5^4$ c) $5^6$ d) $5^5$ e) $4 \cdot 5^6$ f) $(4 \cdot 5)^6$

**AL 24** Câte numere pare de 4 cifre încep şi se termină cu aceeaşi cifră?

a) 324 b) 360 c) 400 d) 500 e) 900 f) 1000

**AL 25** Se formează un număr alăturând, unul după altul, pătratele numerelor naturale diferite de zero, consecutive: 149162536... Să se determine în acest număr cifra aşezată pe poziţia 99.

a) 2 b) 1 c) 4 d) 0 e) 7 f) 3

**AL 26** Într-un şir $a_1,\ a_2\ \ldots$ , fiecare termen, începând cu al doilea, se obţine mărind cu 1 opusul termenului precedent. Dacă $a_1 = 2$, să se determine suma primilor 99 de termeni.

a) 49 b) 50 c) 51 d) 99 e) 101 f) 98

**AL 27** Se consideră şirul de numere raţionale pozitive

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

Să se determine al câtelea termen al şirului este numărul $\frac{2016}{2015}$ .

a) 8120450 b) 8118435 c) 2015

d) 2016 e) 8000111 f) 8000

**AL 28** O particulă se mişcă în sistemul cartezian de coordonate după următoarea schemă: porneşte din origine, după primul pas se mişcă o unitate la dreapta, la cel de-al doilea pas se mută 2 unităţi în sus, la al treilea pas 3 unităţi la stânga, la al patrulea pas 4 unităti în jos, la al cincilea 5 unităţi la dreapta, etc. În ce punct se va afla particula după 2022 de paşi?

a) $(1011, 1012)$ b) $(1021, 1020)$ c) $(1020, 1020)$

d) $(1001, -1020)$ e) $(1004, 1005)$ f) $(1010, 1011)$

**AL 29** Fie $a_1, ..., a_n, ...$ termenii unei progresii aritmetice de raţie $r$. Ştiind că $a_{21} = 20$ şi $a_{101} = 60$, să se determine $r$ şi formula termenului $a_{n+1}$.

a) $r = \frac{1}{4}$, $a_{n+1} = n - 1$ b) $r = 1$, $a_{n+1} = 10 + \frac{n}{2}$

c) $r = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 10 + \frac{n}{2}$ d) $r = -\frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 1 + \frac{n}{2}$

e) $r = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 1 + \frac{n}{4}$ f) $r = 1$, $a_{n+1} = 10 + \frac{n}{6}$

**AL 30** Un muncitor taie o scândură cu lungimea de 4 $m$ în 10 bucăţi, fiecare bucată fiind cu 6 $cm$ mai lungă decât precedenta. Ce lungime are cea mai scurtă bucată?

a) 10 $cm$ b) 11 $cm$ c) 12 $cm$ d) 13 $cm$ e) 14 $cm$ f) 15 $cm$

**AL 31** O rachetă este lansată în plan vertical şi parcurge în prima secundă 150 $m$. În fiecare din următoarele secunde parcurge cu 10 $m$ mai puţin ca în secunda precedentă. Care este înălţimea maximă la care ajunge racheta? Cât durează până ajunge la înălţimea maximă?

a) $h_{max} = 1200\ m$, $t = 15\ s$ b) $h_{max} = 1000\ m$, $t = 10\ s$

c) $h_{max} = 1500\ m$, $t = 20\ s$ d) $h_{max} = 2000\ m$, $t = 25\ s$

e) $h_{max} = 800\ m$, $t = 7\ s$ f) $h_{max} = 1800\ m$, $t = 22\ s$

**AL 32** Fie $S_m$ şi $S_n$ suma primilor $m$ şi respectiv $n$ termeni ai unei progresii aritmetice ($m \neq n$) cu primul termen nenul. Ştiind că $\dfrac{S_m}{S_n} = \dfrac{m^2}{n^2}$ , să se determine $\dfrac{a_m}{a_n}$ .

a) $\dfrac{2m-1}{2n-1}$ b) $\dfrac{2m+1}{2n+1}$ c) $\dfrac{m}{n}$

d) $\dfrac{m-1}{n-1}$ e) $\dfrac{2m-3}{2n-3}$ f) $\dfrac{m+1}{n+1}$

**AL 33** Fie $n$ un număr natural mai mare decât 3. Să se calculeze suma

$$2 + 22 + 222 + \ldots + \underbrace{22\ldots2}_{n\text{-ori}}.$$

a) $\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{10^{n+1}-10}{9} - n\right)$ b) $\dfrac{2}{81}\left(\dfrac{10^{n+1}-10}{9} - n - 1\right)$

c) $\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{20^{n+1}-20}{9} - n\right)$ d) $2\left(\dfrac{10^{n+1}-10}{9} - n\right)$

e) $\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{10^{n+1}-10}{9} - n\right)$ f) $\dfrac{2}{81}\left(\dfrac{10^{n+1}-10}{9} - n + 1\right)$

**AL 34** Populaţia de amoebe dintr-o colonie se dublează după fiecare două zile. Dacă acum şase zile erau 200 de amoebe, câte vor fi peste patru zile?

a) 1600 b) 3200 c) 6400

d) 12800 e) 800 f) 25600

**AL 35** Populaţia unui tip de bacterie se triplează la fiecare 10 minute. Dacă acum 20 de minute populaţia numără 100 de bacterii, peste câte minute din acest moment populaţia va atinge 24300 de bacterii?

a) 10 *min* b) 15 *min* c) 20 *min*

d) 25 *min* e) 30 *min* f) 35 *min*

**AL 36** Fie $b_1, b_2, ..., b_n, ...$, o progresie geometrică cu termeni nenuli şi raţie $q \neq 1$. Ştiind că $b_1 = 1$ şi $2b_{n+1} - b_n - b_{n-1} = 0$ pentru orice $n \geq 2$, să se determine $q$ şi suma $S_n$ a primilor $n$ termeni ai progresiei.

a) $q = \frac{1}{2}$, $S_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ b) $q = -\frac{1}{2}$, $S_n = \frac{2}{3}\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$

c) $q = -\frac{1}{2}$, $S_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ d) $q = \frac{1}{2}$, $S_n = \frac{2}{3}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

e) $q = \frac{1}{4}$, $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$ f) $q = \frac{1}{4}$, $S_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

**AL 37** Fie progresia geometrică $b_1, b_2, ..., b_n, ...$, de raţie $q$ şi termeni strict pozitivi. Să se calculeze suma

$$\frac{b_1 + b_2}{b_2 + b_3} + \frac{b_2 + b_3}{b_3 + b_4} + ... + \frac{b_{n-1} + b_n}{b_n + b_{n+1}}, \quad n \geq 2.$$

a) $\frac{2n}{q}$ b) $\frac{n}{q}$ c) $\frac{n}{q+1}$ d) $\frac{n-1}{q+1}$ e) $\frac{n-1}{q}$ f) $\frac{n+2}{q}$

**AL 38** Fie progresia geometrică $b_1, b_2, ..., b_n, ...$, de raţie $q \neq \pm 1$ şi termeni nenuli. Să se calculeze raportul $\frac{S}{P}$, unde

$$S = b_1^2 + b_2^2 + ... + b_{n+1}^2 \quad \text{şi} \quad P = \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2} + ... + \frac{1}{b_{n+1}^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) $b_1^4 q^{2n}$ b) $b_1^2 q^{2n}$ c) $b_1^{-4} q^{2n}$ d) $b_1^4 q^{4n}$ e) $b_1^2 q^{2n+2}$ f) $b_1^{-4} q^{2n+2}$

**AL 39** Se consideră un pătrat de arie $S_1$. Mijloacele laturilor acestui pătrat sunt vârfurile unui alt pătrat, a cărui arie o notăm cu $S_2$. În acelaşi mod, construim succesiv un şir de pătrate ale căror arii le notăm cu $(S_n)_{n\geq 1}$ (la fiecare pas construim pătratul de arie $S_n$ ca fiind pătratul care are drept vârfuri mijloacele laturilor pătratului precedent, cel de arie $S_{n-1}$). Să se determine cel mai mare număr natural nenul $n$ pentru care $2017S_n \geq S_1$.

a) 1 b) 10 c) 11 d) 2016 e) 2017 f) 2018

**AL 40** O particulă se mişcă în sistemul de coordonate $xOy$ după următoarea regulă: la fiecare pas, din punctul de coordonate $(x, y)$ particula se mută în punctul de coordonate $(x + y, -x)$. Dacă particula pleacă din punctul (1,1), unde se va afla după 2022 paşi?

a) $(1, 1)$ b) $(1, 0)$ c) $(0, 0)$
d) $(0, -1)$ e) $(-1, 1)$ f) $(2, -1)$

**AL 41** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{-1,\, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}\ .$$

Să se determine $f(-x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,\, 1\}$.

a) $\dfrac{1}{f(x)}$ b) $-f(x)$ c) $f(x)$ d) $-f(-x)$ e) $-\dfrac{1}{f(x)}$ f) $\dfrac{1}{f(-x)}$

**AL 42** Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f\,(x) = x^2 - x \ \text{ şi } \ g\,(x) = 3x - 1.$$

Să se determine funcţia compusă $(f \circ g)(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) $9x^2 - 9x + 2$ b) $3x\,(x^2 - x)$ c) $(3x-1)^2 - x$
d) $x^2 + 2x - 1$ e) $3x^2 - 3x$ f) $x^2 - x$

**AL 43** Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{dacă } x < 0 \\ 2x-3, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad g(x) = x-2.$$

Să se determine $(f \circ g)(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x-3, & x < 0 \\ 2x-7, & x \geq 0 \end{cases}$ b) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x < 2 \\ 2x-7, & x \geq 2 \end{cases}$

c) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x-3, & x < 2 \\ 2x-7, & x \geq 2 \end{cases}$ d) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x < -2 \\ 2x-7, & x \geq -2 \end{cases}$

e) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases}$ f) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x+3, & x < 0 \\ 2x-7, & x \geq 0 \end{cases}$

**AL 44** Să se determine toate funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma

$$f(x) = ax + 1 \quad \text{şi} \quad g(x) = x + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

ştiind că $f \circ g = g \circ f$.

a) $f(x) = x+1, g(x) = x$ b) $f(x) = ax+1, g(x) = x$

c) $f(x) = x+1, g(x) = x+b$ d) $f(x) = ax+1, g(x) = x+1$

e) $f(x) = ax+1, g(x) = x$ sau $f(x) = x+1, g(x) = x+b$

f) $f(x) = x+1, g(x) = x$ şi $f(x) = x+1, g(x) = x-1$

**AL 45** Să se determine funcţia de gradul întâi, ştiind că graficul său taie axa $Ox$ în $x = \sqrt{3}$ şi trece prin punctul $B(2\sqrt{3}, 2)$.

a) $\frac{2}{\sqrt{3}}x + 2$ b) $\frac{2}{\sqrt{3}}x - 2$ c) $\frac{1}{\sqrt{3}}x + 2$

d) $\frac{3}{\sqrt{3}}x + 1$ e) $\frac{2}{\sqrt{3}}x - 1$ f) $\frac{2}{\sqrt{3}}x$

**AL 46** În câte puncte taie axa $Ox$ graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{dacă } x < 0 \\ -2x - 3, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases} ?$$

a) 2 b) 1 c) 0 d) 3 e) 5 f) 4

**AL 47** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 6, & x \in (-\infty, 2) \\ (m-1)x, & x \in [2, 4) \\ x + 8, & x \in [4, \infty) \end{cases} .$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului real $m$ pentru care $f$ este strict monotonă pe $\mathbb{R}$.

a) $(1, 2)$ b) $(1, 4)$ c) $(1, 4]$ d) $(1, 2]$ e) $[0, 1]$ f) $(1, \infty)$

**AL 48** Fie ecuaţia

$$x^2 + |x| = mx(x + 3), \quad m \in \mathbb{R}.$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului $m$ astfel încât această ecuaţie să aibă exact trei soluţii reale diferite.

a) $\mathbb{R}$ b) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ c) $\emptyset$

d) $(-\infty, 1]$ e) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ f) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

**AL 49** Fie ecuaţia

$$ax^2 - (a+1)x + a^2 = 0, \ a \in \mathbb{R}^*$$

cu soluţiile $x_1$ şi $x_2$. Să se determine o relaţie independentă de $a$ între $x_1$ şi $x_2$.

a) $(x_1 + x_2)x_1x_2 = 1 + x_1x_2$ b) $(x_1 + x_2)x_1x_2 = 1 - x_1x_2$

c) $x_1 - x_2 = 2 + x_1x_2$ d) $x_1x_2 = 1 + x_1 + x_2$

e) $(x_1 - x_2)x_1x_2 = 3 + x_1x_2$ f) $x_1^2 + x_2^2 = 1 + x_1x_2$

**AL 50** Să se calculeze expresia $E = x_1^4 - x_2^4$, ştiind că $x_1$ şi $x_2$, cu $x_1 > x_2$, sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - ax - a^2 = 0$, unde $a \in (0, \infty)$.

a) $E = 5a^4\sqrt{3}$ b) $E = a^3$ c) $E = 3a^4\sqrt{5}$

d) $E = a^4\sqrt{5}$ e) $E = 4a^3$ f) $E = 3a^4$

**AL 51** Să se formeze ecuaţia de gradul al doilea cu rădăcinile

$$y_1 = \frac{x_2^3}{x_1^2} \text{ şi } y_2 = \frac{x_1^3}{x_2^2},$$

ştiind că $x_1$ şi $x_2$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 + x - a = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$.

a) $y^2 + \dfrac{5a^2 + 1}{a^2}\, y + a = 0$ b) $y^2 - \dfrac{1}{a^2}\, y - a = 0$

c) $y^2 + a = 0$ d) $y^2 + \dfrac{5a^2 + 5a + 1}{a^2}\, y - a = 0$

e) $y^2 - a = 0$ f) $y^2 - 2a + 3 = 0$

**AL 52** Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului real nenul $a$ ştiind că inecuaţia

$$ax^2 - (a + 1)x + 1 \geq 0$$

este verificată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) $(-\infty, -1]$ b) $[1, +\infty)$ c) $\{1\}$

d) $(0, 1]$ e) $\mathbb{R}^*$ f) $\emptyset$

**AL 53** Fie mulţimile

$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (a+2)x + 2a = 0\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (2a+1)x + 2a = 0\}$.

Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului real $a$, ştiind că $A \cap B$ are un singur element.

a) $(-\infty, 1]$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{1\}$ e) $\mathbb{R}$ f) $\emptyset$

**AL 54** Fie $a \in \mathbb{R}$ şi mulţimile

$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (a+2)x + 2a \leq 0\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (2a+1)x + 2a = 0\}$.

Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului $a$, ştiind că intersecţia $A \cap B$ are exact două elemente.

a) $\{1\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$

d) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e) $\emptyset$ f) $\left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$

**AL 55** O parabolă $y = ax^2 + bx + c$ are vârful în punctul de coordonate $(4, 2)$ şi trece prin punctul $(2, 0)$. Să se calculeze produsul $abc$.

a) $-12$ b) $-6$ c) $0$ d) $1$ e) $6$ f) $12$

**AL 56** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2mx + 2m^2 + m + 1$, $m \in \mathbb{R}$, al cărei grafic este parabola $(P)$. Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului $m$ pentru care parabola $(P)$ are vârful situat în semiplanul $y \geq 0$.

a) $[0, +\infty)$ b) $\{0, 1\}$ c) $\mathbb{R}$ d) $\emptyset$ e) $\{-1\}$ f) $(-\infty, 0]$

**AL 57** Să se determine funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, ştiind că graficul său trece prin punctul $A(0, 1)$ şi este tangent axei $Ox$ în punctul $B(1, 0)$.

a) $2x^2 - 3x + 1$ b) $-2x^2 + x + 1$ c) $3x^2 - 4x + 1$

d) $x^2 - 2x + 1$ e) nu există f) $-4x^2 + 3x + 1$

**AL 58** Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = -x^2 - (a-2)x + 2a \text{ şi } g(x) = x^2 + (b+1)x + b.$$

Să se determine parametrii reali $a$ şi $b$, ştiind că graficele funcţiilor $f$ şi $g$ se intersectează în două puncte distincte situate pe axa $Ox$.

a) $a = 0$, $b = -2$ b) $a = 1$, $b = -2$ c) nu există

d) $a = 0$, $b = 1$ e) $a = 1$, $b = 2$ f) $a = -1$, $b = -2$

**AL 59** Presiunea dintr-un recipient variază în timp după legea

$$p : [0, 10] \to \mathbb{R}, \qquad p(t) = \frac{5}{108}t^2 - \frac{5}{12}t + 7,$$

unde $t$ este exprimat în minute. După câte minute presiunea este minimă?

a) $4,5$ b) $6,0625$ c) $0$ d) $1$ e) $9$ f) $6,5$

**AL 60** Fie funcţia $f : [-1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x + 1$. Să se determine valoarea minimă $m$ şi maximă $M$ a funcţiei $f$.

a) $m = 0$, $M = 1$ b) $m = -4$, $M = 5$ c) $m = -4$, $M = 4$

d) $m \in \emptyset$, $M = 5$ e) $m = -4$, $M = 1$ f) $m = -4$, $M = +\infty$

**AL 61** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 + x + a}{x^2 + 1}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului $a$, ştiind că imaginea funcţiei $f$ este un interval de lungime 1.

a) $[0, +\infty)$ b) $(0, 1]$ c) $\{2\}$ d) $\emptyset$ e) $\{1\}$ f) $(-\infty, 0]$

**AL 62** Dacă numerele reale $x$ şi $y$ satisfac relaţia $|x + y| + |x - y| = 2$, să se determine valoarea maximă a expresiei $x^2 - 6x + y^2$.

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8 f) 9

**AL 63** Fie $M = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\}$ mulţimea soluţiilor sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 5. \end{cases}$$

Să se calculeze

$$\left| \sum_{(x,y) \in M} xy \right|.$$

a) 6 b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{1}{5}$ d) $\dfrac{2}{5}$ e) 1 f) 2

**AL 64** Să se determine valoarea parametrului nenul $a$ pentru care sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = a \\ x + y = 2a \end{cases}$$

are o singură soluţie.

a) $-2$ b) 2 c) 4 d) 3 e) $-1$ f) $-6$

**AL 65** Dacă $x + y = 2$ şi $x^3 + y^3 = -4$, să se calculeze $x^4 + y^4$.

a) $-8$ b) $-4$ c) $-2$ d) 2 e) 4 f) 8

**AL 66** Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului real $a$ astfel încât între soluţiile complexe $z_1$ şi $z_2$ ale ecuaţiei $z^2 + (2a-1)z + 3a - 1 = 0$ să aibă loc relaţia

$$\left| \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} \right| \leq 1.$$

a) $\left[0, \frac{2}{5}\right]$ b) $(0, 1]$ c) $[-1, 1]$

d) $(1, \infty)$ e) $(-\infty, 1)$ f) $(2, 3)$

**AL 67** Să se determine suma modulelor soluţiilor ecuaţiei

$$z^2 - (6-i)z + 5 - i = 0.$$

a) $2 + \sqrt{6}$ b) $1$ c) $\sqrt{6}$ d) $2\sqrt{6}$ e) $2$ f) $1 + \sqrt{26}$

**AL 68** Să se determine suma modulelor soluţiilor ecuaţiei

$$z^6 - 9z^3 + 8 = 0.$$

a) $3$ b) $9$ c) $2$ d) $6$ e) $8$ f) $7$

**AL 69** Să se calculeze

$$\frac{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{2012}}{i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2013}}.$$

a) $2013$ b) $2013i$ c) $i$ d) $-1$ e) $-i$ f) $1$

**AL 70** Se consideră numerele complexe $z$ şi $w$ astfel încât

$$|z| = |w| = \sqrt{1006} \quad \text{şi} \quad |z + w| = \sqrt{2013}\,.$$

Să se determine valoarea lui $|z - w|$.

a) $1$ b) $\sqrt{2012}$ c) $0$ d) $\sqrt{1006}$ e) $\sqrt{2011}$ f) $\sqrt{2013}$

**AL 71** Se consideră numerele complexe $z$ şi $w$ astfel încât

$$|z| = 2,\ |w| = 8 \quad \text{şi} \quad |z - w| = 6\ .$$

Să se determine valoarea lui $|z + w|$.

a) 16 b) 10 c) $\sqrt{31}$ d) 12 e) $\sqrt{1001}$ f) 24

**AL 72** Fie mulţimea $A = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 + z = 1 + i\}$ şi $n \geq 1$ un număr natural. Să se determine mulţimea $\{z^{4n},\ z \in A\}$.

a) $\{(-4)^{4n}\}$ b) $\{(-4)^n\}$ c) $\{1, (-4)^n\}$
d) $\emptyset$ e) $\{(i-1)^n\}$ f) $\{(i(i-1))^n\}$

**AL 73** Fie $z$ un număr complex ce verifică ecuaţia $z^2 - iz - 1 = 0$. Să se determine valoarea expresiei

$$\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right)^3\ .$$

a) $i$ b) 1 c) $-1$ d) $-i$ e) 0 f) $2i$

**AL 74** Ştiind că $z^2 - z + 1 = 0$, să se determine $\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^9$.

a) 2 b) $-1$ c) 0 d) $\cos\frac{2\pi}{3}$ e) 1 f) $-2$

**AL 75** Numărul complex $z$ satisface condiţiile $|z - i| = |z - 1| = |z + 5|$. Să se determine $|z|$.

a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $\sqrt{5}$ d) 3 e) $2\sqrt{2}$ f) 4

**AL 76** Se ştie că imaginea în plan a unui număr complex $z = x + iy$ este punctul $P(x, y)$. Imaginile în plan a patru numere complexe sunt vârfurile unui pătrat. Trei dintre numerele complexe sunt $-1+2i$, $-2-2i$ şi $3+i$. Care este cel de-al patrulea număr?

a) $3 - 2i$ b) $-2 + 3i$ c) $2 - 3i$

d) $-3 + 2i$ e) $2 - 2i$ f) $3 - 3i$

**AL 77** Fie numărul complex $z$ care verifică ecuaţia $z + |z| = 2 + 8i$. Să se determine $|z|^2$ .

a) 34 b) 68 c) 100 d) 169 e) 208 f) 289

**AL 78** Numărul complex $z$ are proprietăţile $|z + 2| = |z - 6(1 + i)| = 5$. Să se determine $|z|$.

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{13}$ e) $\sqrt{17}$ f) 5

**AL 79** Care este valoarea expresiei

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+i\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^{24} ?$$

a) $-2^{24}$ b) $2^{24}$ c) $2^{12}$ d) $-2^{12}$ e) $2^8$ f) $-2^8$

**AL 80** Se dau numerele complexe $z_1 = -1$ şi $z_2 = -2 + i$. Să se determine numerele complexe $z$ cu proprietăţile

$$|z - z_1| = |z - z_2| = |z_1 - z_2|.$$

a) $-\dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1 \mp \sqrt{3}}{2}$ b) $-\dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1 \mp \sqrt{3}}{2}$

c) $-\dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ d) $-\dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{4} + i\dfrac{1 \mp \sqrt{3}}{4}$

e) $-\dfrac{3 \pm \sqrt{2}}{2} + i\dfrac{1 \mp \sqrt{2}}{2}$ f) $\dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1 \mp \sqrt{3}}{2}$

**AL 81** Fie mulţimea $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 + z + 1 = 0\}$. Ştiind că $z \in A$, să se calculeze

$$\frac{z^{11} + z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^3 - 4}{z^{2013} + 2} .$$

a) $z$ b) $z^2$ c) $-\frac{4}{3}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $-1$ f) $0$

**AL 82** Să se determine suma soluţiilor ecuaţiei

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \frac{z-i}{z+i} + 1 = 0 .$$

a) $i$ b) $1$ c) $-i$ d) $-1$ e) $0$ f) $2i$

**AL 83** Se consideră numerele complexe $z_1, z_2, z_3$ care îndeplinesc condiţiile

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1, \quad z_1 + z_2 + z_3 \neq 0 \ \text{ şi } \ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0.$$

Să se determine $|z_1 + z_2 + z_3|$.

a) $1$ b) $0$ c) $4$ d) $8$ e) $2$ f) $6$

**AL 84** Dacă numărul complex $z$ satisface relaţia

$$|z-2|^2 + |z-3|^2 = |z-5|^2,$$

atunci $|z|$ este egal cu:

a) $4$ b) $3$ c) $2\sqrt{3}$ d) $2$ e) $3\sqrt{2}$ f) $\sqrt{3}$

**AL 85** Să se determine toate valorile nenule ale parametrului real $a$ astfel încât ecuaţia

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{ax^2 - 2x - \frac{1}{a}} = 0,$$

să aibă cel puţin o soluţie reală.

a) 2 b) $1 \pm \sqrt{2}$ c) $\dfrac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$

d) $-2,\ 1 \pm \sqrt{2}$ e) $2 \pm \sqrt{2}$ f) $0,\ 1 \pm \sqrt{2}$

**AL 86** Să se găsească mulţimea tuturor soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$\sqrt{1 - x - 2x^2} = -x - 1.$$

a) $\{1\}$ b) $\{0, -1\}$ c) $\{0, 2\}$

d) $\{-1\}$ e) $\emptyset$ f) $\{0\}$

**AL 87** Să se determine mulţimea tuturor soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$\sqrt{2x^3 - x^2 - 2x + 1} = x + 1.$$

a) $\{-1, 0, 1\}$ b) $\{-1, 1, 2\}$ c) $\{-1, 0, 2\}$

d) $\{0, 1, 2\}$ e) $\{0, 1, \sqrt{2}\}$ f) $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

**AL 88** Fie mulţimea

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1,\ \sqrt[2017]{x + \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt[2017]{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 2 \right\}.$$

Să se determine $\sum\limits_{x \in M} x^2$.

a) 1 b) 4 c) 9 d) 13 e) 20 f) 2

**AL 89** Să se determine numărul natural nenul $n$ cu proprietatea

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{9}{10}.$$

a) 99 b) 24 c) 999 d) 624 e) 9 f) 399

**AL 90** Să se găsească mulţimea tuturor valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x + 2\sqrt{|2 + x - 3x^2|} > 1.$$

a) $\left(-\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, \infty)$ b) $\left(-\infty, -\frac{9}{11}\right) \cup \left(-\frac{7}{13}, 1\right) \cup (1, \infty)$

c) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ d) $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, 1\right) \cup (1, \infty)$

e) $\left(-\frac{7}{13}, 0\right] \cup (1, \infty)$ f) $\left(-\infty, -\frac{9}{11}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$

**AL 91** Să se găsească mulţimea tuturor valorilor lui $x$ pentru care

$$\sqrt{x + 8} \leq x + 2.$$

a) $[1, \infty)$ b) $[-8, -4] \cup [1, \infty)$ c) $[-8, -4]$

d) $(-\infty, -4] \cup [1, \infty)$ e) $(-\infty, -4]$ f) $[-2, \infty)$

**AL 92** Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\sqrt{25x^2 - 44x - 12} \geq 1 - 4x.$$

a) $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [2, \infty)$ b) $(-\infty, -2]$

c) $\left[\frac{6}{25}, \infty\right)$ d) $(-\infty, -2] \cup \left[\frac{6}{25}, \infty\right)$

e) $\left[\frac{13}{3}, \infty\right)$ f) $\left[\frac{6}{25}, \frac{13}{3}\right)$

**AL 93** Să se găsească mulţimea tuturor valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\sqrt{2x^2 - x - 1} + 2x \geq -1 \ .$$

a) $\mathbb{R}$ b) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, \infty)$ c) $[-2, 1)$

d) $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$ e) $\left[-2, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, \infty)$ f) $[1, \infty)$

**AL 94** Să se determine suma modulelor soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt{x+8} = 3.$$

a) 36 b) 0 c) 7 d) 28 e) 1 f) 3

**AL 95** Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului $a \in \mathbb{R}$, ştiind că ecuaţia

$$\sqrt[3]{x^4 - 6x^2 + 9} - 3a\sqrt[3]{x^2 - 3} + 2a^2 = 0$$

are patru soluţii reale distincte.

a) $\left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}, 2\sqrt[3]{3}\right)$ b) $[-\sqrt[3]{3}, +\infty)$ c) $\left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}, -\sqrt[3]{3}\right)$

d) $(1, 2]$ e) $\left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$ f) $(0, 1]$

**AL 96** Să se determine valorile întregi pe care le poate lua numărul $b$ astfel încât

$$\frac{2002}{10^{-b}}$$

să aparţină intervalului $[1, 100]$.

a) $\{0, 1\}$ b) $\{-2, -1\}$ c) $\{-3, -2\}$

d) $\{-4, -3, -2\}$ e) $\emptyset$ f) $\{-3, -1\}$

**AL 97** Fie $60^a = 3$, $60^b = 5$ şi $c = \frac{1-a-b}{2-2b}$. Să se determine $12^c$.

a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $\sqrt{5}$ d) 3 e) $2\sqrt{3}$ f) 4

**AL 98** Fie $a > 0$, $a \neq 1$ şi $n \geq 2$. Să se calculeze

$$\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \ldots + \frac{1}{\log_n a} .$$

a) $\log_a n!$ b) $\log_a n$ c) $\dfrac{1}{\log_{n^n} a}$

d) $\dfrac{1}{\log_a n^n}$ e) $\log_a \dfrac{n(n+1)}{2}$ f) $\log_n a$

**AL 99** Dacă $a, b, c \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, $bc \neq 1$ şi notăm $x = \log_b a$, $y = \log_c a$, atunci $\log_{bc} a$ este egal cu:

a) $x + y$ b) $xy$ c) $\dfrac{1}{x+y}$ d) $\dfrac{1}{xy}$ e) $\dfrac{x+y}{xy}$ f) $\dfrac{xy}{x+y}$

**AL 100** Câte numere naturale $n > 1$ au proprietatea că $\log_n 1024$ este număr întreg?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

**AL 101** Fie numerele reale $x_1, x_2, ..., x_n$ astfel încât $x_1, x_2, ..., x_n \in (0, 1)$ sau $x_1, x_2, ..., x_n \in (1, +\infty)$. Să se determine valoarea minimă a expresiei

$$E = \log_{x_1}(x_1 x_2 ... x_n) + \log_{x_2}(x_1 x_2 ... x_n) + ... + \log_{x_n}(x_1 x_2 ... x_n) .$$

a) 1 b) $n(n-1)$ c) $n$ d) $n^2$ e) $n^3$ f) 0

**AL 102** Fie $a$ şi $b$ numere reale strict pozitive care satisfac relaţiile

$$a^b = b^a \quad \text{şi} \quad b = 9a.$$

Să se determine valoarea lui $a$.

a) $1/9$ b) $3$ c) $\sqrt[9]{9}$ d) $\sqrt[3]{9}$ e) $9$ f) $\sqrt[4]{3}$

**AL 103** Să se rezolve ecuaţia

$$2^{3^x} = 3^{2^x}.$$

a) $-1$ b) $0$ c) $1$

d) $\ln 3 - \ln 2$ e) $\ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)$ f) $\dfrac{\ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)}{\ln 3 - \ln 2}$

**AL 104** Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui $x \in \mathbb{R}$, ştiind că numerele $9^x - 1,\ 6^x,\ 4^x + 1$ sunt în progresie aritmetică în această ordine.

a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\{5\}$ d) $\{0\}$ e) $\emptyset$ f) $\{-2\}$

**AL 105** Să se rezolve ecuaţia $6^x - 3^{-x} = \sqrt{2^x - 9^{-x}}$.

a) $\left\{0\ ,\ \dfrac{2\ln 2}{\ln 2 + 2\ln 3}\right\}$ b) $\left\{0\ ,\ \dfrac{\ln 3}{\ln 2 + \ln 3}\right\}$ c) $\left\{1\ ,\ \dfrac{\ln 2}{2\ln 2 + \ln 3}\right\}$

d) $\left\{1\ ,\ \dfrac{\lg 3}{1 + \lg 2}\right\}$ e) $\left\{0\ ,\ \dfrac{\lg 2}{\lg 2 + 2\lg 3}\right\}$ f) $\left\{0\ ,\ \dfrac{\lg 3}{1 + 2\lg 2}\right\}$

**AL 106** Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ ştiind că numerele $9^x - 1,\ 6^x,\ 4^x + 1$ sunt în progresie geometrică în această ordine.

a) $\{-2\}$ b) $\{0\}$ c) $\{1\}$ d) $\{2\}$ e) $\emptyset$ f) $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

**AL 107** Fie $S$ mulţimea soluţiilor ecuaţiei

$$0,5^{x-1} + 9 = 0,2^{x+1}.$$

Să se calculeze

$$\sum_{x \in S} x^2.$$

a) 5 b) 9 c) 25 d) 2 e) 6 f) 4

**AL 108** Să se găsească produsul tuturor soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$x^{\log_2 x} = 16.$$

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 16 f) 32

**AL 109** Numerele reale strict pozitive $x$ şi $y$ verifică relaţiile

$$\log_4 x = \log_6 y = \log_9(x+y).$$

Să se determine raportul $\dfrac{y}{x}$ .

a) $\dfrac{3}{2}$ b) $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$ c) $\log_2 3$ d) $\dfrac{9}{4}$ e) $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$ f) $\log_3 2$

**AL 110** Fie $x > 10$. Câte cifre are soluţia ecuaţiei $\lg(\lg(\lg x)) = 1$ ?

a) 1 b) 10 c) 1000 d) $10^{10}$ e) $10^{10}+1$ f) $10^{10^{10}}$

**AL 111** Să se determine numărul soluţiilor ecuaţiei $3^{x+1} + 100 = 7^{x-1}$.

a) 1 b) 0 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

**AL 112** Să se rezolve inecuaţia

$$\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2+2x+2\right) \geq \log_{\frac{1}{2}}\left(2x+3\right).$$

a) $x \in [-1,+\infty)$ b) $x \in \left(-\infty,-\dfrac{7}{3}\right] \cup [-1,+\infty)$

c) $x \in \left(-\infty,-\dfrac{7}{3}\right] \cup \left[-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ d) $x \in \emptyset$

e) $x \in \left[-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ f) $x \in (-\infty,0]$

**AL 113** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia

$$\log_x\left(x^2-x+2\right) > 2\log_x(x+1).$$

a) $x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ b) $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ c) $x \in (1, \infty)$

d) $x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right]$ e) $x \in (0, 1)$ f) $x \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$

**AL 114** În ce interval se află soluţia strict pozitivă a ecuaţiei

$$(x^2+9)^{\frac{1}{\log_x(x^2+9)}} = \sqrt[3]{-x^2+6x} \ ?$$

a) $(2, 3]$ b) $(0, 1) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$ c) $(1, 6)$

d) $(-1, 0)$ e) $[-1, 1]$ f) $(1, 2)$

**AL 115** Să se determine mulţimea

$$\{x \in \mathbb{R} \mid (2\sqrt{3}+4)^x - 3(\sqrt{3}+1)^x + 2 < 0\}.$$

a) $\emptyset$ b) $\mathbb{R}$ c) $\left(0, \frac{\ln 2}{\ln(\sqrt{3}+1)}\right)$

d) $(0, +\infty)$ e) $(0, 1)$ f) $\left(\frac{\ln 2}{\ln(\sqrt{3}+1)}, +\infty\right)$

**AL 116** Fie $e$ baza logaritmului natural şi $x_1, x_2$ soluţiile ecuaţiei

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x + e^3\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x - e(e+1) = 0,$$

unde $x_1 > x_2$. Să se determine raportul $\frac{x_1}{x_2}$ .

a) $e(e+1)$ b) $e$ c) 1 d) $e^3$ e) 2 f) nu există

**AL 117** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -x-2, x < -1 \\ mx-3, \ x \geq -1. \end{cases}$$

Să se determine valoarea parametrului real $m$ pentru care $f$ este bijectivă şi să se determine în acest caz funcţia ei inversă.

a) $m = 2$, $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \begin{cases} -2-y, & y > -1 \\ \dfrac{y-3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$

b) $m = -2$, $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \begin{cases} -2-y, & y > -1 \\ \dfrac{-y-3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$

c) $m = 2$, $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \begin{cases} -2-y, & y \geq -1 \\ \dfrac{-y-3}{2}, & y < -1 \end{cases}$

d) $m = -2$, $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \begin{cases} -2-y, & y > -1 \\ \dfrac{-y+3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$

e) $m = -3$, $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \begin{cases} -2-y, & y > -1 \\ \dfrac{-y-3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$

f) $m = -1$, $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \begin{cases} 2+y, & y > -1 \\ \dfrac{-y-3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$

**AL 118** Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui $x$ astfel încât se poate calcula $C_{7x}^{x^2+10}$.

a) $\{2,3,4,5\}$ b) $\{1,2,3,4,5\}$ c) $\{0,1,2,3,4,5\}$

d) $\mathbb{N}$ e) $\mathbb{R}$ f) $\mathbb{Z}$

**AL 119** Să se calculeze suma

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + 100 \cdot 100! \, .$$

a) $(101!)^2$ b) $(100!)^2$ c) $101!$

d) $101! - 1$ e) $200! + 1$ f) $200! - 1$

**AL 120** Fie şirul $(x_n)_{n>1}$ cu termenul general

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{C_{n+1}^2}\right), \; n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$

Să se determine mulţimea $\left\{ n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \;\middle|\; \frac{1}{2} \leq x_n \leq \frac{2}{3} \right\}$.

a) $\{3, 4\}$ b) $\{5, 6, 7\}$ c) $\{2, 3, 4\}$

d) $\emptyset$ e) $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ f) $\{2, 4, 6\}$

**AL 121** Să se calculeze suma

$$C_9^3 + C_9^4 + C_9^5 + C_9^6 + C_9^7.$$

a) 420 b) 446 c) 456 d) 492 e) 360 f) 968

**AL 122** Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului natural $n$ care satisfac inegalitatea

$$2C_{n-1}^1 A_{n+1}^2 \geq \left(C_{n+1}^3\right)^2 .$$

a) $\{2, 3, 4\}$ b) $\{1, 2, 3, 4\}$ c) $\emptyset$

d) $\{2\}$ e) $[2, +\infty)$ f) $\{2, 3, 4, 5\}$

**AL 123** Fie $C = \{0, 1, \ldots, 9\}$ mulţimea cifrelor şi $S_k$ mulţimea stringurilor binare formate din $k$ biţi, adică

$$S_k = \{b_1 b_2 \cdots b_k : \ b_i \in \{0, 1\},\ i = \overline{1, k}\},\ k \in \mathbb{N}^*.$$

Să se calculeze câte funcţii $h : S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_8 \to \{c_1 c_2 c_3 : \ c_1, c_2, c_3 \in C\}$ se pot defini.

a) $1000^{510}$ b) $900^{512}$ c) $512^{1000}$

d) $1000^{256}$ e) $256^{1000}$ f) $256^2$

**AL 124** Fie $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Câte funcţii impare $f : A \to A$ există?

a) 1250 b) 125 c) 625 d) 5 e) 20 f) 25

**AL 125** Să se determine numărul funcţiilor pare

$$f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

a) 1250 b) 125 c) 625 d) 5 e) 1000 f) 25

**AL 126** Câte dintre submulţimile lui $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ conţin exact un număr impar?

a) 5 b) 16 c) 32 d) 64 e) 37 f) 160

**AL 127** Câte dintre submulţimile lui $\{1, 2, \ldots, 10\}$ au produsul elementelor divizibil cu 10?

a) 512 b) 100 c) 1024 d) 45 e) 752 f) 256

**AL 128** Câte numere de 10 cifre conţin 4 cifre de 3 şi 6 cifre de 7?

a) 24 b) 120 c) 210 d) 240 e) 256 f) 720

**AL 129** Câte din submulţimile de trei elemente ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, 15\}$ au suma elementelor divizibilă cu 3?

a) 30 b) 90 c) 125 d) 155 e) 455 f) 910

**AL 130** Câte dintre submulţimile nevide ale mulţimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ au suma elementelor divizibilă cu 5?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8 f) 16

**AL 131** Să se determine suma numerelor de 5 cifre distincte formate cu cifrele $1, 2, 3, 4, 5$.

a) $33333 \cdot 5!$ b) $33333 \cdot 5^5$ c) $33333 \cdot 5^4$

d) $33333 \cdot 6!$ e) $66666 \cdot 5!$ f) $66666 \cdot 5^5$

**AL 132** Câte numere de 12 cifre au exact cinci cifre de 1, patru cifre de 2 şi trei cifre de 3?

a) $12!$ b) $11!$ c) $\dfrac{12!}{5!\,4!\,3!}$ d) $C_{12}^5\, C_{12}^4\, C_{12}^3$ e) $A_{12}^5\, A_{12}^4\, A_{12}^3$ f) $3^{12}$

**AL 133** Într-o clasă sunt 15 elevi, dintre care 8 sunt fete şi 7 băieţi. În câte moduri se poate forma o grupă de 2 fete şi 2 băieţi pentru a participa la un concurs?

a) 28 b) 588 c) $C_7^4 C_8^4$ d) 858 e) $A_{15}^7 A_{15}^8$ f) $C_7^2 + C_8^2$

**AL 134** Alfabetul unui limbaj este format din literele A, B, E, L, R, T, aceasta fiind şi ordinea lor alfabetică. Dicţionarul acestui limbaj conţine doar cuvinte de 6 litere, fiecare literă din alfabet fiind luată o singură dată în oricare cuvânt. Dacă aşezarea în dicţionar se face ţinând cont de ordinea alfabetică a cuvintelor, atunci cuvântul aflat pe poziţia 538 în acest dicţionar este:

a) $REBLTA$ b) $LERBAT$ c) $TBERLA$

d) $RABLET$ e) $TRABLE$ f) $ALBERT$

**AL 135** Considerăm un alfabet format din simbolurile $\diamondsuit$, $\heartsuit$, $*$ şi $\sharp$. Câte cuvinte de lungime patru se pot forma în acest alfabet astfel încât fiecare simbol să apară o singură dată?

a) 24 b) 256 c) 16 d) 1 e) 64 f) 32

**AL 136** Un tren este format din 5 vagoane notate cu literele A, B, C, D, E. În câte moduri pot fi aşezate aceste vagoane astfel încât vagonul A să se afle mereu înaintea vagonului B?

a) 60 b) 20 c) 40 d) 80 e) 30 f) 45

**AL 137** Câte secvenţe binare (0 sau 1) de lungime 8 încep cu 1 sau se termină cu 00?

a) 1 b) 160 c) 32 d) 192 e) 128 f) 162

**AL 138** O anagramă a unui cuvânt este orice cuvânt (cu sens sau fără sens) obţinut prin permutarea literelor sale (inclusiv permutarea identică). Câte anagrame ale cuvântului SINUS pot fi construite?

a) 15 b) 30 c) 45 d) 60 e) 90 f) 120

**AL 139** Să se determine câte permutări $\sigma \in S_5$ satisfac simultan condiţiile $\sigma(i) < \sigma(i+2)$ pentru orice $i \in \{1,2,3\}$ şi $\sigma(j) < \sigma(j+3)$ pentru orice $j \in \{1,2,3\}$.

a) 1 b) 8 c) 7 d) 9 e) 24 f) 120

**AL 140** Fie $M_1 = \{X, Y, Z\}$ şi $M_2 = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Un cod este format dintr-o literă din $M_1$ pe prima poziţie şi 3 cifre distincte din $M_2$ pe următoarele 3 poziţii. Câte coduri ce conţin cel puţin una din cifrele 3,5,7 pot fi formate?

a) 210 b) 510 c) 630 d) 720 e) 1530 f) 2160

**AL 141** Aveţi la dispoziţie 2 piese albe, 3 piese negre şi mai multe piese de culoare violetă, toate de aceeaşi formă pătrată. Acestea se aşează în felul următor: o piesă pe primul rând, dedesubt 2 piese, sub acestea 3 şi aşa mai departe, obţinând 8 rânduri, ultimul cu 8 piese. În câte moduri pot fi aşezate aceste piese?

a) $10\,C_{36}^5$ b) $10\,C_{28}^5$ c) $A_{28}^5$ d) $A_{36}^5$ e) $C_{28}^2 \cdot C_{28}^3$ f) $C_{36}^2 \cdot C_{36}^3$

**AL 142** Un examen de matematică are două părţi. Partea A conţine 5 probleme, iar partea B conţine 4 probleme. Fiecare student trebuie să rezolve în total 5 probleme, dintre care cel puţin două trebuie să fie din partea A şi cel puţin 2 din partea B a examenului. Să se determine numărul de moduri diferite în care se pot alege cele 5 probleme pentru rezolvare.

a) 100 b) 60 c) 40 d) 224 e) 2400 f) 120

**AL 143** La o şedintă cu părinţii participă opt femei şi şapte bărbaţi, printre care doamna X şi domnul Y. In câte moduri se poate forma un comitet de trei femei şi patru bărbaţi, ştiind că doamna X refuză să fie desemnată împreună cu domnul Y?

a) 1540 b) 1960 c) 420
d) 282240 e) 5040 f) 277200

**AL 144** Cinci prietene îşi fac una alteia cadouri astfel încât fiecare din ele oferă un cadou şi primeşte un cadou (desigur, niciuna nu primeşte propriul cadou). În câte moduri diferite îşi pot oferi cadouri?

a) 44 b) 10 c) 5 d) 120 e) 70 f) 20

**AL 145** Un pătrat $3 \times 3$ este împărţit în 9 pătrăţele $1 \times 1$. Trebuie colorate cinci din cele nouă pătrăţele $1 \times 1$. În câte moduri se poate face colorarea astfel ca o linie să rămână necolorată?

a) 12 b) 15 c) 16 d) 18 e) 24 f) 32

**AL 146** Un pătrat $3 \times 3$ este împărţit în 9 pătrăţele $1 \times 1$. Trebuie colorate cinci din cele nouă pătrăţele $1 \times 1$ astfel încât să existe cel puţin un pătrăţel colorat pe fiecare linie şi pe fiecare coloană. În câte moduri se poate face colorarea?

a) 27 b) 63 c) 72 d) 81 e) 90 f) 126

**AL 147** Câţi termeni raţionali conţine dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{4} - \sqrt[4]{3}\right)^{99}$?

a) 10 b) 8 c) 0 d) 44 e) 15 f) 9

**AL 148** Fie $x > 0$. Câţi termeni din dezvoltarea

$$\left(3\sqrt[4]{x} - \frac{2}{3x}\right)^n$$

nu-l conţin pe $x$, ştiind că suma coeficienţilor binomiali ai dezvoltării este 1024?

a) 4 b) 1 c) 0 d) 9 e) 3 f) 6

**AL 149** Fie binomul $\left(2\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x\sqrt[4]{x}}\right)^n$, $x > 0$. Ştiind că termenul $T_{13}$ este de forma $c_1 x$, să se determine termenul $T_k$ din dezvoltarea binomului care este de forma $c_2 x^{-22}$, unde $c_1$ şi $c_2$ sunt două constante reale ce nu depind de $x$.

a) $T_{24}$ b) $T_{26}$ c) $T_{25}$ d) $T_{23}$ e) $T_{28}$ f) nu există

**AL 150** Fie

$$A = C_{100}^1 + 2C_{100}^2 + 3C_{100}^3 + \ldots + 100C_{100}^{100} .$$

Să se precizeze care din următoarele afirmaţii este adevărată.

a) $A$ este prim b) $A \in (10^5, 10^6)$ c) $3|A$

d) $7|A$ e) $A = 10000$ f) $A = 100 \cdot 2^{99}$

**AL 151** Să se determine coeficientul lui $x^4$ din dezvoltarea $(1+5x+4x^3)^{10}$.

a) $40 \cdot C_{10}^2$ b) $200 \cdot C_{10}^2$ c) $5^4 \cdot C_{10}^4$

d) $40 \cdot C_{10}^2 + 5^4 \cdot C_{10}^4$ e) $C_{10}^2 + 5^2 \cdot C_{10}^4$ f) $40 \cdot C_{10}^2 + 5^2 \cdot C_{10}^3$

**AL 152** Să se determine coeficientul termenului $x^3y^3$ din dezvoltarea expresiei $(x+2y+3)^8$.

a) 5040 b) 560 c) 2016 d) 40320 e) 37 f) 65536

**AL 153** Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui $x$ pentru care al patrulea termen al dezvoltării $(5+2x)^{16}$ este cel mai mare.

a) $\left(\frac{15}{28}, \frac{10}{13}\right)$ b) $(0,1)$ c) $(1,3)$

d) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ e) $(-2,2)$ f) $(-1,1)$

**AL 154** Care este probabilitatea $p$, respectiv $q$, ca alegând una din soluţiile ecuaţiei $(x+2)(x^2-x-1)=0$ aceasta să fie reală, respectiv întreagă ?

a) $p=\frac{1}{3}$, $q=0$ b) $p=1$, $q=\frac{1}{3}$ c) $p=q=\frac{1}{3}$

d) $p=1$, $q=0$ e) $p=\frac{1}{3}$, $q=\frac{2}{3}$ f) $p=q=\frac{1}{2}$

**AL 155** Care este probabilitatea $p$, respectiv $q$, ca să extragem un număr impar, respectiv un cub perfect (adică de forma $n^3, n \in \mathbb{N}^*$), dintre numerele de la 1 la 101 ?

a) $p=\frac{50}{101}$, $q=\frac{4}{101}$ b) $p=\frac{51}{101}$, $q=\frac{4}{101}$ c) $p=\frac{50}{101}$, $q=\frac{5}{101}$

d) $p=\frac{51}{101}$, $q=\frac{5}{101}$ e) $p=\frac{50}{101}$, $q=\frac{3}{101}$ f) $p=\frac{49}{100}$, $q=\frac{3}{101}$

**AL 156** Din mulţimea $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ se aleg aleator şase numere. Care este probabilitatea ca al doilea cel mai mare număr ales să fi fost 8?

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{8}$ f) $\frac{1}{10}$

**AL 157** Amestecăm un pachet de 52 de cărţi de joc şi extragem simultan două cărţi la întâmplare. Care este probabilitatea să alegem doi aşi de aceeaşi culoare?

a) $\frac{1}{52}$ b) $\frac{1}{51 \cdot 52}$ c) $\frac{1}{51 \cdot 26}$ d) $\frac{A_4^2}{52}$ e) $\frac{C_4^2}{52}$ f) $\frac{1}{51 \cdot 13}$

**AL 158** Care este probabilitatea ca aruncând trei zaruri să obţinem suma punctelor 6?

a) $\frac{5}{108}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{108}$ e) $\frac{1}{72}$ f) $\frac{1}{12}$

**AL 159** Într-un magazin se găsesc la vânzare 10 calculatoare Asus, 5 Toshiba şi 5 Sony. Delegatul Companiei-client, nefiind specialist IT, achiziţionează la întâmplare 3 calculatoare. Care e probabilitatea ca acesta să fi ales 2 calculatoare Asus şi unul Sony?

a) $\frac{15}{76}$ b) $\frac{3}{20}$ c) $\frac{5}{38}$ d) $\frac{5}{114}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{33}{38}$

**AL 160** Se aruncă o monedă de 5 ori. Să se determine probabilitatea să se obţină aceeaşi faţă de exact 2 ori?

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{8}$ d) $\frac{1}{8}$ e) $\frac{4}{5}$ f) $\frac{1}{4}$

**AL 161** Se aruncă un zar de două ori. Care este probabilitatea ca produsul numerelor apărute să fie număr par?

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{5}{6}$ f) $\frac{25}{36}$

**AL 162** Din mulţimea numerelor de patru cifre se extrage aleator un număr. Calculaţi probilitatea ca numărul să conţină două cifre de 5 şi celelalte două de 7.

a) $\frac{1}{100}$ b) $\frac{1}{250}$ c) $\frac{1}{375}$ d) $\frac{1}{750}$ e) $\frac{1}{1500}$ f) $\frac{1}{3000}$

**AL 163** Într-o urnă sunt bile numerotate de la 1 la 13. Se extrag aleator două bile. Care este probabilitatea ca suma numerelor de pe bilele extrase să fie un număr par?

a) $\frac{6}{13}$ b) $\frac{7}{13}$ c) $\frac{5}{26}$ d) $\frac{7}{26}$ e) $\frac{42}{169}$ f) $\frac{84}{169}$

**AL 164** Un program foloseşte aleator cifrele din mulţimea $\{0, 1, 2, 3\}$ pentru a scrie numere de patru cifre distincte. Se rulează programul. Care este probabilitatea ca numărul scris să fie număr par?

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{5}{9}$ f) $\frac{7}{9}$

**AL 165** Un tabel cu 2 linii şi 6 coloane este completat aleator folosind toate numerele de la 1 la 12. Care e probabilitatea ca pe prima linie să fie doar numere impare?

a) $\frac{1}{A_{12}^6}$ b) $\frac{1}{C_{12}^6}$ c) $\frac{1}{6!}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{2^6}{12!}$ f) $\frac{1}{4}$

**AL 166** Un tabel cu mai multe linii şi coloane completat cu 0 şi 1 se numeşte *matrice binară*. Determinaţi probabilitatea ca alegând aleator o matrice binară cu 4 linii şi 4 coloane, aceasta să aibă un singur element nenul.

a) $\frac{1}{15!}$ b) $\frac{1}{16!}$ c) $\frac{2}{7!}$ d) $\frac{1}{2^{12}}$ e) $\frac{1}{2^8}$ f) $\frac{1}{2^4}$

**AL 167** Un tabel cu mai multe linii şi coloane completat cu 0 şi 1 se numeşte *matrice binară*. Determinaţi probabilitatea ca alegând aleator o matrice binară cu 4 linii şi 4 coloane, aceasta să aibă urma cel puţin egală cu doi.

a) $\frac{3!}{16!}$ b) $\frac{11}{16}$ c) $\frac{8!}{2^{16}}$ d) $\frac{15}{32}$ e) $\frac{7}{16!}$ f) $\frac{4!}{2^{16}}$

**AL 168** Se consideră matricele:

$$A=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ şi } C=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze $A \cdot B - C$.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -7 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

**AL 169** Se consideră matricele:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} y & 1 \\ 2y & y \end{pmatrix} \text{ şi } C=\begin{pmatrix} y & 6 \\ 2x+4y & 2y \end{pmatrix}.$$

Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $xA + yB = C$.

a) $x = 1$, $y = 2$ b) $x = 2$, $y = 1$ c) $x = -2$, $y = -2$

d) $x = 2$, $y = -1$ e) $x = 1$, $y = -2$ f) $x = 2$, $y = 2$

**AL 170** Fie matricele:

$$A=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

şi funcţia

$$f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(X) = X^2 - 3X + I_2.$$

Să se determine matricele $B \cdot A \cdot C$ şi $f(B)$.

a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}, 2B$

b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, 2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}, -2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, -2B$

e) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, -2B$

f) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, -2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

**AL 171** Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \ln k & k \\ 1 & \ln k \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 10-\ln 10! & -35 \\ 10 & 10-\ln 10! \end{pmatrix}.$$

a) 10 b) $e$ c) nu există

d) 1 e) 2 f) 5

**AL 172** Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

$P_1$ : Dacă $A^2$ se poate calcula, atunci $A$ este o matrice pătratică;

$P_2$ : Dacă $AB$ şi $BA$ se pot calcula, atunci $A$ şi $B$ sunt matrice pătratice;

$P_3$ : Dacă $AB$ şi $BA$ se pot calcula, atunci $AB$ şi $BA$ sunt matrice pătratice;

$P_4$ : Dacă $AB = B$, atunci $A$ este matricea identitate ?

a) $P_1, P_2, P_3$ b) $P_2, P_3$

c) $P_1, P_2$ d) $P_1, P_3$

e) $P_2, P_3, P_4$ f) nici o afirmaţie nu este corectă

**AL 173** Fie $A$ şi $B$ două matrice pătratice. Care dintre următoarele matrice sunt întotdeauna egale cu $(A-B)^2$ ?

$M_1 = A^2 - B^2$

$M_2 = (B-A)^2$

$M_3 = A^2 - 2AB + B^2$

$M_4 = A(A-B) - B(A-B)$

$M_5 = A^2 - AB - BA + B^2$

a) $M_2, M_4, M_5$ b) $M_1, M_2, M_3$ c) $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$

d) $M_2, M_3$ e) $M_2, M_3, M_5$ f) $M_1, M_2, M_3, M_4$

**AL 174** Să se determine numărul matricelor din mulţimea

$$\mathcal{M} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & c \\ b & 0 & b \\ c & 1 & a-1 \end{pmatrix} \mid M^2 = \begin{pmatrix} x & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 1 & x \end{pmatrix},\ a,b,c,x,y \in \mathbb{N} \right\}.$$

a) 0 b) 5 c) 1 d) 3 e) 4 f) 2

**AL 175** Fie $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y, z \in \mathbb{R}$. Să se determine $x^{yz}$, dacă matricile

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} \text{ şi } B = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verifică relaţia

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

a) 4 b) $x$ c) 8 d) 2 e) $e$ f) 1

**AL 176** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -2 & 1 \\ 0 & -1 & b & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$. Să se determine $a+b$ astfel încât

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 31 & 1 \\ 1 & 14 \end{pmatrix}.$$

a) $-2$ b) 8 c) 2 d) 3 e) 5 f) $-1$

**AL 177** Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze

$$\mathrm{tr}[(I_2 + A)(I_2 + 2A)(I_2 + 3A) \dots (I_2 + 2018A)],$$

unde $\mathrm{tr}(X)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a unei matrice pătratice $X$.

a) 0 b) 2018! c) $1 + 2017!$

d) 2019! e) $1 + 2018!$ f) $1 + 2019!$

**AL 178** Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$$

astfel încât $AB \neq O_2$ şi $BA = O_2$. Să se determine mulţimea tuturor valorilor pe care le poate lua suma elementelor matricei $B$.

a) $\{2k \ : \ k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}\}$ b) $\mathbb{N}$ c) $\mathbb{Z}$

d) $\mathbb{Z} \setminus \{1\}$ e) $\mathbb{Z} \setminus \{2\}$ f) $\{2k \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$

**AL 179** Dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), X = (x_{ij})_{i,j=1,2}$, este o matrice care comută prin înmulţire cu orice matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, atunci:

a) $x_{11} = x_{22},\ x_{12} = x_{21} = 0$ b) $x_{11} = -x_{22},\ x_{12} + x_{21} = 1$

c) $x_{11} = x_{12} = 0,\ x_{22} = x_{21} \in \mathbb{Z}^*$ d) $x_{11} = x_{12} = x_{21} = x_{22} \in \mathbb{Z}^*$

e) $x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} = -1$ f) $x_{11} - x_{12} + x_{21} - x_{22} = 1$

**AL 180** Să se determine matricea $X$ care verifică relaţia

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

**AL 181** Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2018 & 2 \\ 1009 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze

$$A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{2018}.$$

a) $\dfrac{2019^{2018}+1}{2018}\ A$ b) $\dfrac{2018^{2016}+1}{2017}\ A$ c) $\dfrac{2019^{2018}-1}{2018}\ A$

d) $2018A$ e) $1009 \cdot 2019\ A$ f) $\dfrac{2018^{2016}-1}{2017}\ A$

**AL 182** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Să se determine cel mai mic număr natural $n \geq 2$ pentru care există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A^n = kA$.

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6 f) 7

**AL 183** Fie matricea $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $X^{4n+1} + 2^{2n}X$ pentru $n \in \mathbb{N}$ impar.

a) $X$ b) $I_2$ c) $O_2$ d) $-X$ e) $-I_2$ f) $X^2$

**AL 184** Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ cu

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}, & i = j\ , \\ 0, & i > j\ , \\ (-1)^{i+j}\ C_j^i\ , & i < j\ . \end{cases}$$

Să se calculeze $A^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, exprimând rezultatul în funcţie de matricea identitate $I_3$ şi de puterile matricei $B = A - I_3$.

a) $A^n = nB^n + 2I_3$ b) $A^n = \left(\dfrac{n^2-n}{2}+1\right)B + nI_3$

c) $A^n = \dfrac{n^2-n}{2}\,B^2 + nB + I_3$ d) $A^n = \dfrac{n^2-n}{2}\,B + nI_3$

e) $A^n = nB^2 + \dfrac{n^2-n}{2}\,B + I_3$ f) $A^n = \dfrac{n^2-n-1}{2}\,B^2 + nB + I_3$

**AL 185** Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Să se determine suma elementelor matricei $A^n$, $n \geq 2$.

a) $3^n + 2^{n+1}$ b) $4 \cdot 3^n - 2^n$ c) $4 \cdot 3^{n-1} + 7 \cdot 2^{n-1} + 6^{n-1}$

d) $3^{n+1} + n \cdot 2^{n-1}$ e) $4 \cdot 3^n - 2^{n-1}$ f) $3^{n+1} - 2^n + 6^{n-1}$

**AL 186** Fie matricea

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix},\ x \neq \frac{1}{2},\ x \in \mathbb{R}.$$

Să se determine $(A(-2017))^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4035^n & 0 & -4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ -4035^n & 0 & 4035^n \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1+4035^n & 0 & 1-4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-4035^n & 0 & 1+4035^n \end{pmatrix}$

c) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+4035^n & 0 & 1-4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-4035^n & 0 & 1+4035^n \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2017^n & 0 & 4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 4035^n & 0 & -2017^n \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -4035^n & 0 & 2017^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 2017^n & 0 & -4035^n \end{pmatrix}$ f) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-4035^n & 0 & 2017^{2n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2017^{2n} & 0 & 1-4035^n \end{pmatrix}$

**AL 187** Să se determine numerele reale $a$ şi $b$ pentru care soluţia ecuaţiei

$$X^{2017} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

este de forma

$$X = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R}.$$

a) $a = 0,\ b = 0$ b) $a = 2017,\ b = \frac{1}{2017}$

c) $a = \frac{1}{2017},\ b = 2017$ d) $a = 0,\ b = \frac{1}{2017}$

e) $a = 2017,\ b = 0$ f) $a = \frac{1}{2017},\ b = \frac{1}{2017}$

**AL 188** Fie $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o matrice nenulă cu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad = bc$ şi $a+d \neq 0$. Să se determine suma elementelor matricei

$$\begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}^n, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

a) $\frac{(1+a+d)^n - 1}{a+d}(b+c) + 1$ b) $(a+b+c+d)^n + 2$

c) $\frac{(1+a+d)^{n-1}}{a+d}(a+b+c+d)$ d) $\frac{(1+a+d)^n - 1}{a+d}(a+b+c+d) + 2$

e) $(a+b+c+d+2)^n$ f) $(1+a+d)^n(b+c) + 1$

**AL 189** Să se calculeze $A^{36}$, unde $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

a) $I_2$ b) $O_2$ c) $A$ d) $\sqrt{3}A$ e) $2^{36}I_2$ f) $3^{36}I_2$

**AL 190** Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ e^{-x} & 0 & 0 \\ e^x & 0 & 0 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R}.$$

Să se calculeze $A^{2017}$.

a) $2^{2017}A$ b) $I_3$ c) $-I_3$ d) $2^{1008}A$ e) $2^{2017}I_3$ f) $2^{1008}I_3$

**AL 191** Se consideră mulţimea matricelor de forma

$$X(m) = \begin{pmatrix} 1+4m & 6m \\ -2m & 1-3m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Să se studieze dacă $X(a)X(b) = X(a+b+ab)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ şi să se calculeze $(X(1))^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Nu, $\begin{pmatrix} 2^{n+2}-3 & 6(2^n-1) \\ 2+2^{n+1} & 4-3\cdot 2^n \end{pmatrix}$ b) Da, $\begin{pmatrix} 2^{n+2}-3 & 3\cdot 2^{n+1}-6 \\ 2-2^{n+1} & 4-3\cdot 2^n \end{pmatrix}$

c) Da, $\begin{pmatrix} 2^{n+2}-3 & 3\cdot 2^{n+1}+6 \\ 2(1-2^n) & 4(1-3\cdot 2^{n-2}) \end{pmatrix}$ d) Da, $\begin{pmatrix} 2^{n+2}+3 & 6(2^n+1) \\ 2-2^{n+1} & 4-3\cdot 2^n \end{pmatrix}$

e) Da, $\begin{pmatrix} 2^{n+2}+3 & 6(2^n-1) \\ 2(1-2^n) & 4(1-3\cdot 2^{n-2}) \end{pmatrix}$ f) Nu, $\begin{pmatrix} 2^{n+2}+3 & 3\cdot 2^{n+1}+6 \\ 2(1-2^n) & 4+3\cdot 2^n \end{pmatrix}$

**AL 192** Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

şi $X = A \cdot B \cdot C$. Să se determine suma elementelor matricei $X^n$, unde $n$ este un număr natural nenul.

a) $2^{n+1}$ b) $5^n - 2^{n-1}$ c) $\dfrac{5^{n+1}}{3}$

d) $\dfrac{2^n}{3}$ e) $5^n - 1$ f) $\dfrac{4^n + 5^n}{3} + 1$

**AL 193** Să se determine suma tuturor elementelor fiecărei matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică relaţia

$$X^2 - 4X = \begin{pmatrix} -3 & 2018 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) $-2015$ b) $-2013$ c) $-2015$ sau $2023$

d) $2018$ e) $-2017$ sau $2023$ f) $-2017$ sau $-2013$

**AL 194** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2019 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Să se găsească $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X^{2019} + X = A$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2018}{2019} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1010 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\dfrac{1}{2020}\begin{pmatrix} 2020 & 2019 \\ 0 & 2020 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} \sqrt[2019]{2} & \sqrt[2019]{2019} \\ 0 & \sqrt[2019]{2} \end{pmatrix}$ f) $A - \begin{pmatrix} \sqrt[2019]{2} & \sqrt[2019]{2019} \\ 0 & \sqrt[2019]{2} \end{pmatrix}$

**AL 195** Se consideră mulţimea

$$\mathcal{M} = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 5a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Să se calculeze $B(a) = A(a) + A^2(a) + \ldots + A^n(a)$ şi să se determine $a \in \mathbb{Z}$, astfel încât $\dfrac{1}{n} B(a) \in \mathcal{M}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $\frac{n}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5a(n+1) \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $a$ impar

b) $\begin{pmatrix} n & 5a\frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & n \end{pmatrix}$, $a$ impar

c) $\frac{n}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5a(n+1) \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $a$ par

d) $\begin{pmatrix} 1 & 5a\frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a$ par

e) $\frac{n}{2}\begin{pmatrix} 1 & 5a(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a$ impar

f) $\begin{pmatrix} n & 5a\frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & n \end{pmatrix}$, $a$ par

**AL 196** Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & a_1-b_3 \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & a_2-b_3 \\ a_3-b_1 & a_3-b_2 & a_3-b_3 \end{vmatrix},$$

unde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,3}$.

a) $a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3$

b) 1

c) $a_1-b_1+a_2-b_2+a_3-b_3$

d) 0

e) $-a_1+b_1-a_2+b_2-a_3+b_3$

f) $-1$

**AL 197** Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$, unde $a_{ij} = 1+\log_{i+1} j$. Să se calculeze $(\mathrm{tr}(A))^{\det A}$, unde $\mathrm{tr}(A)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a lui $A$.

a) $\log_3 2 + \log_2 3 + 3$

b) 1

c) 0

d) $\frac{1}{2}\log_2 3$

e) $\frac{3}{2}\log_3 2 + 3$

f) $\log_3 2 + \frac{1}{2}\log_2 3 + 3$

**AL 198** Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ şi $B = \sum_{k=1}^{n} A^k$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze determinantul matricei $B$.

a) $(2^{n+1}-1)(3^n-1)$

b) 1

c) 0

d) $3(2^n-1)(3^n-1)$

e) $6^n$

f) $\frac{1}{6^n}$

**AL 199** Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

a) $a+b+c$ b) $a^2+b^2+c^2$

c) $ab+bc+ca$ d) $(a+b)(a+c)(b+c)$

e) $-a-b-c$ f) $-4(b-a)(c-a)(c-b)$

**AL 200** Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietătea că $\det(A-I_2)=2$. Să se calculeze

$$\det A + \det(A-2I_2).$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

**AL 201** Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

a) 0 b) $b$ c) $c$

d) $a$ e) $a+b+c$ f) $(a+b+c)^3$

**AL 202** Să se găsească valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} \overline{abc} & \overline{bca} & \overline{cab} \\ \overline{cab} & \overline{abc} & \overline{bca} \\ \overline{bca} & \overline{cab} & \overline{abc} \end{vmatrix},$$

unde $a, b, c = \overline{1,9}$.

a) 99800 $(a-b)(b-c)(c-a)$ b) 998001 $(a^3+b^3+c^3-3abc)$

c) $10^6$ $abc$ d) 9908 $(a+b+c)^3$

e) 0 f) 999 $\overline{abc}$

**AL 203** Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ale cărei elemente satisfac condiţia $a_{ij} + a_{jk} + a_{ki} = 0$ pentru orice $i, j, k = \overline{1,3}$ . Să se determine valoarea determinantului matricei $A$.

a) 2017 b) $-2017$ c) 1 d) $-1$ e) 0 f) 1009

**AL 204** Fie $a$, $b$, $c$ lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic $ABC$ cu $a > b > c$, $\mathrm{m}(\widehat{C}) = 15^\circ$ şi

$$\begin{vmatrix} c^2 + ac - a - 1 & ac - a & a^2 - b^2 - c \\ b^2 + ab - a - 1 & a^2 - c^2 - b & ab - a \\ b^2c + bc + bc^2 & a^2b - b^3 & a^2c - c^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Să se determine ariile triunghiurilor de acest fel.

a) $1 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $1 \pm \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ c) 1

d) $1 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\dfrac{1}{2}$ f) $\dfrac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4}$

**AL 205** Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a^3} & -\dfrac{1}{a^2} & \dfrac{1}{a} \\ \dfrac{1}{b^3} & -\dfrac{1}{b^2} & \dfrac{1}{b} \\ \dfrac{1}{c^3} & -\dfrac{1}{c^2} & \dfrac{1}{c} \end{vmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^*.$$

a) $\dfrac{1}{abc}\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right)\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a}\right)$

b) $\dfrac{1}{abc}\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right)\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}\right)\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a}\right)$

c) $\dfrac{1}{a^2b^2c^2}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a}\right)$

d) $\dfrac{1}{a^2b^2c^2}\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)\left(\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)\left(\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{a^2}\right)$

e) $\dfrac{1}{a^2b^2c^2}\left(\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{a^2}\right)\left(\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)\left(\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{a^2}\right)$

f) $\dfrac{1}{a^2b^2c^2}\left(\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{a^2}\right)\left(\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)\left(\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{a^2}\right)$

**AL 206** Fie determinantul

$$\Delta_n^i=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & & & \\ a_1^{i-1} & a_2^{i-1} & \dots & a_n^{i-1} \\ a_1^{i+1} & a_2^{i+1} & \dots & a_n^{i+1} \\ \dots & & & \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix},\ \text{unde } 1\le i\le n-1,\ n\in\mathbb{N},\ n\ge 2,\ a_i\in\mathbb{R}^*.$$

Să se calculeze $\Delta_3^1+\Delta_3^2$.

a) $(a_2-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_1)$

b) $(a_1+a_2+a_3+a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)(a_2-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_1)$

c) $(a_1+a_2+a_3)(a_2-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_1)$

d) $(1+a_1+a_2+a_3+a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)(a_2-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_1)$

e) $(1+a_1+a_2+a_3+a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3+a_1a_2a_3)(a_2-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_1)$

f) $a_1-a_2+a_3$

**AL 207** Fie $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$ soluţiile ecuaţiei $\det(A-xI_3)=0$, unde

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Să se determine $\mid x_1 \mid + \mid x_2 \mid + \mid x_3 \mid$.

a) 0 b) 1 c) 3 d) 7 e) $-3$ f) 4

**AL 208** Să se determine suma numerelor reale $x, y, z$ pentru care matricea

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & x & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & y & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & z & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

satisface relaţiile $AA^t = A^tA = I_3$ şi are determinantul egal cu 1.

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $-\frac{2}{3}$ e) $-\frac{1}{3}$ f) 0

**AL 209** Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det A = \text{tr}(A) = 1$, unde $\text{tr}(A)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a lui $A$. Câte elemente are mulţimea $\{I_2, A, A^2, ..., A^{2018}\}$?

a) 5 b) 2 c) 7 d) 3 e) 6 f) 4

**AL 210** Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

astfel încât $AB \neq BA$ şi $A^3 = B^3$. Să se determine valoarea expresiei

$$\det(AB) - \text{tr}(A + B),$$

unde $\text{tr}(X)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a lui $X$.

a) 2 b) 0 c) $-1$ d) $-2$ e) 1 f) 3

**AL 211** Să se determine mulţimea tututor valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & m & m^2 \end{pmatrix},$$

să aibă soluţie nesingulară.

a) $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ b) $\{0, 1\}$ c) $\mathbb{R}$

d) $\emptyset$ e) $\{0\}$ f) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

**AL 212** Fie ecuaţia matriceală

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Să se determine suma elementelor matricei $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) 12 b) 5 c) $-9$ d) $-4$ e) 7 f) 3

**AL 213** Să se determine mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei matriceale

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ b) $\left\{ \begin{pmatrix} -m & -m \\ m & m \end{pmatrix},\ m \in \mathbb{R} \right\}$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} m & m \\ m & m \end{pmatrix},\ m \in \mathbb{R} \right\}$ d) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

e) $\left\{ \begin{pmatrix} 3m & m \\ m & 3m \end{pmatrix},\ m \in \mathbb{R} \right\}$ f) $\left\{ \begin{pmatrix} m & m \\ -m+2 & -m+2 \end{pmatrix},\ m \in \mathbb{R} \right\}$

**AL 214** Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc relaţia

$$A^{-1} = aA^2 + bA + cI_3.$$

a) $2a + b = \det A$ b) $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$

c) $a = 0$, $b = 2$, $c = -1$ d) $a = -1$, $b = 2$, $c = 0$

e) nu există $a, b, c \in \mathbb{R}$ f) $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$

**AL 215** Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ ale cărei elemente sunt

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j \text{ sau } i = j = 1, \\ i^2 + i + 1, & i = j \text{ şi } i \neq 1. \end{cases}$$

Să se determine suma elementelor inversei matricei $A$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

**AL 216** Să se determine valorile parametrului real $m$ astfel încât matricea

$$A = \begin{pmatrix} 5 & m+1 & x+1 \\ x & x-1 & 1 \\ 2 & m & 1 \end{pmatrix}$$

să fie inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}, 1\right\}$ b) $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ c) $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

d) $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ e) $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup [2, +\infty)$ f) $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$

**AL 217** Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ ac & bc-1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}_+^*)$ astfel încât

$$\det(A - aA^{-1}) = \det(A - A^{-1}) = 4.$$

Să se determine $abc$.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 6 e) 12 f) $-18$

**AL 218** Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

astfel încât $A^2 \neq O_2$ şi

$$A^4 - (a+d)^2 A^2 + (ad-bc)^2 I_2 = O_2.$$

Să se studieze existenţa inversei lui $A$ şi în cazul în care aceasta există să se determine $A^{-1}$.

a) $\dfrac{a+d}{ad-bc}\, I_2$ b) nu există

c) $\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ d) $\dfrac{1}{a+d}\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$

e) $A$ f) $\dfrac{1}{bc-ad}\begin{pmatrix} -a & c \\ b & -d \end{pmatrix}$

**AL 219** Fie $A, B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ două matrice de forma

$$A = \left[\ a \mid\ c_2 \mid\ c_3 \mid\ c_4\ \right], \quad \text{respectiv} \quad B = \left[\ b \mid\ c_2 \mid\ c_3 \mid\ c_4\ \right],$$

unde $a$, $b$, $c_2$, $c_3$, $c_4$ sunt coloanele acestor matrice. Dacă

$$\det(A) = 1 \quad \text{şi} \quad \det(B) = 4,$$

cât este determinantul matricei $C = \left[\ c_2 \mid\ a+b \mid\ c_3 \mid\ c_4\ \right]$?

a) 5 b) 0 c) 4

d) $-5$ e) 1 f) Nu se poate determina

**AL 220** Câte cvadruplete ordonate $(a, b, c, d)$ de numere naturale satisfac simultan relaţiile: $a + b + c + d = 12$ şi $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$?

a) 147 b) 127 c) 118 d) 128 e) 64 f) 96

**AL 221** Să se determine rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 6

**AL 222** Să se determine rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

**AL 223** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \sqrt{2} & m \\ m & \sqrt{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

să aibă rangul minim.

a) $\pm\frac{2}{3}$ b) $0$ c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $-\sqrt{2}$ f) $-\frac{2}{3}$

**AL 224** Pentru câte valori ale parametrului real $m$, matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & m & -1 \\ -2 & 4 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

are rangul doi?

a) $0$ b) $1$ c) $2$ d) o infinitate e) $6$ f) $10$

**AL 225** Să se determine valorile parametrilor reali $a$ şi $b$ pentru care matricele

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ şi } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ a & 0 & -1 \\ 1 & 1 & b \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

au acelaşi rang.

a) $a = 1$, $b = 0$ b) $a = -1$, $b = 0$ c) $a = 0$, $b = 0$
d) $a = 0$, $b = 1$ e) $a = 0$, $b = -1$ f) $a = 1$, $b = 1$

**AL 226** Să se determine mulţimea valorilor parametrului real $m$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} mx - 2y = 1 \\ -2x + y = m \\ x + my = -2 \end{cases}$$

este compatibil.

a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ c) $\{-1\}$
d) $\{\pm 1, 2\}$ e) $\{1\}$ f) $\{1, \pm 2\}$

**AL 227** Se consideră sistemul

$$\begin{cases} 2x + 5y + mz + 8t = 7 \\ x - y + 5z - 3t = n \\ 3x - my + z + pt = 7 \ , \end{cases}$$

unde $m, n, p \in \mathbb{R}$ şi $n \neq 0$. Să se calculeze suma $m + p$ astfel încât sistemul să fie compatibil, iar rangul matricei sale extinse să fie egal cu 2.

a) 1 b) 34 c) 17 d) $-10$ e) $-20$ f) $-7$

**AL 228** Se dă sistemul

$$\begin{cases} x - 2y + (m-1)\, z = -2 \\ x + 2y + z = 2 \\ mx + y + 3z = 1 \ . \end{cases}$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât sistemul să fie compatibil nedeterminat.

a) $\left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$ b) $\{-2, 2\}$ c) $\{0\}$ d) $\{-2\}$ e) $\left\{-2, \frac{5}{2}\right\}$ f) $\{1\}$

**AL 229** Se consideră sistemul

$$\begin{cases} x + y + mz + 4t = p \\ 2x + 3y + z + 6t = 1 \\ -x - 2y + 3z + nt = 2, \quad m, n, p \in \mathbb{R} \ . \end{cases}$$

Să se determine $(m+n)^p$ astfel încât sistemul să fie compatibil şi rangul matricei sistemului să fie egal cu 2.

a) $6^3$ b) 1 c) $-8$ d) $4^6$ e) $-1$ f) 8

**AL 230** Fie sistemul

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = m \\ 2x + 4y + 6z = -1 \\ -2x + 6y + 4z = 5, \quad m \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui $m$ pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

a) $-\dfrac{1}{10}$ b) $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{10}\right\}$ c) $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{10}\right\}$

d) $\dfrac{1}{10}$ e) $-\dfrac{1}{20}$ f) $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{20}\right\}$

**AL 231** Fie sistemul

$$\begin{cases} -2x + my - 6z = m - 1 \\ mx - 2y + 7z = 1 - m \\ x + y + z = m^2 - 1\ , \quad m \in \mathbb{R}\ . \end{cases}$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui $m$ pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

a) $m = -2$ b) $m \in \varnothing$ c) $m = 3$

d) $m = 1$ e) $m = 2$ f) $m = -1$

**AL 232** Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = -1 \\ 2x + 2y + 3z = 2 \\ x - 2y - z = 4\ . \end{cases}$$

a) $(-24, 14, 19)$ b) $(-2, -3, 3)$ c) $(21, 10, -14)$

d) $(-5, -3, 6)$ e) $(-14, -21, 24)$ f) $(3, -2, -3)$

**AL 233** Fie sistemul

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 2 \\ x + 4y + 3z = 1 \\ -3x - 2y + z = -3. \end{cases}$$

Care din următoarele relaţii este verificată de soluţiile sistemului?

a) $x^2 - y^2 - 2z = 1$ b) $x + y + z = 3$ c) $x^2 + y - z^2 = -1$
d) $x + y^2 - z^2 = 1$ e) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ f) $x^2 + y + z^2 = 4z$.

**AL 234** Soluţia sistemului $(A - 9I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, unde $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$, este $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Să se precizeze care din următoarele afirmaţii este adevărată pentru orice valori posibile ale lui $x_1$, $x_2$ şi $x_3$.

a) $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ b) $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ c) $x_1 - x_2 + x_3 = 0$
d) $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ e) $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$ f) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

**AL 235** Fie sistemul

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ y + az = a \\ x + z = 1, \quad a \in \mathbb{R}^* \ . \end{cases}$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui $a$ pentru care soluţia sistemului este formată din trei numere în progresie geometrică.

a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\mathbb{R}^*$ d) $\mathbb{R}_+^*$ e) $\mathbb{Q}^*$ f) $\{-1\}$

**AL 236** Fie sistemul

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 + a \\ -x + y - z = a \\ 2x + y = 1, \quad a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui $a$ pentru care soluţia sistemului verifică relaţia $3x + 3y - z = 0$.

a) $\{0\}$ b) $\mathbb{R}$ c) $\{1\}$ d) $\{-1\}$ e) $\{2\}$ f) $\{-2\}$

**AL 237** Să se determine acele soluţii $(x, y, z)$ ale sistemului

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

pentru care $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

a) $(0, 1, 0)$, $\left(\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, \frac{10}{13}\right)$ b) $(1, 0, 0)$, $\left(\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{3}{13}\right)$

c) $\left(\frac{12}{13}, \frac{7}{13}, -\frac{3}{13}\right)$, $(0, 0, -1)$ d) $(0, 0, 1)$, $\left(\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{3}{13}\right)$

e) $(0, 0, 1)$, $\left(-\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13}\right)$ f) $\left(\frac{11}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{3}{13}\right)$, $(0, 0, 1)$

**AL 238** Fie sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 9y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

şi $(x_0, y_0, z_0)$ o soluţie nebanală a sistemului. Să se determine valoarea raportului

$$\frac{5x_0 - 10y_0 - z_0}{10x_0 + 5y_0 + 3z_0}.$$

a) $\frac{23}{5}$ b) 1 c) $\frac{7}{5}$ d) 2 e) $-1$ f) $-\frac{7}{5}$

**AL 239** Fie sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} (a-2)x + ay + (a+1)z = 0 \\ (b-2)x + by + (b+1)z = 0 \\ (c-2)x + cy + (c+1)z = 0, \ a, b, c \in \mathbb{R} \ . \end{cases}$$

Să se determine $a$, $b$, $c$ astfel încât sistemul să aibă o singură soluţie.

a) $a = b = c$ b) $a, b, c \in \mathbb{R}$ c) $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$

d) $\nexists \ a, b, c \in \mathbb{R}$ e) $a = b \neq c$ f) $a \neq b = c$

**AL 240** Să se determine mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul

$$\begin{cases} x + my + m^2 z = 0 \\ m^2 x + y + mz = 0 \\ m^2 x + my + z = 0 \end{cases}$$

să admită şi soluţii diferite de soluţia banală.

a) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ b) $\left\{ \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \ , \pm 1 \right\}$ c) $\{\pm 1\}$

d) $\{1\}$ e) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ f) $\left\{ \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right\}$

**AL 241** Fie $a \in \mathbb{R}^*$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} x + ay - 1 = 0 \\ ax - 3ay - (2a+3) = 0 \ , \end{cases}$$

este compatibil nedeterminat. Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} u & v \\ 3 & 1 \end{vmatrix},$$

unde $(u, v)$ este o soluţie a sistemului.

a) $u$ b) $v$ c) $uv$ d) $0$ e) $1$ f) $-1$

**AL 242** Pentru care din următoarele cazuri de mai jos, sistemul

$$\begin{cases} ax + by + cz = b + c \\ bx + cy + az = a + c \\ cx + ay + bz = a + b, \ a, b, c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

este incompatibil?

a) $a - b + c = 0$ b) $a, b, c \in \emptyset$ c) $a + b - c = 0$

d) $a + b - c \neq 0$ e) $a + b + c = 0$ f) $a + b + c \neq 0$

**AL 243** Fie sistemul

$$\begin{cases} ax + by + cz = 1 \\ cx + ay + bz = 1 \\ bx + cy + az = 1, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^*. \end{cases}$$

Care dintre următoarele propoziţii matematice este adevărată?

a) Dacă $a = b = c$ atunci sistemul este compatibil determinat

b) Dacă $a = 1, b = 2, c = -3$ atunci sistemul este incompatibil

c) Dacă $a = 1, b = 3, c = 2$ atunci sistemul este compatibil nedeterminat

d) Dacă $a = -1, b = 3, c = -2$ atunci sistemul este compatibil determinat

e) Dacă $a = b = c$ atunci sistemul este incompatibil

f) Toate afirmaţiile sunt false

**AL 244** Fie $(x_t, y_t, z_t)$ soluţia sistemului

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 + 2^{t+1} \\ x + 2y + z = 2 + 2^t - \dfrac{1}{2^t} \\ 2x + y + z = 1 + 2^t + \dfrac{1}{2^t}, \ t \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Să se determine

$$\lim_{t\to\infty} x_t y_t z_t.$$

a) $\infty$ b) 0 c) 1 d) 2 e) $-2$ f) 3

**AL 245** Fie $S$ mulţimea soluţiilor reale ale sistemului

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + \ y + \ z = 2 \\ 3x + 3y + 4z = 2 \ . \end{cases}$$

Să se determine $\min\limits_{(x,y,z)\in S}(x^2 + y^2 + z^2)$.

a) 1 b) 1,4 c) 1,6 d) 2 e) 2,4 f) 3

**AL 246** Pe mulţimea $(0, +\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = \dfrac{xy}{x+y}$.
Să se calculeze

$$\frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} \circ \ldots \circ \frac{1}{50} \ .$$

a) $\dfrac{1}{1225}$ b) $\dfrac{1}{1274}$ c) 1275 d) $\dfrac{1}{1275}$ e) 1274 f) $\dfrac{1}{1300}$

**AL 247** Pe mulţimea $(-1, 1)$ se consideră legea de compoziţie $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$.
Să se calculeze

$$\underbrace{\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \ldots * \frac{1}{2}}_{de\ n\ ori} \ .$$

a) $\dfrac{4\cdot 3^n-32}{3^n-4}$ b) $\dfrac{2^n}{2^n+1}$ c) $\dfrac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}+1}$

d) $\dfrac{7\cdot 2^{n-2}-1}{13\cdot 2^{n-3}+1}$ e) $\dfrac{3^n-1}{3^n+1}$ f) $\dfrac{4^{n+1}-1}{4^{n+1}+1}$

**AL 248** Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie

$$x\circ y=(x-a)^2(y-a)+a,\ a\in\mathbb{Z}.$$

Să se determine mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x\circ x=x$.

a) $\{a,a-1\}$ b) $\{a,a+1\}$ c) $\{a-1,a,a+1\}$

d) $\{-a,1-a\}$ e) $\{-a,-a-1\}$ f) $\{-a,1-a,-a-1\}$

**AL 249** Pe mulţimea numerelor reale se defineşte operaţia algebrică

$$x\circ y=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Dacă $(u,v)$, $u,v>0$, este soluţia sistemului

$$\begin{cases} x\circ y\circ 2=\sqrt{17} \\ (x\circ 2)+(y\circ 3)=2\sqrt{13}\ , \end{cases}$$

să se determine $u+v$.

a) 1 b) 0 c) 5 d) 19 e) $\sqrt{13}$ f) $\sqrt{19}$

**AL 250** Se consideră $\mathbb{R}$ cu legea de compoziţie $x*y=ax+y$, $a\in\mathbb{R}$ şi mulţimea

$$M=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

cu operaţia de înmulţire a matricelor " $\cdot$ ". Ştiind că funcţia $f:\mathbb{R}\to M$,

$$f(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}$$

satisface relaţia $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$, să se determine mulţimea valorilor lui $a$.

a) $\{0\}$ b) $\{-1\}$ c) $\mathbb{R}$ d) $\emptyset$ e) $\{1\}$ f) $\{2\}$

**AL 251** Să se determine $k \in \mathbb{R}$, ştiind că mulţimea $[1,3]$ este parte stabilă în raport cu operaţia $x \circ y = xy - 2x - 2y + k$.

a) $k = 0$ b) $k = 1$ c) $k = 2$ d) $k = 3$ e) $k = 6$ f) $k = -2$

**AL 252** Se consideră mulţimea $\mathcal{M} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$, care este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu înmulţirea matricelor. Să se determine mulţimea tuturor valorilor pe care le poate lua $\det A$, ştiind că şi $A^{-1} \in \mathcal{M}$.

a) $\{0, 1\}$ b) $\{0\}$ c) $\{-1, 1\}$ d) $\{1\}$ e) $\{-1\}$ f) $\{-1, 0\}$

**AL 253** Fie mulţimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha x^2 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta x & \gamma \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Să se determine valorile parametrilor $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $(\mathcal{M}, \cdot)$ să fie parte stabilă a lui $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \cdot)$.

a) $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ b) $\alpha = \beta$, $\gamma = 0$ c) $\beta = 2\alpha$, $\gamma = 1$

d) $\alpha = 2\beta$ , $\gamma = -1$ e) $\alpha = 2\beta$, $\gamma = 1$ f) $\alpha = -\beta$, $\gamma = 1$

**AL 254** Pe mulţimea

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

se consideră legea de compoziţie $A * B = A \cdot B + aA + bB + 6I_2$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. În care din următoarele cazuri legea este asociativă şi comutativă?

a) $a \in \{-3, 2\}$, $b = a$ b) $a \in \{-2, 3\}$, $b = a$ c) $a \in \{-1, 2\}$, $b = a$

d) $a = -2$, $b = 3$ e) $a = -1$, $b = 2$ f) $a = -3$, $b = 2$

**AL 255** Să se determine o relaţie între parametrii reali $a$ şi $b$ astfel încât legea de compoziţie $x * y = xy + ax + ay + b$ de pe $\mathbb{R}$ să fie asociativă.

a) $a^2 = a + b$ b) $a = a^2 + b$ c) $b^2 + a = a^2$

d) $a + a^2 = b$ e) $2a = b + a^2$ f) $2b + a = a^2$

**AL 256** Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie

$$x * y = xy + 2x + 2y + k.$$

Să se găsească $k \in \mathbb{R}$ astfel încât legea să fie asociativă. Pentru această valoare, să se determine mulţimea soluţiilor ecuaţiei

$$x * x = -2.$$

a) $\{1\}$ b) $\{-1\}$ c) $\{1, -1\}$ d) $\{2, -2\}$ e) $\{1, -2\}$ f) $\{-2\}$

**AL 257** Pe mulţimea numerelor complexe se consideră legea de compoziţie

$$x * y = xy - i(x + y) - 1 + i.$$

Să se determine elementul neutru al acestei legi şi să se calculeze $i * i^2 * i^3 * i^4 * i^5$.

a) $e = 1 + i$, $-1$ b) $e = 1 + i$, $i$ c) $e = 1$, $1 - 2i$

d) $e = 1 - i$, $i$ e) $e = -i$, $2 - i$ f) $e = 2 + i$, $1 - i$

**AL 258** Pe mulţimea numerelor complexe se consideră legea de compoziţie

$$x * y = xy + 2i\,(x + y) - 4 - 2i\ .$$

Să se determine elementul neutru $e$ al acestei legi şi să se calculeze

$$w = (1 - i) * (1 - i)^2 * (1 - i)^3 * (1 - i)^4 * (1 - i)^5\ .$$

a) $e = 1 - 2i$ şi $w = 1 - i$ b) $e = 2i$ şi $w = -2i$

c) $e = 2i$ şi $w = 1 - i$ d) $e = 2 - i$ şi $w = -i$

e) $e = 1 - 2i$ şi $w = -2i$ f) $e = -i$ şi $w = 2 - i$

**AL 259** Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie

$$x * y = (x-3)(y-1)+3.$$

Să se determine elementul neutru al acestei legi.

a) nu există b) 4 c) 3 d) 0 e) 2 f) 6

**AL 260** Pe mulţimea numerelor întregi impare $2\mathbb{Z}+1$ se defineşte operaţia

$$x * y = \frac{1}{2}(xy + x + y - 1).$$

Să se determine mulţimea elementelor simetrizabile ale monoidului $(2\mathbb{Z}+1, *)$.

a) $\{-3, 1\}$ b) $2\mathbb{N}+1$ c) $2\mathbb{Z}+1$

d) $\{-5, -3, 1, 3\}$ e) $\{-3, -1, 1, 3\}$ f) $\{-5, 1\}$

**AL 261** Fie mulţimea

$$\mathcal{M} = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{array} \right) \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}).$$

Să se determine numărul elementelor simetrizabile ale monoidului $(\mathcal{M}, \cdot)$, unde " $\cdot$ " reprezintă operaţia de înmulţire a matricelor.

a) 0 b) 1 c) 8 d) 5 e) 7 f) 9

**AL 262** Pe mulţimea numerelor complexe se consideră legea de compoziţie

$$z_1 \perp z_2 = z_1 \cdot z_2 + Im(z_1) \cdot Im(z_2).$$

Să se determine elementele simetrizabile în raport cu această lege.

a) $\{z \in \mathbb{C},\, Re(z) = 0\}$ b) $\{z \in \mathbb{C},\, Re(z) \neq 0\}$

c) $\mathbb{C}$ d) $\mathbb{C}^*$

e) $\{z \in \mathbb{C},\, Im(z) = 0\}$ f) $\{z \in \mathbb{C},\, Im(z) < 0\}$

**AL 263** Se consideră matricele

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

şi mulţimea $\mathcal{M} = \{xA + B \mid x \in \mathbb{R}^*\}$. Să se determine mulţimea elementelor inversabile din $\mathcal{M}$ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

a) $\emptyset$ b) $\mathcal{M} \setminus \left\{\frac{1}{2}A + B\right\}$ c) $\mathcal{M} \setminus \{I_2\}$

d) $\mathcal{M} \setminus \{-A + B\}$ e) $\mathcal{M}$ f) $\mathcal{M} \setminus \{2A + B\}$

**AL 264** Fie $a \geq 0$ şi $M = (a, +\infty) \setminus \{a + 1\}$ pe care se defineşte legea de compoziţie

$$x * y = (x - a)^{\ln \sqrt[k]{y-a}} + a, \quad k \geq 2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Să se determine simetricul lui $x \in M$.

a) $e^{\frac{k^2}{\ln(x-a)}+a}$ b) $\dfrac{e^{k^2}}{x-a} + a$ c) $\dfrac{e^{k^2}}{x-a}$

d) $e^{\frac{k}{\ln(x-a)}}$ e) $e^{k^2} - x - 2a$ f) $e^{\frac{k^2}{\ln(x-a)}} + a$

**AL 265** Pe mulţimea $\mathbb{R}_+^*$ se introduce legea de compoziţie

$$x * y = a^{\sqrt[n]{\log_a^n x + \log_a^n y - \log_a^n b}},$$

unde $a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $n$ impar, $n \neq 1$. Să se determine simetricul lui $x \in \mathbb{R}_+^*$ în raport cu această lege de compoziţie.

a) $\dfrac{b^{2^n}}{x}$ b) $a^{\sqrt[n]{\log_a^n b + \log_a^n x}}$ c) $a^{\sqrt[n]{2\log_a^n b - \log_a^n x}}$

d) $\dfrac{b^2}{x}$ e) $a^{\sqrt[n]{\log_a^n b - \log_a^n x}}$ f) $\dfrac{b^{\sqrt[n]{2}}}{x}$

**AL 266** Pe mulţimea $\mathbb{R}_+^*$ se consideră legea de compoziţie

$$x * y = 2^{\sqrt[3]{\log_2^3 x + \log_2^3 y - 8}}.$$

Ştiind că elementele $2^p$ şi $2^q$ (unde $p, q \in \mathbb{R}$) sunt simetrice în raport cu legea dată, să se calculeze $p^3 + q^3$.

a) 16 b) 2 c) 4 d) 32 e) 8 f) 24

**AL 267** Pe mulţimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziţie

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + ad).$$

Să se determine elementele simetrizabile faţă de legea $*$ din mulţimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

a) $(b, 1)$, $b \in \mathbb{Z}$ b) $(b, 0)$, $b \in \mathbb{Z}$ c) $(b, \pm 1)$, $b \in \mathbb{Z}$
d) $(\pm 1, b)$, $b \in \mathbb{Z}$ e) $(0, b)$, $b \in \mathbb{Z}$ f) $(1, b)$, $b \in \mathbb{Z}$

**AL 268** Pe mulţimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră legea de compoziţie asociativă şi comutativă $*$ definită prin

$$A * B = AB - 2A - 2B + 6I_2.$$

Să se studieze simetrizabilitatea elementelor lui $\mathcal{M}$ în raport cu legea $*$. Dacă $A'$ desemnează simetricul elementului $A$, să se precizeze care din următoarele afirmaţii este adevărată:

a) În mulţimea $\mathcal{M}$ nu există element element neutru în raport cu $*$;
b) $I_2$ este element neutru în raport $*$ şi $A' = A^{-1}$ $(\forall)\, A \in \mathcal{M}$;
c) $3I_2$ este element neutru şi toate elementele din $\mathcal{M}$ sunt simetrizabile;
d) $3I_2$ este element neutru şi $(\forall)\, A \in \mathcal{M}$ cu $x \neq 2$ este simetrizabil;
e) $I_2$ este element neutru şi $A' = (A - 2I_2)^{-1} + 2I_2$;
f) $-I_2$ este element neutru şi toate elementele din $\mathcal{M}$ sunt simetrizabile.

**AL 269** Pe mulţimea $G = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ se defineşte legea de compoziţie

$$x * y = 3xy - 3x + 3(a^2 - 2)y - a + 3$$

pentru orice $x, y \in G$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $(G, *)$ este grup.

a) 0 b) 2 c) $-1$ d) 1 e) $-2$ f) 3

**AL 270** Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ dat şi mulţimea

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{C},\ A^n = I_2 \right\}.$$

Câte elemente are grupul $G$ în raport cu înmulţirea matricelor?

a) $(n-1)^2$ b) $n$ c) $n-1$
d) $n-2$ e) $(n-2)^2$ f) $n^2$

**AL 271** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ şi mulţimea

$$G = \left\{ M(x) = I_3 + xA^2, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ştiind că funcţia $f : \mathbb{R} \to G$, $f(x) = I_3 + xA^2$ este morfism între $(\mathbb{R}, *)$ şi $(G, \cdot)$, unde relaţia " $*$ " este definită prin $x * y = x + y + axy$, $a \in \mathbb{R}$, iar " $\cdot$ " este înmulţirea matricelor, să se determine valoarea parametrului $a$.

a) 1 b) $-1$ c) 4 d) $-4$ e) 25 f) $-25$

**AL 272** Fie $\mathbb{R}^*$ dotată cu legea de compoziţie definită prin $a * b = kab$, $k \in \mathbb{R}$ şi mulţimea

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^* \right\}$$

dotată cu înmulţirea matricelor " $\cdot$ ". Ştiind că funcţia

$$f : \mathbb{R}^* \to M,\ \ f(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}$$

este un morfism între grupurile $(\mathbb{R}^*, *)$ şi $(M, \cdot)$, să se determine mulţimea valorilor lui $k$.

a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{Z}$ c) $\mathbb{Q}$ d) $\{0\}$ e) $\{1\}$ f) $\{2\}$

**AL 273** Fie $G = (1, +\infty)$ care are o structură de grup faţă de operaţia " $*$ " definită prin

$$x * y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2}.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia

$$f : (0, +\infty) \to G, \quad f(x) = \sqrt{ax + b}$$

să fie un izomorfism de la grupul $((0, +\infty), \cdot)$ la grupul $(G, *)$.

a) $a = 0$, $b = 2$ b) $a = 1$, $b \in \{1, 2\}$ c) $a = 0$, $b = 1$

d) $a = 0$, $b \in \{1, 2\}$ e) $a = 1$, $b = 2$ f) $a = b = 1$

**AL 274** Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie

$$x \perp y = x + y - 5 \text{ şi } x \top y = x + y + 5.$$

Să se determine toate perechile $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = ax + b$ să fie un izomorfism între grupurile $(\mathbb{Z}, \perp)$ şi $(\mathbb{Z}, \top)$.

a) $(1, -10)$, $(-1, 0)$ b) $(1, -10)$ c) $(-1, -10)$

d) $(-1, 0)$ e) $(1, 0)$, $(-1, -10)$ f) $(1, 0)$

**AL 275** Fie $a, b \in \mathbb{Z}_5$, $f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$, $f_{a,b}(x) = ax + b$, $a \neq \widehat{0}$. Să se găsească toate funcţiile $f_{a,b}$ pentru care are loc

$$f_{a,b}^4 = f_{\widehat{2},\widehat{0}}^{2018} \circ f_{\widehat{2},\widehat{2}}^{2020} \circ f_{\widehat{2},\widehat{4}}^{2022},$$

unde $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{de\ n-ori}$.

a) $f_{\widehat{2},\widehat{2}}$ b) $f_{\widehat{1},\widehat{2}}$ c) $f_{\widehat{1},\widehat{4}}$; $f_{\widehat{2},\widehat{1}}$ d) $f_{\widehat{3},\widehat{0}}$ e) $f_{\widehat{2},\widehat{0}}$ f) $f_{\widehat{4},\widehat{0}}$

**AL 276** Fie legile de compoziţie

$$x \perp y = x + y + \widehat{10} \quad \text{şi} \quad x \top y = xy - \widehat{3}x - \widehat{3}y - \widehat{1}.$$

Să se determine cele două elemente neutre ale inelului $(\mathbb{Z}_{13}, \perp, \top)$.

a) $e_\perp = \widehat{10}$, $e_\top = \widehat{3}$ b) $e_\perp = \widehat{3}$, $e_\top = \widehat{3}$ c) $e_\perp = \widehat{3}$, $e_\top = \widehat{6}$
d) $e_\perp = \widehat{3}$, $e_\top = \widehat{4}$ e) $e_\perp = \widehat{4}$, $e_\top = \widehat{3}$ f) $e_\perp = \widehat{3}$, $e_\top = \widehat{11}$

**AL 277** Fie $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Să se determine mulţimea elementelor inversabile ale inelului $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$.

a) $\mathbb{Z}[i]$ b) $\mathbb{Z}[i] \setminus \{\pm 1, \pm i\}$ c) $\{1, i\}$
d) $\{\pm 1, \pm i\}$ e) $\mathbb{Z}[i] \setminus \{1, i\}$ f) $\emptyset$

**AL 278** Pe mulţimea numerelor întregi se definesc legile de compoziţie

$$x \perp y = ax + by - 7 \quad \text{şi} \quad x \top y = xy - 7x - 7y + c.$$

Să se determine $a, b, c \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ să fie un inel.

a) $a = b = c = 17$ b) $a = b = 1$, $c = 56$ c) $a = b = c = 7$
d) $a = b = 1$, $c = 7$ e) $a = b = c = 1$ f) $a = b = c = -1$

**AL 279** Pe mulţimea numerelor întregi se definesc legile de compoziţie

$$x * y = x + y - 2 \quad \text{şi} \quad x \circ y = xy - 2x - 2y + 6.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât între inelele $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ şi $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ să existe izomorfismul $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

a) $a = 1, b = 0$ b) $a = 1, b = 1$ c) $a = 1, b = 2$
d) $a = 2, b = 1$ e) $a = 1, b = -2$ f) $a = -1, b = 2$

**AL 280** Fie sistemul

$$\begin{cases} \widehat{4}x + \widehat{3}y = \widehat{6} \\ \widehat{3}x + \widehat{2}y = \widehat{1} \end{cases}$$

în $\mathbb{Z}_{11}$ cu soluţia $(x_0, y_0)$. Dacă $y_0'$ este inversul lui $y_0$ în corpul $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$, să se determine $m \in \mathbb{Z}_{11}$ astfel încât $\widehat{3}x_0^2 + my_0' = x_0$.

a) $\widehat{5}$ b) $\widehat{1}$ c) $\widehat{3}$ d) $\widehat{4}$ e) $\widehat{10}$ f) $\widehat{9}$

**AL 281** Să se determine $a \in \mathbb{Z}_8$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} a^2x + y = \widehat{5} \\ \widehat{3}x + ay = \widehat{7} \end{cases}$$

are soluţia $(\widehat{3}, \widehat{2})$ şi să se specifice numărul total al soluţiilor.

a) $a = \widehat{2}$, 5 soluţii; $a = \widehat{7}$, 4 soluţii
b) $a = \widehat{4}$, 7 soluţii; $a = \widehat{6}$, 3 soluţii
c) $a = \widehat{1}$, 3 soluţii; $a = \widehat{5}$, 8 soluţii
d) $a = \widehat{3}$, 8 soluţii; $a = \widehat{7}$, 4 soluţii
e) $a = \widehat{1}$, 5 soluţii; $a = \widehat{5}$, 3 soluţii
f) $a = \widehat{3}$, 6 soluţii; $a = \widehat{7}$, 4 soluţii

**AL 282** În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ să se rezolve ecuaţia

$$X^{2021} = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{2} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$

**AL 283** Fie mulţimea

$$\mathcal{M} = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{4}x \\ \widehat{6}x & \widehat{1} \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z}_{12} \right\}.$$

Să se determine toate soluţiile ecuaţiei $A^2(x) + 2A(x) = \begin{pmatrix} \widehat{3} & \widehat{4} \\ \widehat{0} & \widehat{3} \end{pmatrix}$.

a) $A(\widehat{7})$ b) $A(\widehat{3})$

c) $A(\widehat{2})$, $A(\widehat{5})$, $A(\widehat{8})$ d) $A(\widehat{1})$, $A(\widehat{4})$

e) $A(\widehat{0})$ f) nu are soluţii

**AL 284** Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$,

$$A = \begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{2} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{1} \end{pmatrix}.$$

Să se determine $A^{-1}$.

a) $\begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{2} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{2} & \widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{2} & \widehat{2} \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{2} & \widehat{2} \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{2} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{2} \end{pmatrix}$

**AL 285** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} m & \widehat{0} & \widehat{1} \\ m & \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$. Să se afle $m \in \mathbb{Z}_3$ pentru care $A$ este inversabilă şi să se determine $A^{-1}$.

a) $m = \widehat{0}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$ b) $m = \widehat{1}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$

c) $m = \widehat{0}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$ d) $m = \widehat{2}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$

e) $m = \widehat{1}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$ f) $m = \widehat{0}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$

**AL 286** Fie polinoamele $f = X^3+2X^2-X-5$ şi $g = X^2+1$. Să se determine câtul $c$ şi restul $r$ ale împărţirii lui $f$ la $g$.

a) $c = X + 2$, $r = 0$ b) $c = X^2 + 1$, $r = X + 2$

c) $c = X + 2$, $r = -2X - 7$ d) $c = -2X - 7$, $r = X + 2$

e) $c = X + 1$, $r = -2$ f) $c = X - 1$, $r = 0$

**AL 287** Fie polinomul $f = X^3 - 2X^2 + aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine $a$ şi $b$ ştiind că $-1$ este rădăcină a polinomului $f$ şi restul împărţirii polinomului $f$ la $X - 2$ este 6. Să se găsească apoi restul împărţirii lui $f$ la $X^2 - X - 2$.

a) $a = 1$, $b = 4$, $X + 1$ b) $a = -1$, $b = 4$, $2X + 2$

c) $a = 1$, $b = 4$, $2X + 2$ d) $a = -1$, $b = 2$, $2X + 1$

e) $a = 1$, $b = 2$, $X + 2$ f) $a = -1$, $b = 4$, $X - 1$

**AL 288** Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât restul împărţirii polinomului $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ la $X^2 + 2$ să fie $X + 1$ şi restul împărţirii lui $f$ la $X + 1$ să fie 3.

a) $a = 3$, $b = 2$, $c = 5$ b) $a, b, c \in \emptyset$

c) $a = -2$, $b = 3$, $c = 5$ d) $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$

e) $a = 3$, $b = 2$, $c = -5$ f) $b = 3$, $c = 2a + 1$, $a \in \mathbb{R}$

**AL 289** Se consideră polinomul $f = X^6 + aX^5 + bX^4 + cX^3 + aX^2 + bX + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine $a, b, c$ pentru care polinomul $f$ se divide cu polinomul $g = X^5 - 5X^3 + 4X$.

a) $a, b, c \in \emptyset$ b) $a, b, c \in \mathbb{R}$

c) $a = b = c = 0$ d) $a = c = 1$, $b = -1$

e) $a = c = -1$, $b = 1$ f) $a = 1$, $b = -5$, $c = 4$

**AL 290** Să se determine polinomul cu coeficienţi raţionali de grad minim care împărţit la $X^2+2X-3$ dă restul $3X+11$ şi împărţit la $X^2-4X+5$ dă restul $7X-3$.

a) $-X^3-4X+12$ b) $X^3+2X-17$ c) $-X^3+4X+11$

d) $X^3-4X+17$ e) $X^3+3X+15$ f) $-X^3+17X-5$

**AL 291** Se consideră polinoamele

$$f=(X-2014)\,(X-2016) \text{ şi } g=(X-2015)^{2014}+X-2001.$$

Să se determine restul împărţirii lui $g$ la $f$.

a) $X$ b) $0$ c) $X-2000$

d) $X+2014$ e) $2016\cdot 2014$ f) $X-2016$

**AL 292** Să se determine parametrii reali $a,b,c$ astfel încât polinomul $f=(X-1)^7+a(X-1)^4+bX+c$ să se dividă cu $(X+1)^3$.

a) $a=28$, $b=448$, $c=128$ b) $a=56$, $b=448$, $c=576$

c) $a=56$, $b=320$, $c=81$ d) $a=28$, $b=448$, $c=192$

e) $a=84$, $b=320$, $c=81$ f) $a=28$, $b=320$, $c=128$

**AL 293** Să se determine parametrii reali $m$ şi $n$ astfel încât polinomul $X^9+mX^2+n$ să se dividă cu polinomul $X^2+X+1$.

a) $m=0$, $n=0$ b) $m=0$, $n=-1$ c) $m=-1$, $n=0$

d) $m=-1$, $n=-1$ e) $m=1$, $n=0$ f) $m=0$, $n=1$

**AL 294** Să se determine restul împărţirii polinomului $X^n$ la polinomul $X^2+2X-3$.

a) $\frac{1-(-3)^n}{4}X+\frac{3+(-3)^n}{4}$ b) $\frac{1}{4}[(1+(-3)^n)X+3+(-3)^n]$

c) $\frac{1-(-3)^n}{4}X+\frac{3-(-3)^n}{4}$ d) $\frac{2-(-3)^n}{4}X+\frac{3+(-3)^n}{4}$

e) $\frac{1-(-3)^n}{4}X+\frac{3+3^n}{4}$ f) $\frac{1}{4}[(1+3^n)X+3+(-3)^n]$

**AL 295** Să se determine restul împărţirii polinomului $(X^3+X+1)^{19}$ la polinomul $X^2-X+1$.

a) $-1$ b) $X$ c) $X+1$ d) $0$ e) $X-1$ f) $1$

**AL 296** Să se determine parametrul $a\in\mathbb{R}$ şi să se rezolve ecuaţia

$$x^4+ax^3+4x^2-6x+4=0,$$

ştiind că are rădăcini opuse.

a) $a=-3$, $\{1,2,\pm\sqrt{2}i\}$ b) $a=-1$, $\{\pm1,\pm2\}$

c) $a=2$, $\{1,2,\pm2i\}$ d) $a=-2$, $\{1\pm i,\pm1\}$

e) $a=-1$, $\{\pm2,\pm i\}$ f) $a=-3$, $\{\pm1,\pm\sqrt{2}i\}$

**AL 297** Fie polinomul $f=X^4+a^2X^3-7X^2+aX+6$. Să se determine mulţimea tuturor valorilor întregi ale lui $a$ astfel încât $f$ să aibă o rădăcină întreagă impară.

a) $\emptyset$ b) $\mathbb{R}$ c) $\left\{-1,\frac{8}{9}\right\}$

d) $\left\{-1,0,\frac{8}{9}\right\}$ e) $\{-1,0\}$ f) $\{-1\}$

**AL 298** Fie polinomul $f=X^3+X^2-2X-2$. Să se determine descompunerea lui $f$ în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

a) $(X+1)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$ b) $(X-1)(X^2+2)$

c) $(X+1)(X^2-2)$ d) $(X-1)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$

e) $(X+1)(X-2)(X+2)$ f) $(X+1)(X^2+2)$

**AL 299** Să se descompună în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$ polinomul

$$f = X^4 + \widehat{2}X^3 + \widehat{4}X + \widehat{3} \in \mathbb{Z}_5[X].$$

a) $(X+\widehat{4})^2(X^2+X+\widehat{1})$ b) $(X+\widehat{4})(X+\widehat{2})(X^2+\widehat{1})$

c) $(X+\widehat{2})(X+\widehat{3})^2(X+\widehat{1})$ d) $(X+\widehat{2})(X+\widehat{3})(X^2+\widehat{1})$

e) $(X+\widehat{2})^2(X^2+X+\widehat{1})$ f) $(X+\widehat{2})(X+\widehat{4})(X^2+X+\widehat{1})$

**AL 300** Fie polinomul $f = (1-2X)^{2017} + (3X-2)^{2017}$. Să se calculeze suma coeficienţilor polinomului $f$.

a) 2017 b) 4034 c) 0 d) $2^{2017}$ e) $3^{2017}$ f) $(-1)^{2017}$

**AL 301** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia

$$x^4 + 5x^3 + ax^2 + 2x + b = 0$$

să admită soluţia $1+i$ şi să se găsească celelalte soluţii.

a) $a=-6$, $b=12$, $\{1-i,-1,-6\}$ b) $a=-3$, $b=6$, $\{1-i,1+i,-1\}$

c) $a=12$, $b=-6$, $\{1-i,1,12\}$ d) $a=6$, $b=-12$, $\{1+i,-1,-3\}$

e) $a=-6$, $b=12$, $\{1-i,-1,6\}$ f) $a=4$, $b=6$, $\{1+i,1,6\}$

**AL 302** Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ având coeficientul dominant 1. Ştiind că

$$xP(x-1) = (x-3)P(x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, să se determine $P(5)$.

a) 0 b) 10 c) 20 d) 30 e) 50 f) 60

**AL 303** Fie polinomul $P = X^3 + mX^2 + nX - a^3$, unde $m, n \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$. Ştiind că $P(a-x)+P(a+x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, să se determine $P(2017)$.

a) 0 b) $a$ c) $(2017 - a)^3$ d) $2017^3$ e) $a^3$ f) 2017

**AL 304** Polinoamele cu coeficienţi reali $aX^2 + bX + c$, $aX^3 + bX^2 + bX + a$ şi $aX^3 + cX^2 + cX + a$, $a \neq 0$, admit o rădăcină comună dacă şi numai dacă:

a) $a, b, c \in \mathbb{R}$
b) $a + b + c = 0$, $b \neq c$
c) $a - b + c = 0$, $b \neq c$
d) $a + b - c = 0$
e) $-a + b + c = 0$
f) $-a + b + c = 0$, $a \neq b$

**AL 305** Fie polinoamele $P = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ şi $Q = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Să se calculeze suma soluţiilor ecuaţiei $P(Q(x)) = 0$.

a) 0 b) $\frac{a}{b}$ c) $\frac{6 - 3b}{a}$ d) $\frac{b}{a}$ e) $\frac{1 - b}{a}$ f) 1

**AL 306** Fie polinoamele $P$ şi $Q$ cu proprietatea $P(x) = Q(x) + Q(1 - x)$. Ştiind că $P$ are coeficienţi naturali şi $P(0) = 0$, să se determine $P(P(3))$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

**AL 307** Fie polinoamele $P$ şi $Q \in \mathbb{C}[X]$ cu proprietatea

$$P(x) = Q(x) + Q(1 - x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{C}$. Ştiind că $P$ are coeficientul dominant 1, gradul cel mult 5 şi rădăcinile $-1$ şi 0, să se determine $P(3)$.

a) 60 b) 0 c) 24 d) $-24$ e) $-60$ f) 1

**AL 308** Fie polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$ cu proprietatea $P(x) = -P(-x)$, iar restul împărţirii lui $P$ la $X - 7$ este 3. Să se determine restul împărţirii lui $P$ la $X^2 - 7X$.

a) $\frac{7}{3}$ b) $\frac{3}{7}X$ c) $\frac{7}{3}$ d) $\frac{7}{3}$ e) $0$ f) $-\frac{3}{7}$

**AL 309** Fie polinomul $P = X^4 - \sqrt{3}mX + n$, $m, n \in \mathbb{Q}$. Să se determine valorile parametrilor $m, n$, ştiind că restul împărţirii lui $P(X+2)$ la $X+1$ este $3 - \sqrt{3}$.

a) $m = 0$, $n = 1$ b) $m = 1$, $n = 1$ c) $m = 1$, $n = 2$

d) $m = 2$, $n = 1$ e) $m = 2$, $n = 2$ f) $m = 1$, $n = 0$

**AL 310** Ştiind că polinomul $P = X^3 + pX + q$ are rădăcinile $x_1, x_2, x_3$, să se determine valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1x_2x_3 & x_2 - x_1x_2x_3 & x_3 - x_1x_2x_3 \\ x_2 - x_1x_2x_3 & x_3 - x_1x_2x_3 & x_1 - x_1x_2x_3 \\ x_3 - x_1x_2x_3 & x_1 - x_1x_2x_3 & x_2 - x_1x_2x_3 \end{vmatrix}.$$

a) $p$ b) $q$ c) $pq$ d) $9pq$ e) $\frac{p}{q}$ f) $\frac{q}{p}$

**AL 311** Dacă polinoamele $f_i \in \mathbb{C}[X]$,

$$f_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} X^{k-1}, \quad i = \overline{1,3},$$

au o rădăcină comună, să se găsească valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

a) $-1$ b) $(a_{12} - a_{23})(a_{13} - a_{32})(a_{23} - a_{31})$

c) $3a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12} - a_{23} - a_{31}$ d) $0$

e) $1$ f) $a_{12}a_{23}a_{31}$

**AL 312** Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix},$$

unde $x_i$, $i = \overline{1,3}$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 - x^2 - 11 = 0$.

a) $-1$ b) $0$ c) $1$ d) $11$ e) $-11$ f) $2$

**AL 313** Fie ecuaţia $x^3 - ax + a^2 = 0$, $a \in \mathbb{R}$, cu soluţiile $x_1, x_2, x_3$. Să se determine valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

a) $0$ b) $-a^2$ c) $a^2$ d) $2a^2$ e) $-3a^2$ f) $-2a^2$

**AL 314** Ştiind că $x_1$, $x_2$, $x_3$ sunt soluţiile ecuaţiei $3x^3 - 17x - 15 = 0$, să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} x_1x_2 + x_3 & x_1 + x_2 & -x_1x_2 \\ x_2x_3 + x_1 & x_2 + x_3 & -x_2x_3 \\ x_3x_1 + x_2 & x_3 + x_1 - x_2 & x_2 - x_3x_1 \end{vmatrix}.$$

a) $0$ b) $3$ c) $-17$ d) $\dfrac{17}{3}$ e) $7$ f) $-5$

**AL 315** Se consideră ecuaţia $x^3 - 4x^2 + 10 = 0$ cu soluţiile $x_1$, $x_2$, $x_3$ şi determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}.$$

Să se determine valoarea lui $\Delta^2$.

a) $140$ b) $36$ c) $144$ d) $-140$ e) $-36$ f) $-144$

**AL 316** Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1i & a_1-b_1i & b_1-c_1 \\ a_2+b_2i & a_2-b_2i & b_2-c_2 \\ a_3+b_3i & a_3-b_3i & b_3-c_3 \end{vmatrix},$$

unde $a_k, b_k, c_k$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^3+\alpha_k=0$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k=\overline{1,3}$.

a) $(a_1+b_1)(b_2+c_2)(c_3+a_3)$ b) $a_1b_2c_3$

c) $0$ d) $1$

e) $a_1+a_2+a_3+i(c_1+c_2+c_3)$ f) $(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)(b_3-c_3)$

**AL 317** Fie $f=X+a$ şi $g=X^2+bX+c$ cu $a,b,c\in\mathbb{R}$. Să se determine valoarea minimă a lui

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix} 1 & f(2) & g(2) \\ 1 & f(3) & g(3) \\ 1 & f(x) & g(x) \end{vmatrix},\ x\in\mathbb{R}.$$

a) $\frac{5}{2}$ b) $0$ c) $-\frac{1}{4}$ d) $-(a+b+c)^2$ e) $1$ f) $abc$

**AL 318** Suma soluţiilor comune ale ecuaţiilor

$$x^5-5x^4+3x^3+11x^2-6x-4=0,$$

$$x^5-5x^4+6x^3+2x^2-12x+8=0$$

este:

a) $1$ b) $0$ c) $2\sqrt{5}$ d) $3$ e) $1+\sqrt{5}$ f) $\sqrt{5}$

**AL 319** Fie $P\in\mathbb{R}[X]$ polinomul de grad minim care satisface simultan condiţiile:

$(i)$ $P+1$ este divizibil cu $(X-1)^3$;

$(ii)$ $P-1$ este divizibil cu $(X+1)^3$.

Să se calculeze $P(0)$.

a) 1 b) $-1$ c) 0 d) 2017 e) $-2017$ f) 2

**AL 320** Fie $P \in \mathbb{Q}[X]$ polinomul de grad minim care satisface simultan condiţiile:
$(i)$ $P+X$ este divizibil cu $\left(X-\sqrt{2}\right)^2$;
$(ii)$ $P-X$ este divizibil cu $X^3$.
Să se calculeze $P(2)$.

a) 2 b) 1 c) 3 d) $-2$ e) 4 f) $-1$

**AL 321** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie injectivă. Să se determine suma coeficienţilor polinomului $P\in\mathbb{R}[X]$ care satisface relaţia

$$-2x+4+5f(x+2)=4f(3x-2)+f(2x-7P(x-1)),$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

a) 1 b) 2 c) 0 d) $-1$ e) $-2$ f) 3

**AL 322** Fie $x_1,x_2,x_3,x_4$ soluţiile ecuaţiei $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$. Dacă $x_1\le x_2\le x_3\le x_4$, atunci ele verifică relaţia:

a) $x_1+x_2+2x_3-x_4=-2$ b) $x_i\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R},\ i=\overline{1,4}$
c) $x_1x_2+x_3-2x_4=-2$ d) $x_1x_2x_3-x_4=-2$
e) $x_1+3x_2-x_3+x_4=-2$ f) $x_1+x_2+x_3-2x_4=-2$

**AL 323** Fie polinomul $f=X^3-mX^2+2X+3$, $m\in\mathbb{R}$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3$. Să se determine mulţimea valorilor parametrului $m$ pentru care are loc relaţia

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\ .$$

a) $\emptyset$ b) $\{1\}$ c) $\{0\}$ d) $\left\{\pm\sqrt{\frac{10}{3}}\right\}$ e) $\left\{\pm\sqrt{\frac{3}{10}}\right\}$ f) $\left\{\pm\frac{10}{3}\right\}$

**AL 324** Fie polinomul $f = X^4 - 5X^3 + 2X^2 - 3X + 1$ cu rădăcinile $x_1$, $x_2$, $x_3$ şi $x_4$. Să se calculeze valoarea expresiei

$$\frac{1}{2-x_1} + \frac{1}{2-x_2} + \frac{1}{2-x_3} + \frac{1}{2-x_4}\,.$$

a) 0 b) 1 c) 23 d) $\frac{21}{23}$ e) $\frac{23}{21}$ f) $-\frac{21}{23}$

**AL 325** Fie polinomul $f = X^3 + 5X + 3$ cu rădăcinile $x_1$, $x_2$, $x_3$. Să se determine polinomul care are ca rădăcini pe $x_1^2$, $x_2^2$, $x_3^2$.

a) $X^3 + 15X^2 + 10X - 7$ b) $X^3 - 5X^2 + 25X + 5$

c) $X^3 + 10X^2 + 25X - 9$ d) $X^3 - 10X^2 - 5X + 3$

e) $X^3 + 15X^2 - 5X + 5$ f) $X^3 - 10X^2 + 25X - 9$

**AL 326** Să se afle $a, b, c \in \mathbb{R}$ ştiind că soluţiile ecuaţiei

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 64 = 0$$

sunt numere naturale în progresie geometrică cu raţia număr natural.

a) $a = 5$, $b = 67$, $c = 100$ b) $a = -15$, $b = 70$, $c = -120$

c) $a = 15$, $b = 70$, $c = 120$ d) $a = -5$, $b = 67$, $c = 100$

e) $a = 15$, $b = -70$, $c = 120$ f) $a = 5$, $b = -67$, $c = -100$

**AL 327** Câte polinoame de forma $P(X) = X^2 + aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, au proprietatea că rădăcinile lor satisfac condiţiile $x_1^3 = x_2$ şi $x_2^3 = x_1$ ?

a) niciunul b) 100 c) 4

d) 1000 e) o infinitate f) unul

**AL 328** Fie polinomul $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3$ simple. Să se determine valoarea expresiei

$$x_1P'(x_1) + x_2P'(x_2) + x_3P'(x_3).$$

a) 0 b) $9c - a^2 + 2ab$ c) $2ab - a^3 - 9c$

d) $4ab - 9c - a^3$ e) $9c + a^2 - 4ab$ f) $c - a + bc$

**AL 329** Împărţind polinomul $X^8$ la $X - 1$ se obţine câtul $q_1$ şi restul $r_1$, împărţind polinomul $q_1$ la $X - 1$ se obţine câtul $q_2$ şi restul $r_2$, iar continuând procedeul şi definind recursiv polinoamele $q_{k+1}$ şi restul $r_{k+1}$ ca fiind, respectiv, câtul şi restul împărţirii lui $q_k$ la $X - 1$, pentru orice $k \in \{1, 2, ..., 7\}$, să se determine $r_5$.

a) 1 b) 2 c) 7 d) 70 e) 100 f) 700

**AL 330** Fie $\alpha, \beta, \gamma$ soluţiile ecuaţiei $x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$. Să se determine $\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} + \sqrt[3]{\gamma}$.

a) $-3$ b) $-\frac{1}{3}$ c) 0 d) $\frac{1}{3}$ e) 3 e) 27

## PROBLEME DE TRIGONOMETRIE ŞI GEOMETRIE PLANĂ (simbol TG)

**TG 1** Să se calculeze $\sin^2 120^\circ - \cos^2 30^\circ$.

a) $-\sqrt{3}$ b) $-\sqrt{2}$ c) $-1$ d) $0$ e) $1$ f) $\sqrt{3}$

**TG 2** Fie $x \in (0, \pi)$ astfel încât $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Să se determine $\operatorname{tg} x$.

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ b) $1$ c) $\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{3}$ e) $-1$ f) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

**TG 3** Se consideră expresia $E(x) = \sin \dfrac{x}{2} + \cos x$, unde $x \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $E\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

a) $1$ b) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ e) $0$ f) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

**TG 4** Valoarea lui $a \in (0, \pi)$ pentru care $2\cos(\pi - a) - 1 = 0$ este:

a) $\dfrac{\pi}{6}$ b) $\dfrac{\pi}{3}$ c) $\dfrac{2\pi}{3}$ d) $\dfrac{5\pi}{6}$ e) $\dfrac{7\pi}{12}$ f) $\dfrac{5\pi}{12}$

**TG 5** Să se calculeze $\sin(2x)$ ştiind că $\sin x = \dfrac{1}{2}$ şi $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

a) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\dfrac{1}{2}$ d) $1$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**TG 6** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(2x)$. Dacă $f(a) = \dfrac{1}{3}$, atunci $f\left(a + \dfrac{\pi}{2}\right)$ este:

a) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ b) $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ c) $1$ d) $-1$ e) $\dfrac{2}{3}$ f) $-\dfrac{1}{3}$

**TG 7** Să se rezolve ecuaţia trigonometrică

$$\cos x = -\cos 40^\circ \ ,$$

unde $x \in (0, 360^\circ)$.

a) $x \in \{140^\circ, 220^\circ\}$ b) $x \in \{135^\circ, 200^\circ\}$ c) $x \in \{135^\circ, 315^\circ\}$
d) $x \in \{45^\circ, 315^\circ\}$ e) $x \in \{125^\circ, 320^\circ\}$ f) $x \in \{135^\circ, 345^\circ\}$

**TG 8** Se consideră următoarele propoziţii matematice:

$(i)$ $\sin 144^\circ = \cos 54^\circ$; $(ii)$ $\cos 2018^\circ = -\cos 38^\circ$;
$(iii)$ $\operatorname{tg}^2 15^\circ = \dfrac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}$; $(iv)$ $\sin^2 5^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 85^\circ = \dfrac{3}{2}$;
$(v)$ $(\operatorname{ctg} 10^\circ - \operatorname{ctg} 80^\circ)\cos 70^\circ = 2 \sin 110^\circ$.

Câte dintre afirmaţiile date sunt false?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

**TG 9** Care dintre numerele:

$a = \cos 55^\circ,\ b = \sin 155^\circ,\ c = \sin 15^\circ,\ d = \cos 170^\circ,\ e = \cos 100^\circ,\ f = \sin 106^\circ$

este cel mai aproape de zero?

a) $a$ b) $b$ c) $c$ d) $d$ e) $e$ f) $f$

**TG 10** Să se calculeze $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b$, dacă $a, b \in (0, \pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ astfel încât $\cos a + \cos b = 0$.

a) $\operatorname{tg}(a+b)+1$ b) 1 c) $2\operatorname{tg} a$ d) 0 e) $-1$ f) $2\operatorname{tg} b$

**TG 11** Dacă $\sin a = \frac{3}{5}$, $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, atunci $\cos\frac{a}{2}$ este egal cu:

a) $\frac{4}{5}$ b) $-\frac{4}{5}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ e) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ f) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

**TG 12** Fie $x$ un număr real pentru care $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2$. Să se calculeze $\operatorname{tg} x$.

a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) 1 d) $-1$ e) 3 f) $-3$

**TG 13** Să se calculeze $\cos\frac{3a}{2}$, ştiind că $\sin\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ şi $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ b) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ c) $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\frac{\sqrt{6}}{9}$ f) $\frac{\sqrt{6}}{9}$

**TG 14** Să se determine partea întreagă a numărului $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12} + \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$ .

a) $-4$ b) $-3$ c) $-1$ d) 3 e) 4 f) 5

**TG 15** Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ astfel ca $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2$. Să se calculeze $\sin x$.

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{4}$

**TG 16** Să se determine valoarea maximă a expresiei

$$E(x) = \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right) \ , \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) 2 b) $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ e) 1 f) $\frac{3}{2}$

**TG 17** Să se calculeze $\sin^8 \frac{\pi}{8} + \cos^8 \frac{\pi}{8}$ .

a) $\frac{17}{32}$ b) $\frac{3}{16}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{7}{32}$ e) $\frac{7}{16}$ f) $\frac{19}{32}$

**TG 18** Să se calculeze $\sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16}$ .

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) 1 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\sqrt{3}$

**TG 19** Fie $E(x) = \cos^6 x + \sin^6 x$ definită pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Să se determine raportul dintre valoarea maximă şi valoarea minimă a expresiei.

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) 4 e) 7 f) 8

**TG 20** Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ astfel ca $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3$. Să se calculeze $\sin x - \cos x$.

a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\frac{\sqrt{15}}{3}$ f) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

**TG 21** Să se calculeze $\cos 8x$ ştiind că $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x$.

a) $-1$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 0 d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) 1 f) $\frac{1}{2}$

**TG 22** Să se calculeze $\cos(x+2y)$ ştiind că $x = \dfrac{4\pi}{3}$ şi $\operatorname{tg} y = 2-\sqrt{3}$.

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) $-\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{1}{2}$ e) $0$ f) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**TG 23** Fie $a$ şi $b$ două numere reale astfel încât

$$\sin a + \sin b = 1 \text{ şi } \cos a + \cos b = \frac{1}{2}.$$

Să se calculeze $\cos(a-b)$.

a) $\dfrac{3}{8}$ b) $-\dfrac{3}{8}$ c) $\dfrac{1}{8}$ d) $-\dfrac{1}{8}$ e) $\dfrac{1}{2}$ f) $-\dfrac{1}{2}$

**TG 24** Fie funcţia $f(x) = \cos x - \sin x$. Să se determine cea mai mică valoare a lui $f$ pe intervalul $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$.

a) $-1$ b) $-3$ c) $-\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{2}$ e) $-\dfrac{1}{2}$ f) $-2$

**TG 25** Fie $f : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$. Să se determine imaginea funcţiei $f$.

a) $(-1, \sqrt{3}]$ b) $(-1, 2]$ c) $[-1, 2]$
d) $(-\sqrt{3}, 1]$ e) $[-1, \sqrt{3}]$ f) $(-\sqrt{3}, 1)$

**TG 26** Într-un triunghi dreptunghic $ABC$ au loc relaţiile $\cos B > \cos C$ şi $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = 6$. Să se calculeze $\sin B - \sin C$.

a) $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ b) $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ c) $-\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}$ e) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ f) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

**TG 27** Fie triunghiul $ABC$ cu $AB = 4$ şi $m(\widehat{BAC}) = 30^\circ$ astfel încât latura $(BC)$ are cea mai mică valoare posibilă. Dacă punctul $P$ este egal depărtat de laturile triunghiului, să se calculeze $AP$.

a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $2\sqrt{2}$ d) 3 e) $2\sqrt{3}$ f) 1

**TG 28** Lungimea ipotenuzei triunghiului dreptunghic în care între catete există relaţia $c - b = 1$, iar $m(\widehat{C}) - m(\widehat{B}) = 30^\circ$, este:

a) $\sqrt{3} + 1$ b) 3 c) $3\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{3} - 1$ e) $3 + \sqrt{3}$ f) $2\sqrt{3}$

**TG 29** Fie triunghiul $ABC$ de laturi $a, b, c$ cu $b = 5$, $c = 8$ şi $\cos A = \dfrac{1}{4}$. Să se afle $a$.

a) $\sqrt{69}$ b) $\sqrt{109}$ c) $\sqrt{89}$ d) 89 e) 109 f) 69

**TG 30** Fie triunghiul $PQR$ cu $PQ = 4$, $QR = 5$ şi $RP = 7$. Să se determine $\cos(\widehat{PQR})$.

a) $\dfrac{29}{35}$ b) $-\dfrac{1}{5}$ c) $\dfrac{1}{7}$ d) $\dfrac{4}{7}$ e) $\dfrac{5}{7}$ f) $-\dfrac{4}{7}$

**TG 31** În triunghiul $ABC$, $AB = 4\sqrt{3}$, $AC = 4$, $\sin C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Să se calculeze $\sin B$.

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\dfrac{1}{3}$ f) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

**TG 32** Aria triunghiului $ABC$ este $10\ m^2$. Să se determine $AB$ ştiind că $AC = 4\ m$ şi unghiul $\widehat{BAC}$ are $30^\circ$.

a) $\dfrac{10}{3}\ m$ b) $5\ m$ c) $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}\ m$ d) $10\ m$ e) $20\ m$ f) $8\ m$

**TG 33** Într-un cerc cu raza de 4 $cm$ se înscrie un triunghi $ABC$ ce are unghiul $\widehat{ABC}$ de 30°. Să se determine lungimea laturii $[AC]$.

a) 2 $cm$ b) 3 $cm$ c) 4 $cm$ d) $4\sqrt{3}$ $cm$ e) $3\sqrt{3}$ $cm$ f) $2\sqrt{3}$ $cm$

**TG 34** Fie triunghiul $ABC$ cu $AB = 2\sqrt{3}$, $AC = 6$ şi $\operatorname{tg} A = -\sqrt{2}$. Să se determine $BC$.

a) $6\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{6}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{6}$ f) $6\sqrt{3}$

**TG 35** Fie triunghiul $ABC$ cu $AB = 3$, $BC = 8$, $CA = 7$ şi punctul $P \in (BC)$ astfel încât $BP = 6$. Să se calculeze $AP$.

a) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ b) $\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ c) $3\sqrt{3}$ d) 5 e) $3\sqrt{7}$ f) $4\sqrt{3}$

**TG 36** Triunghiul ascuţitunghic $ABC$ are $AB = 6$, $AC = 8$ şi aria egală cu $16\sqrt{2}$. Să se determine $\sin C$.

a) $\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$ b) $\dfrac{4\sqrt{39}}{39}$ c) $\dfrac{2\sqrt{42}}{21}$ d) $\dfrac{4\sqrt{37}}{37}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{17}$ f) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**TG 37** Un triunghi are aria $2\sqrt{3}$, perimetrul 12 şi un unghi de 60°. Să se afle lungimea razei cercului circumscris triunghiului.

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ e) $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ f) $2\sqrt{3}$

**TG 38** Se consideră punctele $A, B, C$ astfel încât $AB = 5$, $AC = 8$ şi $m(\widehat{BAC}) = 60°$. Să se calculeze lungimea minimă pe care o poate avea un segment $[AP]$ atunci când $P$ este un punct variabil pe dreapta $BC$.

a) 5 b) $7 - \sqrt{3}$ c) $\dfrac{20}{7}$ d) $\dfrac{20\sqrt{3}}{7}$ e) $\dfrac{20}{\sqrt{89} + 40\sqrt{3}}$ f) 4

**TG 39** În triunghiul $ABC$ de arie $3\sqrt{15}$, suma pătratelor lungimilor laturilor este egală cu 116. Să se calculeze $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C$.

a) $\frac{29\sqrt{15}}{45}$ b) $\frac{29\sqrt{5}}{3}$ c) $\frac{29\sqrt{3}}{5}$ d) $\frac{3\sqrt{29}}{5}$ e) $\frac{29\sqrt{5}}{45}$ f) $\frac{5\sqrt{29}}{3}$

**TG 40** Se consideră triunghiul $ABC$ cu $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{2}$ şi $m(\widehat{A}) = \frac{\pi}{3}$. Să se determine lungimea bisectoarei $(AD), D \in (BC)$, a unghiului $\widehat{BAC}$.

a) $3 - \sqrt{6}$ b) $\sqrt{2} - 6$ c) $\sqrt{6} - 2$
d) $3\sqrt{6} - 6$ e) $\sqrt{6} - 6$ f) $3\sqrt{6} - 3$

**TG 41** Se consideră triunghiul $ABC$ cu perimetrul

$$\mathcal{P} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$$

şi măsurile unghiurilor direct proporţionale cu numerele 3, 4, 5. Să se afle aria triunghiului $ABC$ .

a) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ b) $\sqrt{6} + 3$ c) $\sqrt{3} + 3$
d) $4\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{3} + 3$ f) $6 + \sqrt{2}$

**TG 42** Se consideră triunghiul $ABC$ de laturi $a, b, c$, în care $m(\widehat{C}) = \frac{3\pi}{8}$, iar $m(\widehat{B}) = \frac{\pi}{8}$. Să se calculeze $E = 4\frac{c^2}{a^2} - \frac{b}{c}$ .

a) $\sqrt{2}$ b) 3 c) $\sqrt{2} + 3$ d) 4 e) $3\sqrt{3} + 3$ f) $\sqrt{2} - 1$

**TG 43** Triunghiul $ABC$ are o latură de 9 cm şi perimetrul de 50 $cm$. Să se calculeze aria maximă pe care o poate avea triunghiul.

a) 90 $cm^2$ b) 120 $cm^2$ c) $120\sqrt{2}$ $cm^2$
d) 200 $cm^2$ e) 400 $cm^2$ f) $300\sqrt{2}$ $cm^2$

**TG 44** În triunghiul $ABC$, $AB = 2\sqrt{3}BC$ şi $m(\widehat{C}) = m(\widehat{A}) + 30^\circ$. Să se calculeze $\sin B$.

a) 1 b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{11}{14}$ f) $\frac{2}{3}$

**TG 45** Fie $G$ centrul de greutate al triunghiului echilateral $ABC$ ce are aria egală cu 18. Se notează cu $\mathcal{M}_G$ mulţimea punctelor din interiorul triunghiului situate mai aproape de $G$ decât de oricare dintre vârfurile triunghiului. Să se calculeze aria mulţimii $\mathcal{M}_G$.

a) 6 b) $6\sqrt{3}$ c) 9 d) $9\sqrt{3}$ e) 12 f) 15

**TG 46** Fie triunghiul $ABC$ cu $CA = 2\cos 15^\circ \cdot BC$ şi $m(A) = m(B) - 15^\circ$. Să se determine $\cos C$.

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $-\frac{1}{2}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**TG 47** Triunghiul obtuzunghic $ABC$ are laturile $AC = 3$ şi $BC = 7$, iar aria sa este egală cu $4\sqrt{5}$. Să se determine $\sin B$.

a) $\frac{2}{7}$ , $\frac{4\sqrt{5}}{21}$ b) $\frac{4}{7}$ , $\frac{2\sqrt{5}}{21}$ c) $\frac{2}{3}$ , $\frac{4}{7}$

d) $\frac{4}{21}$ , $\frac{\sqrt{5}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ , $\frac{2\sqrt{5}}{7}$ f) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , $\frac{8\sqrt{5}}{7}$

**TG 48** Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ cu $AD \cap BE = \{O\}$. Se consideră afirmaţiile:

*(i)* $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{0}$; *(ii)* $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$;

*(iii)* $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{0}$; *(iv)* $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{FA}$;

*(v)* $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{0}$; *(vi)* $\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Câte dintre afirmaţiile de mai sus sunt corecte?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6 f) 1

**TG 49** Asupra unui corp punctiform acţionează două forţe cu aceeaşi origine, una de $8N$ şi cealaltă de $7N$. Să se calculeze mărimea forţei rezultante, ştiind că unghiul dintre cele două forţe este de $60°$.

a) $13N$ b) $\sqrt{41}N$ c) $\sqrt{111}N$
d) $15N$ e) $\sqrt{113+56\sqrt{3}}N$ f) $14N$

**TG 50** În triunghiul echilateral $ABC$ de latură 3, punctele $P$ şi $Q$ împart latură $(BC)$ în trei părţi egale. Dacă $G$ este centrul de greutate al triunghiului $ABC$, să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GQ}$.

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) 2 d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e) $2\sqrt{3}$ f) $3\sqrt{3}$

**TG 51** În pătratul $ABCD$ cu latura de 6, punctele $M$ şi $N$ aparţin laturii $(BC)$ astfel încât $\frac{BM}{MC}=\frac{BN}{BC}=\frac{1}{2}$. Să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$.

a) 12 b) $4\sqrt{10}$ c) $\frac{25}{2}$ d) 13 e) $8\sqrt{3}$ f) $9\sqrt{2}$

**TG 52** Fie $M$ mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului $ABC$. Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ fie respectiv punctele $D$ şi $E$ astfel ca $AB=3\cdot AD$ şi $AC=2\cdot AE$, iar $\{F\}=AM\cap DE$. Să se determine valoarea parametrului real $k$ pentru care

$$k\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.$$

a) 1 b) 2 c) 5 d) 0 e) $-1$ f) 4

**TG 53** Fie $G$ centrul de greutate al triunghiului neechilateral $ABC$, iar $H$ ortocentrul său. Să se determine valoarea parametrului real $k$ pentru care

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = k \cdot \overrightarrow{HG}.$$

a) 1 b) 2 c) 5 d) 3 e) $-1$ f) $-3$

**TG 54** În sistemul cartezian de axe de coordonate se consideră punctele $O(0,0)$, $A(6,0)$, $B(6,4)$ şi $M$ mijlocul segmentului $[AB]$. Dacă $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j}$, atunci $a + b$ este:

a) 8 b) 10 c) 4 d) 7 e) 9 f) 6

**TG 55** Fie vectorii $\vec{u} = \vec{i} + (a+1)\vec{j}, \vec{v} = -b\vec{i} + 4\vec{j}, \vec{w} = (2a+4)\vec{i} - 4b\vec{j}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Dacă $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$, calculaţi $a - b$.

a) $-2$ b) $-1$ c) 0 d) 1 e) 2 f) 3

**TG 56** Se consideră vectorii coliniari $\vec{u} = -b\vec{i} + (a+1)\vec{j}$, $\vec{v} = -2\vec{i} - 2b\vec{j}$ şi $\vec{w} = (2a+2)\vec{i} + 2\vec{j}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Calculaţi $a + b$.

a) 2 sau 3 b) $-2$ sau 1 c) 4
d) $-3$ sau 0 e) $-4$ f) 3

**TG 57** Se consideră vectorii $\overrightarrow{PA} = 4\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$, respectiv $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{i} + a\overrightarrow{j}$, $a \in \mathbb{R}$. Să se determine valoarea lui $a$ pentru care punctele $A, B, C$ sunt coliniare.

a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) $\frac{5}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) 1 f) 3

**TG 58** Să se calculeze perimetrul triunghiului $ABC$, ştiind că $M(1,1)$, $N(5,-1)$, $P(3,5)$ sunt mijloacele laturilor sale.

a) $4\sqrt{5}$ b) $12\sqrt{5}$ c) $8\sqrt{5}+4\sqrt{10}$

d) 30 e) $8\sqrt{5}+12$ f) $6\sqrt{5}+14$

**TG 59** Fie triunghiul $ABC$ cu $A(1,3)$, $B(-2,-4)$, $C(5,-1)$ şi dreapta $d$ de ecuaţie $x-y-2=0$. Atunci:

a) $A \in d$ b) $d \perp BC$ c) $d \cap [AB] = \emptyset$

d) $d$ este bisectoarea unghiului $ABC$ e) $d \| BC$

f) niciunul dintre răspunsurile anterioare nu este adevărat

**TG 60** Fie punctele $A(1,1)$, $B(2,\frac{1}{2})$, $C(-1,-4)$, $D(\frac{5}{2},3)$, $P(a,b)$, unde $a,b \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $a \cdot b$ ştiind că punctele $A,B,P$, respectiv $C,D,P$ sunt coliniare.

a) $\frac{28}{25}$ b) $\frac{10}{9}$ c) $\frac{21}{16}$ d) $\frac{11}{10}$ e) 1 f) 2

**TG 61** Se dau punctele $A(2,3), B(-1,2)$ şi $C(3,6)$. Fie $y=mx+n$ ecuaţia medianei dusă din $A$ în triunghiul $ABC$. Să se calculeze $m+n$.

a) 6 b) 4 c) $-6$ d) $-4$ e) 3 f) $-3$

**TG 62** Punctul $P(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3})$, situat pe cercul trigonometric, se roteşte în sens trigonometric în jurul originii cu 90°. Fie $(a,b)$ coordonatele sale după rotire. Să se calculeze $\log_4 \left|\frac{a}{b}\right|$.

a) $-\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{4}-\log_2 3$ c) $\log_2 3-\frac{3}{4}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\log_4 3$ f) $\log_2 3$

**TG 63** Se dă triunghiul $ABC$ cu $A(-1,3)$, $B(-2,-4)$, $C(2,6)$. Să se calculeze distanţa de la punctul $O(0,0)$ la punctul de intersecţie dintre dreapta suport a medianei din $A$ cu dreapta suport a înălţimii din $B$.

a) $2\sqrt{65}$ b) $\sqrt{218}$ c) $3\sqrt{34}$ d) 16 e) $8\sqrt{5}$ f) $8\sqrt{6}$

**TG 64** Pornind din punctul $A$ de coordonate $(6,-1)$, un punct mobil notat $P$ se îndepărtează cu viteză constantă de acesta, echidistant faţă de dreapta $d: x+2y+2=0$, traversând primul cadran. Să se calculeze distanţa parcursă de $P$ între cele două axe de coordonate.

a) $\frac{9}{2}$ b) $2\sqrt{5}$ c) 4 d) $\frac{\sqrt{89}}{2}$ e) $3\sqrt{2}$ f) $2\sqrt{6}$

**TG 65** Se consideră punctele $A(-1,0)$, $B(2,3)$, $C(-3,-4)$, $D(4,3)$. Pe dreapta $CD$ se alege punctul $P$ astfel ca $m(\widehat{APC}) = m(\widehat{BPD})$. Să se calculeze distanţa de la $P$ la originea sistemului de axe de coordonate.

a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{8}{5}$ c) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ f) $\frac{5}{3}$

**TG 66** Să se calculeze distanţa dintre dreptele paralele $d_1: 3x+4y-10=0$ şi $d_2: y=mx+5$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) 1 b) $\frac{3}{2}$ c) 2 d) $\frac{5}{2}$ e) 3 f) $2\sqrt{2}$

**TG 67** Fie punctele $A(0,4)$ şi $B(4,0)$. Punctul $C(a,b)$ aparţine segmentului $[AB]$ astfel ca $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$. Să se calculeze $a-b$.

a) $\frac{3}{4}$ b) $4\sqrt{5}-8$ c) $\frac{4}{3}$ d) 1 e) $2\sqrt{2}-2$ f) $2\sqrt{5}-4$

**TG 68** Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \| CD$, $DA \perp AB$, $AB=6$, $AD=CD=3$. Dacă $M$ este mijlocul lui $(AB)$ şi $N \in (DC)$ cu $CN=1$, la ce distanţă de $A$ se intersectează dreptele $MN$ şi $BC$ ?

a) $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ b) $\frac{9}{2}$ c) $2\sqrt{5}$ d) $\frac{24}{5}$ e) $\frac{47}{10}$ f) 5

**TG 69** Prin simetricul punctului $A(-2,3)$ faţă de punctul $B(1,2)$ se duce o dreaptă $d$ paralelă cu prima bisectoare. Să se calculeze distanţa de la punctul $A$ la dreapta $d$.

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{2}$ d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ e) $4\sqrt{2}$ f) 5

**TG 70** Fiecărui număr natural $n$ i se asociază punctul $P_n$ de coordonate $\left(\cos\frac{n\pi}{3}, \sin\frac{n\pi}{3}\right)$. Câte drepte ce conţin cel puţin două din punctele considerate pot fi construite?

a) 3 b) 6 c) 15 d) 30 e) 45 f) o infinitate

**TG 71** Fie $O(0,0)$, $A(-1,4)$, $B(5,1)$. Să se afle coordonatele punctului $C$ astfel ca simetricul lui faţă de dreapta $AB$ să fie centrul de greutate al triunghiului $AOB$.

a) $\left(\frac{34}{15}, \frac{53}{15}\right)$ b) $(2,3)$ c) $\left(\frac{11}{5}, \frac{18}{5}\right)$

d) $\left(\frac{7}{3}, \frac{11}{3}\right)$ e) $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ f) $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

**TG 72** Un punct din primul cadran situat pe o dreaptă $d$ se numeşte *bine plasat* dacă distanţa de la el la origine este un număr natural. Câte puncte *bine plasate* conţine dreapta $d : 2x + y - 4\sqrt{2} = 0$ ?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

**TG 73** Fie $P$ punctul egal depărtat de laturile triunghiului $ABC$, unde $A(1,1)$, $B(4,5)$ şi $C(5,4)$. Să se calculeze distanţa de la $P$ la dreapta $AB$.

a) $\frac{4}{7}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{10+\sqrt{2}}{7}$ d) $\frac{10+\sqrt{2}}{14}$ e) $\frac{10-\sqrt{2}}{14}$ f) $\frac{2}{3}$

**TG 74** Fie $A(2,0), B(0,4)$ şi $C(5,a)$ astfel încât triunghiul $ABC$ este isoscel de bază $AB$. Dacă $O(x_o, y_o)$ este centrul cercului circumscris triunghiului $ABC$, să se determine $x_o - y_o$.

a) $-1$ b) $-\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{4}{5}$ e) $1$ f) $0$

**TG 75** Fie punctele $A(1,3), B(3,5)$ şi $C(c,c)$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0,3\}$. Dacă $\{P\} = CA \cap Ox$, $\{Q\} = CB \cap Oy$, să se determine coeficientul unghiular al dreptei $PQ$.

a) $1$ b) $2$ c) $-\frac{9}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $-1$ f) $c$

**TG 76** Fie $A(3,0), B(0,3)$ şi fie $C(a,b)$ pe dreapta $x + y = 8$ astfel încât triunghiul $ABC$ este isoscel de bază $AB$. Dacă $H(x_0, y_0)$ este ortocentrul triunghiului $ABC$, să se determine $x_0 + y_0$.

a) $\frac{24}{5}$ b) $\frac{16}{7}$ c) $\frac{17}{3}$ d) $\frac{12}{5}$ e) $6$ f) $4$

**TG 77** Fie $A$ un punct variabil pe dreapta $y = x+1$, iar $B$ proiecţia lui $A$ pe dreapta de ecuaţie $x = 3$. Atunci mijlocul segmentului $(AB)$ aparţine dreptei:

a) $x = y$ b) $y = 2x$ c) $x + y = 1$

d) $y = 2x - 2$ e) $x + y = 2$ f) $y = x + 1$

**TG 78** Pe laturile $AB$, $BC, CA$ ale triunghiului de vârfuri $A(4,0), B(3,0)$ şi $C(1,4)$, se consideră respectiv punctele $M, N, P$ astfel încât

$$\frac{MA}{MB} = 3\,, \quad \frac{NB}{NC} = 2\,, \quad \frac{PC}{PA} = \frac{1}{6}\,.$$

Să se studieze dacă dreptele $AN, BP$ şi $CM$ sunt concurente şi în caz afirmativ să se găsească coordonatele punctului de concurenţă.

a) nu sunt concurente b) $\left(\frac{19}{10}, \frac{12}{5}\right)$ c) $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$

d) $\left(\frac{10}{7}, \frac{24}{7}\right)$ e) $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$ f) $\left(2, \frac{10}{3}\right)$

**TG 79** Pe laturile $AB$ şi $BC$ ale triunghiului de vârfuri $A(3,0), B(0,4)$ şi $C(2,5)$ se consideră respectiv punctele $M$, şi $N$ astfel încât

$$\frac{MA}{MB} = a, \quad \frac{NB}{NC} = b, \quad a, b > 0.$$

Pentru ce valori ale lui $a$ şi $b$ distanţele de la punctul $I$, de intersecţie a dreptelor $AN$ şi $CM$, la cele trei laturi ale triunghiului $ABC$ sunt egale între ele?

a) $a = 2\sqrt{5}$, $b = 1$ b) $a = \frac{\sqrt{130}}{5}$, $b = \frac{5\sqrt{26}}{26}$ c) $a = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $b = 1$

d) $a = 2$, $b = 2$ e) $a = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $b = 2$ f) $a = \sqrt{5}$, $b = 1$

**TG 80** Simetrica dreptei $d : y = 2 - x$ faţă de punctul $A(2, -3)$ intersectează axele de coordonate în punctele $P$ şi $Q$. Să se calculeze aria triunghiului $POQ$.

a) 8 b) 16 c) 6 d) 4 e) 10 f) 9

**TG 81** Se consideră punctele $A(1,0)$ şi $C(3,1)$. Dacă $(AC)$ este o diagonală a pătratului $ABCD$, să se afle coordonatele vârfurilor $B$ şi $D$.

a) $\left(\frac{12}{5}, -\frac{3}{5}\right), \left(\frac{7}{5}, \frac{7}{5}\right)$ b) $\left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$ c) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

d) $\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ e) $\left(\frac{13}{5}, -\frac{11}{20}\right), \left(\frac{8}{5}, \frac{29}{20}\right)$ f) $(2, -1), (1, 1)$

**TG 82** Se consideră dreptele concurente $d_1 : x+2y-9 = 0$, $d_2 : x-2y+3 = 0$ şi $d_3 : 2x + ay - 3 = 0$, $a \in \mathbb{R}$. O dreaptă $d$ ce trece prin punctul $O(0,0)$ intersectează dreptele $d_1, d_2, d_3$ respectiv în punctele distincte $A, B, C$. Să se afle panta dreptei $d$ astfel ca $(AB) \equiv (BC)$.

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $-\frac{1}{2};\ 1$ d) $-\frac{11}{2}$ e) $-1$ f) $-\frac{11}{2};\ 1$

**TG 83** Se dau punctele $A(4,0)$ şi $B(0,2)$. Fie $M$, $N$ proiecţiile punctului $P$, mijlocul segmentului $(AB)$, pe $Ox$, respectiv $Oy$. Dacă $Q$ este punctul de intersecţie al perpendicularei în $B$ pe dreapta $AB$ cu dreapta $MP$, iar $R$ punctul de intersecţie al perpendicularei în $A$ pe $AB$ cu dreapta $NP$, să se calculeze aria patrulaterului $ABQR$.

a) $\frac{25}{2}$ b) $\frac{23}{2}$ c) 10 d) $\frac{5}{2}$ e) 25 f) 27

**TG 84** Prin punctul $A$ de intersecţie al dreptelor

$$d_1 : x + y - 2 = 0 \quad \text{şi} \quad d_2 : 2x - y - 4 = 0$$

se duce o dreaptă $d$ paralelă cu prima bisectoare. Fie $P$ un punct oarecare al dreptei $d$, diferit de $A$. Să se arate că raportul distanţelor de la $P$ la $d_1$, respectiv la $d_2$ este constant şi să se determine valoarea lui.

a) $\frac{10}{3}$ b) 3 c) $\frac{13}{4}$ d) $\sqrt{10}$ e) $2\sqrt{5}$ f) $2\sqrt{3}$

**TG 85** Fie punctele $A(2,1), B(6,1), C(4,5)$ şi mulţimea $\mathcal{M}_A$ a punctelor din primul cadran situate mai aproape de $A$ decât de celelalte două puncte date. Să se calculeze aria mulţimii $\mathcal{M}_A$.

a) 12 b) 13 c) 14 d) $\frac{23}{2}$ e) $\frac{25}{2}$ f) $\frac{31}{2}$

**TG 86** Prin simetricul punctului $A\,(4,2)$ faţă de punctul $B\,(-1,1)$ se construieşte o dreaptă $d$ de pantă $\frac{3}{2}$. Perpendiculara în $A$ pe dreapta $AB$ intersectează $d$ în punctul $C$. Să calculeze aria triunghiului $ABC$.

a) $\frac{49}{2}$ b) 13 c) 26 d) $\frac{39}{2}$ e) 36 f) $\frac{13}{2}$

**TG 87** Mulţimea punctelor $P(x, y)$ aflate la distanţa $r$ de punctul $Q(a, b)$ formează cercul de centru $Q$ şi rază $r$. Să se determine ecuaţia ce descrie acest cerc.

a) $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ b) $x^2+y^2-2ax-2ay-r^2=0$
c) $(x+a)^2+(y+b)^2=r^2$ d) $x^2+y^2+a^2+b^2-r^2=0$
e) $(x-a)^2+(y-b)^2=r$ f) $x^2+y^2+2ax+2ay+a^2+b^2-r^2=0$

**TG 88** Se consideră punctele $A(3,0)$ şi $B(0,4)$. Fie punctul $Q$ situat în interiorul triunghiului $OAB$ aflat la distanţa $r$ de fiecare latură a acestuia. Să se determine care din următoarele ecuaţii este verificată de toate punctele $P(x, y)$ ce se află la distanţa $r$ de punctul $Q$.

a) $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ b) $x^2+y^2-x-y-\frac{1}{2}=0$
c) $x^2+y^2-2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y+3=0$ d) $x^2-y^2-2x-2y=0$
e) $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ f) $x^2+y^2-2x-2y-1=0$

**TG 89** Să se determine $m \in (0, \sqrt{10})$ pentru care există punctele $N$ şi $P$ situate în primul cadran astfel încât $ON = OP = \sqrt{10}$ şi $MNPQ$ este pătrat, unde $M(m, 0)$ şi $Q(0, m)$.

a) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ b) 1 c) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ d) $\sqrt{2}$ e) 2 f) $\sqrt{5}$

**TG 90** Se consideră punctul $Q\,(1,0)$ şi cercul de ecuaţie

$$(x-5)^2+(y-3)^2=100\ .$$

Dacă punctul $P_0\,(x_0, y_0)$ este situat pe cerc la distanţa maximă de $Q$ să se calculeze $x_0 + y_0$.

a) 12 b) 0 c) 14 d) 16 e) 24 f) 22

# PROBLEME DE ANALIZĂ MATEMATICĂ (simbol AM)

**AM 1** Fie şirurile $(x_n)_{n\geq 2}, (y_n)_{n\geq 1}, (z_n)_{n\geq 9}, (w_n)_{n\geq 0}$ cu termenii generali

$$x_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{2^{2n}}, y_n = \frac{n + (-1)^n}{n^2}, z_n = \frac{\sqrt{n!} + (-1)^n}{n!}, w_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{2^{2n}}.$$

Atunci

a) $(x_n)$ este descrescător; $(y_n)$ nu este monoton; $(z_n)$ nu este monoton; $(w_n)$ nu este monoton

b) $(x_n)$ nu este monoton; $(y_n)$ nu este monoton; $(z_n)$ este descrescător; $(w_n)$ este descrescător

c) $(x_n)$ nu este monoton; $(y_n)$ nu este monoton; $(z_n)$ nu este monoton; $(w_n)$ nu este monoton

d) $(x_n)$ este descrescător; $(y_n)$ este crescător; $(z_n)$ nu este monoton; $(w_n)$ estedescrescător

e) $(x_n)$ este descrescător; $(y_n)$ este descrescător; $(z_n)$ nu este monoton; $(w_n)$ nu este monoton

f) $(x_n)$, descrescător; $(y_n)$, nu este monoton; $(z_n)$, descrescător; $(w_n)$, nu este monoton

**AM 2** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n!}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + n^{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

a) 1 b) 2 c) $\infty$ d) 0 e) $\frac{1}{10}$ f) nu există

**AM 3** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} 7^n \sin\dfrac{n!\pi}{49}$.

a) $\dfrac{1}{7}$ b) $0$ c) $\dfrac{\pi}{7}$ d) $7$ e) $\dfrac{1}{49}$ f) nu există

**AM 4** Se considera limitele $L_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{3n+5}-\sqrt{3n-5}\right)}$,
$L_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{4n+5}-\sqrt{3n-5}\right)}$ şi $L_3 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{3n^2+5}-\sqrt{3n^2-5}\right)}$.
Atunci

a) $L_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, L_2 = \dfrac{1}{2}, L_3 = \infty$ b) $L_1 = 0, L_2 = 0, L_3 = 0$

c) $L_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{5}, L_2 = 0, L_3 = 0$ d) $L_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, L_2 = \infty, L_3 = \infty$

e) $L_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{5}, L_2 = 0, L_3 = \infty$ f) $L_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{5}, L_2 = \dfrac{1}{2}, L_3 = 0$

**AM 5** Să se determine parametrii reali $a$ şi $b$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{8n^3+bn^2+a}-an+b\right) = 13.$$

a) $a=-2, b=12$ b) $a=2, b=12$ c) $a=2, b=10$
d) $a=2, b=8$ e) $a=-2, b=13$ f) $a=2, b=6$

**AM 6** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}-1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.

a) $\infty$ b) $1$ c) $0$ d) $\dfrac{1}{e}$ e) $\dfrac{1}{2}$ f) nu există

**AM 7** Fie $x_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n+\frac{k}{n}}, n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) $1-\ln 2$ d) 1 e) 2 f) $\infty$

**AM 8** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k\,(k+2)}{n^3+k^2}$.

a) 2 b) 1 c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\infty$

**AM 9** Fie $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{k}j^2\right),n\in\mathbb{N}^*$. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{n^4}.$$

a) 1 b) $e$ c) $e^3$ d) $e^4$ e) $e^{12}$ f) $\infty$

**AM 10** Să se calculeze limita şirului cu termenul general $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{3k-1}{3^k\cdot k!}$.

a) 0 b) 1 c) 3 d) $\ln 3$ e) 2 f) $\infty$

**AM 11** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{25k^2-15k-4}$.

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{25}$ c) 0 d) 5 e) $\frac{4}{25}$ f) 15

**AM 12** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{6k+1}{4^k}$.

a) $\infty$ b) 7 c) 6 d) $\frac{3}{2}$ e) 0 f) 3

**AM 13** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}\arctan\dfrac{2}{(k-1)^2}$.

a) $\pi$ b) $\dfrac{\pi}{2}$ c) $L=\infty$ d) $\dfrac{3\pi}{4}$ e) $\dfrac{\pi}{4}$ f) nu există

**AM 14** Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n^1+2(n-1)C_n^2+3(n-1)^2C_n^3+\ldots+n(n-1)^{n-1}C_n^n}{1+nC_n^1+n^2C_n^2+\ldots+n^nC_n^n}.$$

a) 0 b) $\dfrac{1}{e}$ c) 1 d) $e$ e) $e+1$ f) $\infty$

**AM 15** Să se calculeze limita şirului cu termenul general

$$x_n=\frac{1+\sqrt[3]{2}+\ldots+\sqrt[3]{n}}{n\sqrt[3]{n}},n\in\mathbb{N}^*.$$

a) 0 b) 1 c) $\dfrac{3}{4}$ d) $\ln 3$ e) $\dfrac{1}{2}$ f) $\infty$

**AM 16** Fie limitele

$$L_1=\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi n+(-1)^{n+1}}{4n}\right)\quad\text{şi}\quad L_2=\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi n^2+(-1)^n}{4n^2}\right).$$

Atunci

a) $L_1=L_2=1$
b) $L_1=\dfrac{1}{4}$ şi $L_2$ nu există
c) $L_1=\dfrac{1}{4},L_2=1$
d) $L_1$ nu există şi $L_2=1$
e) $L_1=L_2=\dfrac{1}{4}$
f) $L_1$ şi $L_2$ nu există

**AM 17** Fie şirul $(x_n)$ definit prin $x_1 = 3$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2, n \geq 1$. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) 3 f) $\infty$

**AM 18** Fie şirul $(x_n)$ definit prin $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}, n \geq 1$. Atunci:

a) şirul este crescător şi mărginit
b) şirul este crescător şi are limita $\infty$
c) şirul este crescător şi are limita $\sqrt{2}$
d) şirul este descrescător şi nemărginit
e) şirul este descrescător şi are limita $\sqrt{2}$
f) şirul este mărginit şi nemonoton

**AM 19** Fie şirul $(x_n)$ definit prin $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}, n \geq 1$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

a) 0 b) $\frac{1}{e}$ c) 1 d) $e$ e) $e+1$ f) $\infty$

**AM 20** Să se calculeze $\lim_{x\to 1} \frac{x^{10} - 1}{x - 1}$.

a) 10 b) $-9$ c) 1 d) $-1$ e) 11 f) 9

**AM 21** Să se calculeze $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 - \ln(x^2 + 1)}{x^2}$ .

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) $-1$ f) $-\frac{1}{2}$

**AM 22** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^x - 2^x}{2^x - 4}$ .

a) $-1$ b) $1$ c) $\ln 2$ d) $\dfrac{1}{\ln 2}$ e) $\ln\sqrt{2}$ f) $e$

**AM 23** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\left(e^{12x}+1\right)}{\ln\left(1+e^{3x}\right)}$ .

a) $4$ b) $3$ c) $12$ d) $e^3$ e) $+\infty$ f) $1$

**AM 24** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\sqrt{\operatorname{tg} x}}{2-\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^3 x}$ .

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $0$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) $1$ e) $\dfrac{1}{8}$ f) $-\dfrac{1}{2}$

**AM 25** Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+\pi}{x-\pi}\right)^x$.

a) $e^{2\pi}$ b) $e^2$ c) $e^{\pi}$ d) $\pi^2$ e) $\pi$ f) $e$

**AM 26** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)-\cos x+e^{x^2}}{10x^2}$ .

a) $\dfrac{3}{2}$ b) $\dfrac{1}{10}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) $\dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{5}{2}$ f) $\dfrac{5}{4}$

**AM 27** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=e^x(\sin x-\cos x)$. Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) $-\infty$ b) $0$ c) $+\infty$ d) $-1$ e) $1$ f) nu există

**AM 28** Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{\pi})^{\frac{1}{x}}$ şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 1 b) $+\infty$ c) $\pi$ d) $\sqrt{\pi}$ e) 0 f) nu există

**AM 29** Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to\infty} x^4\left(e^{\frac{1}{x^2+1}}-e^{\frac{1}{x^2}}\right)$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 0 b) 1 c) $-1$ d) 2 e) nu există f) $2e$

**AM 30** Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\frac{x}{4}\right]}{x}$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 0 b) 4 c) $\frac{1}{4}$ d) 1 e) nu există f) 2

**AM 31** Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-x\ln(e^x+1))$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) $+\infty$ b) 0 c) 1 d) $-\infty$ e) $-1$ f) nu există

**AM 32** Să se calculeze

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4+1}{x^2+2}\ln\frac{x^2+1}{x^2}\right).$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) $e$ e) 3 f) $\infty$

**AM 33** Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{x^3}{6}-\sin x\right)$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) $-1$ b) $-\frac{1}{6}$ c) $0$ d) nu există e) $+\infty$ f) $-\infty$

**AM 34** Să se determine valoarea parametrului real $a$ pentru care

$$\lim_{x\to\infty}\left(\ln(e^x+a)-x\right)(e^x+x)=1.$$

a) $e^{-1}$ b) $0$ c) $1$ d) $e$ e) $-1$ f) $-e$

**AM 35** Să se determine mulţimea tuturor valorilor posibile ale parametrului $a\geq 0$ pentru care limita

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{\operatorname{tg} x}-e^{\sin x}}{x^a}$$

există şi este un număr real nenul.

a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\{3\}$ d) $(2,+\infty)$ e) $(0,2)$ f) $\{0,\,3\}$

**AM 36** Să se calculeze

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+5}{x^2-1}\right)^x.$$

a) $e$ b) $e^3$ c) $e^{-2}$ d) $e^2$ e) $1$ f) $+\infty$

**AM 37** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$. Să se calculeze

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(e^x)\right)^{\frac{1}{x}}.$$

a) 0 b) 1 c) $\frac{1}{e}$ d) $e$ e) $e^2$ f) $\frac{1}{e^2}$

**AM 38** Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{e^x - 1}$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 0 b) nu există c) 1 d) $+\infty$ e) 3 f) 2

**AM 39** Fie funcţia $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}(2 - \{x\})^2$, unde $\{x\}$ este partea fracţionară a lui $x$. Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 0 b) 1 c) nu există d) $-1$ e) 2 f) $\frac{3}{2}$

**AM 40** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x^{\operatorname{tg} x}$.

a) 0 b) 1 c) $-1$ d) $+\infty$ e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**AM 41** Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Să se calculeze

$$\lim_{x\to 1} \frac{x + x^2 + \ldots + x^n - n}{x - 1} .$$

a) 0 b) 1 c) $n(n + 1)$

d) $\frac{n(n+1)}{2}$ e) $n + 1$ f) $n$

**AM 42** Să se determine parametrul real $a > 0$ astfel încât

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = 32.$$

a) 0 b) 2 c) 4 d) 1 e) 16 f) 8

**AM 43** Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{9^x - 1}{|x|}$ şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 1 b) $-1$ c) 0 d) $\ln 9$ e) $-\ln 9$ f) nu există

**AM 44** Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze

$$\lim_{x \to 0} \frac{n - (\cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x)}{\sin^2 x} .$$

.

a) 0 b) 1 c) $\dfrac{n(n+1)}{2}$ d) $+\infty$ e) $\dfrac{n}{2}$ f) $\dfrac{n(n+1)}{4}$

**AM 45** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x > 5}} (26 - 5x)^{\frac{1}{x-5}}$.

a) 1 b) $e^{-5}$ c) 0 d) $e$ e) $e^5$ f) $e^{-1}$

**AM 46** Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left[ \frac{1}{\ln x} \right],$$

unde $[x]$ este partea întreagă a lui $x$, iar în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 0 b) 1 c) $-\infty$ d) $-1$ e) $+\infty$ f) nu există

**AM 47** Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{\ln|x|}\right\},$$

unde $\{t\}$ este partea fracţionară a lui $t$, iar în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $0$ d) $1$ e) $\frac{1}{e}$ f) $\frac{2}{e}$

**AM 48** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{xe^{-\frac{1}{x}}}{\operatorname{tg}^2 x}$.

a) $+\infty$ b) $\frac{1}{e}$ c) $1$ d) $0$ e) $e$ f) $-1$

**AM 49** Fie $a>0$ fixat. Să se calculeze

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

a) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}\,a}$ e) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ f) $\frac{1}{2a}$

**AM 50** Să se calculeze

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+x^{2018}\right)-\ln^{2018}(1+x)}{x^{2019}}.$$

a) 2018 b) 0 c) 1 d) 1009 e) 2017 f) 1010

**AM 51** Să se calculeze limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{12}-\sin^{12}(x)}{x^{14}}.$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 6 e) 12 f) 24

**AM 52** Se consideră funcţia $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $h(x) = \left(\dfrac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt numere naturale nenule şi diferite de 1, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 0 b) $+\infty$ c) 1 d) nu există e) $a_1 a_2 \cdots a_n$ f) $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$

**AM 53** Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R}\setminus\left\{-1, \dfrac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left|2x^2 + x\right|, g(x) = \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

Să se calculeze media geometrică a următoarelor trei limite:

$$l_1 = \lim_{x\to-\infty} f(x)^{g(x)}, l_2 = \lim_{x\to-1} f(x)^{g(x)}, l_3 = \lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)^{g(x)}.$$

a) $\dfrac{1}{e}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ c) $\sqrt[3]{e}$ d) $e$ e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$ f) $\sqrt{e}$

**AM 54** Să se calculeze limita

$$\lim_{x\to\infty} 2x\left[e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right].$$

a) $-\dfrac{e}{2}$ b) $-e$ c) $-\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{1}{2}$ e) $e$ f) $\dfrac{e}{2}$

**AM 55** Să se determine ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - x.$$

a) $y = 0$ b) $y = \dfrac{1}{2}$ c) $y = 2x - \dfrac{1}{2}$

d) $y = -2x - \dfrac{1}{2}$ e) $y = -2x + \dfrac{1}{2}$ f) $y = 2x + \dfrac{1}{2}$

**AM 56** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x$. Să se studieze existenţa asimptotelor la graficul funcţiei $f$ şi în cazul în care acestea există să se determine ecuaţiile lor.

a) $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$ b) $y = -\dfrac{\pi}{2}x + 1$ c) $y = \pm\dfrac{\pi}{2}x + 1$

d) $y = \pm\dfrac{\pi}{2}x - 1$ e) nu există f) $y = \dfrac{\pi}{2}x$

**AM 57** Să se studieze existenţa asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 + x \ln(e^x + 1)}$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine ecuaţia sa.

a) $y = x + \dfrac{1}{2}$ b) $y = \sqrt{2}x$ c) $y = x + 1$

d) $y = \sqrt{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ e) nu există f) $y = \sqrt{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**AM 58** Să se studieze existenţa asimptotelor la graficul funcţiei

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x \ln x$$

şi în cazul în care acestea există să se determine ecuaţiile lor.

a) $y = x$ b) $y = x + 1$ c) $y = 0$

d) nu există asimptote e) $x = 0$ f) $x = 0$ şi $y = 0$

**AM 59** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sin x$. Să se studieze existenţa asimptotelor la graficul funcţiei $f$ şi în cazul în care acestea există să se determine ecuaţiile lor.

a) $y = 0$ b) $y = x$ c) nu există

d) $y = x + 1$ e) $x = 0$ f) $y = 2x$

**AM 60** Fie funcţia $f : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x}{x+1}$ . Să se determine ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei $f$.

a) $y = 0$ b) $y = 2$ c) $y = 1$

d) $y = 2x$ e) $y = x$ f) toate răspunsurile sunt false

**AM 61** Se consideră $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^{ax}}{x+1},\ a \in \mathbb{R}.$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului $a$ astfel încât $y = 0$ să fie asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcţiei $f$.

a) $(0, +\infty)$ b) $\{1\}$ c) $(-1, 2)$

d) $\emptyset$ e) $[0, +\infty)$ f) $\mathbb{R}$

**AM 62** Se consideră $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x-2},\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Să se determine toate valorile parametrilor reali $a, b$ astfel încât $y = x + 2$ să fie asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei $f$.

a) $a = 0$, $b = -2$ b) $a = 1$, $b = 0$ c) $a = 0$, $\forall\ b \in \mathbb{R}$

d) $a = 0$, $b = 3$ e) $a = -2$, $\forall\ b \in \mathbb{R}$ f) $a = 0$, $b = 0$

**AM 63** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}$. Să se determine toate asimptotele la graficul funcţiei $f$.

a) $x = 0$ este asimptotă verticală

b) $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$

c) $y = x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$

d) $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$

e) $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$

f) $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$

**AM 64** Se consideră $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \text{arctg}x, & \text{dacă } x \leq 0 \\ 1 + \sqrt{x}, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Să se determine ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei $f$.

a) $y = 0$ b) $y = x - 1$ c) $y = -\dfrac{\pi}{2}$

d) $y = -\dfrac{\pi}{2}x$ e) $y = -\dfrac{\pi}{4}$ f) $y = 2\pi x$

**AM 65** Să se determine asimptotele la graficul funcţiei $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$,

$$f\left(x\right) = e^{\frac{1}{x}} \ .$$

a) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$
$x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta

b) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$
$x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta

c) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$
$x = 0$ este asimptotă verticală la stânga

d) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$
$x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta

e) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$
$x = 0$ este asimptotă verticală la stânga

f) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$
$x = 0$ este asimptotă verticală la stânga

**AM 66** Să se determine asimptotele la graficul funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f\left(x\right) = \sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2}.$$

a) $y = 2x, \quad y = -2x$ b) $y = 1 + x, \ y = -x$ c) $y = 1 - x, \ y = x$

d) $y = x, \ y = -x$ e) $y = 1 - x, \ y = 1 + x$ f) $y = 2x, \ y = 1 - x$

**AM 67** Fie $a > 0$ şi funcţia $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{e^x - a} \ ,$$

unde $D \subset \mathbb{R}$ reprezintă domeniul maxim de definiţie. Ştiind că funcţia $f$ nu are asimptote verticale, să se studieze existenţa altor asimptote la graficul funcţiei $f$ şi în cazul în care acestea există să se determine ecuaţiile lor.

a) $y = 0, \ y = -x$ b) $y = 0$ c) $y = 0, \ y = x$

d) $y = 0, \ y = x + 1$ e) $y = 1, \ y = x$ f) nu are asimptote

**AM 68** Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2^x - x^2}{x - 2}$, unde prin $D$ s-a notat domeniul maxim de definiţie. Să se determine ecuaţiile asimptotelor la graficul funcţiei $f$.

a) $x + y + 2 = 0$ b) $y = x - 2$ c) $x = 2$

d) $y = 2 - x$ e) $x = 2, \ y = -x - 2$ f) $y = \pm x + 2$

**AM 69** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{|1 - x^2|}$. Câte dintre următoarele propoziţii sunt adevărate?

$P_1$: $f$ nu admite asimptotă orizontală spre $-\infty$.

$P_2$: $f$ admite asimptotă oblică spre $-\infty$.

$P_3$: Axa $Ox$ este una dintre asimptotele funcţiei $f$.

$P_4$: $f$ admite cel puţin o asimptotă verticală, printre care dreapta de ecuaţie $x = 1$.

$P_5$: $f$ admite cel mult o asimptotă orizontală.

$P_6$: $f$ admite exact o asimptotă oblică, care este o dreaptă ce trece prin origine.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

**AM 70** Fie $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât dreapta de ecuaţie $y = 2x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcţiei $f$. Câte dintre următoarele propoziţii sunt adevărate?

$P_1$: Dreapta de ecuaţie $y = 2x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei $f$.

$P_2$: Dreapta de ecuaţie $y = -2x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei $f$.

$P_3$: Nu se pune problema existenţei asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei $f$.

$P_4$: Dreapta de ecuaţie $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcţiei $f$.

$P_5$: Dreapta de ecuaţie $x = 0$ este asimptotă verticală la stânga la graficul funcţiei $f$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

**AM 71** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x|x|(1 - \cos x)$ . Să se studieze existenţa asimptotelor la graficul funcţiei $f$ şi în cazul în care acestea există, să se determine ecuaţiile lor.

a) $y = -2$ este asimptotă spre $-\infty$
$y = 2$ este asimptotă spre $\infty$
$x = 0$ este asimptotă verticală

b) $y = -\dfrac{x}{2}$ este asimptotă spre $-\infty$
$y = \dfrac{x}{2}$ este asimptotă spre $\infty$
$x = 0$ este asimptotă verticală

c) $y = \dfrac{x}{2}$ este asimptotă spre $\infty$
$x = 0$ este asimptotă verticală

d) $y = -\dfrac{x}{2}$ este asimptotă spre $-\infty$
$y = \dfrac{x}{2}$ este asimptotă spre $\infty$

e) $f$ nu admite asimptote

f) $y = -x + 2$ este asimptotă spre $-\infty$
$y = x - 2$ este asimptotă spre $\infty$

**AM 72** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3}\left[\dfrac{2}{x}\right], & \text{dacă } x \neq 0 \\ a, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui $x \in \mathbb{R}$. Să se determine valoarea lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f$ este continuă în punctul $x = 0$.

a) $0$ b) $-\dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{2}{3}$ d) $1$ e) $2$ f) $\dfrac{1}{3}$

**AM 73** Se consideră funcţia $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ \dfrac{a \sin(x-1)}{x^2 - 5x + 4}, & \text{dacă } x \in (1, \pi]. \end{cases}$$

Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f$ să fie continuă pe $[0, \pi]$.

a) $2e^3$ b) $-3e^2$ c) $e$ d) $3e^3$ e) $-3e^3$ f) $0$

**AM 74** Fie funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{\pi}{x}, & \text{dacă } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Să se precizeze care dintre răspunsurile de mai jos este corect.

a) $f$ este continuă pe $[0, 1]$

b) $f$ este discontinuă în punctul $x = 0$

c) $f$ este discontinuă în punctul $x = \dfrac{1}{2}$

d) $f$ are limită nenulă în punctul $x = 0$

e) $f$ este discontinuă în punctul $x = 1$

f) $f$ nu admite limită în punctul $x = 0$

**AM 75** Să se studieze posibilitatea prelungirii prin continuitate a funcţiei

$$f : \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \setminus \{\pi\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}} \right|$$

în punctul $\pi$. În caz afirmativ, să se precizeze şi expresia funcţiei prelungite $\widetilde{f}$.

a) $f$ se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$

b) $f$ se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq \pi \\ 1, & x = \pi \end{cases}$

c) $f$ nu este prelungibilă prin continuitate în $x = \pi$

d) $f$ se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$

e) $f$ se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq \pi \\ \dfrac{1}{2}, & x = \pi \end{cases}$

f) $f$ se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$

**AM 76** Să se studieze posibilitatea prelungirii prin continuitate a funcţiei

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin(3 \arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

în punctele $a = -1$ şi $b = 1$. În caz afirmativ, să se precizeze şi expresia funcţiei prelungite $\widetilde{f}$.

a) $f$ nu este prelungibilă prin continuitate la $[-1, 1]$

b) $f$ se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} 3, & x = -1 \\ f(x), & x \in (-1, 1) \\ -3, & x = 1 \end{cases}$

c) $f$ se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-1,1) \\ -3, & x \in \{-1,1\} \end{cases}$

d) $f$ se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-1,1) \\ 3\pi, & x \in \{-1,1\} \end{cases}$

e) $f$ se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} -3, & x = -1 \\ f(x), & x \in (-1,1) \\ 3, & x = 1 \end{cases}$

f) $f$ se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-1,1) \\ 3, & x \in \{-1,1\} \end{cases}$

**AM 77** Fie funcţia continuă $f : [1,100) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (a + \{x\})(b - \{x\})$, $a, b \in \mathbb{R}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a lui $x$. Dacă $\mathrm{Im} f = [m, M]$, să se determine $M - m$.

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $a^2 + a$ d) $ab$ e) $\frac{a^2+b^2}{2}$ f) $\frac{(a+b)^2}{4}$

**AM 78** Se consideră funcţiile $f, g : (0, e) \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in (0,1) \\ x+1, & \text{dacă } x \in [1,e) \end{cases}, \text{ respectiv } g(x) = \frac{f(\ln(x+1))}{\ln(1+f(x))}.$$

Dacă notăm cu

$$A = \{x \in (0,e) : \ g \text{ este discontinuă în } x\} \text{ şi } S = \sum_{a \in A} a,$$

să se determine $S$.

a) 1 b) $1 + e$ c) $1 - e$ d) $e - 1$ e) 0 f) $e$

**AM 79** Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 4x| \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}$, unde $D$ este domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f$. Să se determine mulţimea punctelor de continuitate ale funcţiei $f$.

a) $[1,4)$ b) $[1,4]$ c) $(0,\infty)$ d) $[1,\infty)$ e) $(1,\infty)$ f) $[1,\infty)\setminus\{4\}$

**AM 80** Se consideră funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin \dfrac{|x|}{1+|x|}$, unde $D$ este domeniul maxim de definiţie. Să se determine mulţimea $C$ a punctelor de continuitate ale lui $f$, respectiv mulţimea $D_1$ a punctelor de derivabilitate ale lui $f$.

a) $C = D_1 = (0,\infty)$ b) $C = [0,\infty)$, $D_1 = (0,\infty)$

c) $C = D_1 = \mathbb{R}$ d) $C = D_1 = \mathbb{R}^*$

e) $C = \mathbb{R}$, $D_1 = \mathbb{R}^*$ f) $C = [-1,1]$, $D_1 = (-1,1)$

**AM 81** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + \ln x, & \text{dacă } x > 1 \\ x^2, & \text{dacă } x \leq 1. \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?

a) $f$ este continuă şi derivabilă doar pe $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$

b) $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă doar pe $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$

c) $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu $2f(1) = f'(1)$

d) $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu $f(1) = f'(1)$

e) $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu $f(1) = 2f'(1)$

f) $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu $f(1) = -f'(1)$

**AM 82** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{|x-1|}{e^x}\ .$$

Să se studieze derivabilitatea funcţiei în punctul $x_0 = 1$ şi în caz afirmativ să se calculeze $f'(1)$.

a) $f$ este derivabilă şi $f'(1) = \dfrac{1}{e}$ b) $f$ este derivabilă şi $f'(1) = -\dfrac{1}{e}$

c) $f$ este derivabilă şi $f'(1) = 0$ d) $f$ nu este derivabilă în $x_0 = 1$

e) $f$ este derivabilă şi $f'(1) = e$ f) $f$ este derivabilă şi $f'(1) = -e$

**AM 83** Se consideră funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$, unde $D$ este domeniul maxim de definiţie. Să se studieze derivabilitatea lui $f$ în punctul $x_0 = 0$. În caz afirmativ să se determine $f'(0)$.

a) $f$ este derivabilă şi $f'(0) = -1$ b) $f$ este derivabilă şi $f'(0) = 1$

c) $f$ nu este derivabilă în $x_0 = 0$ d) $f$ este derivabilă şi $f'(0) = 0$

e) $f$ este derivabilă şi $f'(0) = 2$ f) $f$ este derivabilă şi $f'(0) = \dfrac{1}{2}$

**AM 84** Să se determine parametrii reali $a, b$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & \text{dacă } x \leq 2 \\ ax + b, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$$

să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

a) $a = 4, \quad b = 0$ b) $a = 3, \quad b = 0$ c) $a \in \mathbb{R}, \quad b = 5$

d) $a = 3, \quad b \in \mathbb{R}$ e) $a = 4, \quad b = 1$ f) $a = -1, \quad b = 4$

**AM 85** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^x(a \sin x + b \cos x), & \text{dacă } x < 0 \\ x\sqrt{x^2 + 1}, & \text{dacă } x \geq 0 \ . \end{cases}$$

Determinaţi parametrii reali $a, b$ astfel încât funcţia $f$ să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

a) $a = 1, \forall\ b \in \mathbb{R}$ b) $a = b = 0$ c) $\forall\ a \in \mathbb{R}, b = 0$

d) $a = 1, b = 0$ e) $a = b = 1$ f) nu există $a, b \in \mathbb{R}$

**AM 86** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$. Să se determine mulţimea $D_1$ a punctelor de derivabilitate ale funcţiei $f$.

a) $D_1 = \mathbb{R} \setminus (1, 2)$ b) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ c) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

d) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$ f) $D_1 = \mathbb{R} \setminus (-2, -1)$

**AM 87** Să se precizeze numărul punctelor unghiulare ale funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{\ln(x^2 + 1)}.$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

**AM 88** Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,.$$

Determinaţi domeniul maxim de definiţie $D$ şi domeniul de derivabilitate $D_1$.

a) $D = D_1 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

b) $D = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$, $D_1 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

c) $D = D_1 = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

d) $D = \mathbb{R} \setminus (-1, 1]$, $D_1 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

e) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

f) $D = D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

**AM 89** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min\{x^4, x^5, x^6, x^7\}$. Dacă notăm

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ f \text{ nu este derivabilă în } x\},$$

atunci $S = \sum_{x \in A} x^2$ este:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 0 e) 4 f) 5

**AM 90** Să se calculeze derivata funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = (x^2+1)^{x^2+1}$.

a) $2x\,(x^2+1)^{x^2+1}\,[\ln(x^2+1)+1]$ b) $2x\,(x^2+1)^{x^2+1}\ln(x^2+1)$

c) $x\,(x^2+1)^{x^2+1}\,[\ln(x^2+1)+1]$ d) $2x\,[\ln(x^2+1)+1]$

e) $2x\,(x^2+1)\,[\ln(x^2+1)+1]$ f) $x\,(x^2+1)^{x^2+1}\ln(x^2+1)$

**AM 91** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1-x^2) + \sqrt{x^2+1}$. Să se calculeze derivata funcţiei $f$ în $x_0 = 1$.

a) $\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}-2}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}-4}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\sqrt{2}$ f) $-2+\sqrt{2}$

**AM 92** Fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2x^2}}\,, & \text{dacă } x \neq 0 \\ a\,, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

să fie continuă. În cazul în care există, să se calculeze $f'(0)$.

a) 0 b) 1 c) $\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) nu există f) $\sqrt{2}$

**AM 93** Legea de mişcare a unui mobil pe o axă este exprimată prin relaţia $s(t) = e^{-t}\cos t$ (timpul este măsurat în secunde). Să se determine acceleraţia mobilului după 2 secunde.

a) $e^{-2}\cos 2$ b) $2e^{-2}\cos 2$ c) $2e^{-2}\sin 2$

d) $e^{-2}\sin 2$ e) $\dfrac{e^{-2}\sin 2}{2}$ f) $\dfrac{e^{-2}\cos 2}{2}$

**AM 94** Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$. Să se studieze dacă $f$ este inversabilă şi în caz afirmativ să se calculeze limita

$$L = \lim_{y \to -\infty} e^{-y} f^{-1}(y).$$

a) $f$ este inversabilă şi $L = +\infty$ b) $f$ este inversabilă şi $L = 0$

c) $f$ este inversabilă şi $L = 1$ d) $f$ este inversabilă şi $L = e$

e) $f$ este inversabilă şi $L = e^{-1}$ f) $f$ nu este inversabilă

**AM 95** Fie funcţia $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = \dfrac{x}{e^x}$ şi funcţiile $f_n(x) = f'_{n-1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $f_2(x)$.

a) 0 b) $xe^{-x}$ c) $xe^{-2x}$

d) $(x-1)e^x$ e) $(2x-3)e^{-x}$ f) $(x-2)e^{-x}$

**AM 96** Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-2|\ln x|}$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $g : (0,1) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{x^2 f''(x) + mx f'(x)}{f(x)}$$

să fie constantă.

a) 2 b) $\dfrac{1}{2}$ c) 0 d) 4 e) 1 f) $-1$

**AM 97** Se consideră funcţia $f : \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$. Să se calculeze $f'(x)$.

a) $f'(x) = \dfrac{x}{2}$ b) $f'(x) = \dfrac{1}{x+\pi}$ c) $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+\pi}}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e) $f'(x) = \dfrac{1}{2}$ f) $f'(x) = 1$

**AM 98** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \left| x^2 + |x^2 - x| - 1 \right| .$$

Notăm cu $M$ mulţimea punctelor în care $f$ nu este derivabilă şi $S = \sum_{x \in M} f'_s(x)$, unde $f'_s(x)$ reprezintă derivata la stânga a funcţiei $f$ în punctul $x$. Să se determine $S$.

a) $-3$ b) $0$ c) $1$ d) $-1$ e) $3$ f) $\frac{1}{2}$

**AM 99** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu proprietăţile:

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = 5xy, \ \forall x, y \in \mathbb{R} \ \text{ şi } \ \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 2.$$

Să se determine $f(0)$ şi $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

a) $f(0) = 1$, $f'(x) = 5x$ b) $f(0) = 0$, $f'(x) = 5x$

c) $f(0) = 2$, $f'(x) = 2x + 5$ d) $f(0) = 1$, $f'(x) = 5x + 2$

e) $f(0) = 0$, $f'(x) = 5x + 2$ f) $f(0) = 0$, $f'(x) = 2x + 2$

**AM 100** Fie $a > 0$ şi funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x + a) \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) .$$

Să se determine mulţimea valorilor lui $a$ astfel încât $f$ să fie convexă.

a) $(0, \infty)$ b) $[1, \infty)$ c) $\left[ \frac{1}{2}, \infty \right)$ d) $\emptyset$ e) $\left\{ \frac{1}{2} \right\}$ f) $\left[ \frac{1}{2}, 1 \right)$

**AM 101** Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x - 1}, & \text{dacă } x \neq 1 \\ 1, & \text{dacă } x = 1 \end{cases} .$$

În cazul în care există, să se determine $f'(1)$.

a) $-\dfrac{1}{2}$ b) 0 c) 1 d) 2 e) nu există f) 3

**AM 102** Fie funcţia inversabilă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x + x - 1$. În cazul în care există, să se determine $(f^{-1})'(0)$.

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 0 c) 1 d) nu există e) 2 f) $-\dfrac{1}{2}$

**AM 103** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2012 - 2013\sqrt[2013]{x}$. Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

a) $y = x - 1$ b) $y = x + 1$ c) $y = x$

d) $y = 0$ e) $y = 1$ f) $y = 2$

**AM 104** Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$ în punctul de pe grafic în care panta tangentei este minimă.

a) $y = -\dfrac{5}{2}\,x + \dfrac{11}{2}$ b) $y = \dfrac{5}{2}\,x + \dfrac{11}{2}$ c) $y = 3$

d) $y = x + 2$ e) $y = 2x + 1$ f) $y = -2x + 1$

**AM 105** Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x^3 - 1) - \frac{4}{x}$$

în punctul de abscisă $x = 1$.

a) $y = 7x - 11$ b) $y = 7x$ c) $y = 11x - 7$

d) $7y = x - 11$ e) $7y = x + 11$ f) $y = 7x - 4$

**AM 106** Pentru ce valori ale parametrului $a \in \mathbb{R}$, dreapta $y = ax - 2$ este tangentă la curba $y = x^3 + 4x$?

a) 1 b) $-1$ c) 7 d) 2 e) $-2$ f) 0

**AM 107** Se consideră funcţia $f : [-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+1}$ . Să se determine abscisa punctului situat pe graficul lui $f$ în care tangenta la grafic este paralelă cu coarda care uneşte punctele de pe grafic de abscise $x = 0$, $x = 3$.

a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{5}{4}$ e) $\frac{3}{4}$ f) $\frac{4}{3}$

**AM 108** Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x - \sqrt{x}$. Să se determine coordonatele punctului situat pe graficul funcţiei $f$ în care tangenta la grafic are panta egală cu $\frac{1}{2}$ .

a) $(1, 1)$ b) $(0, 1)$ c) $(1, 0)$

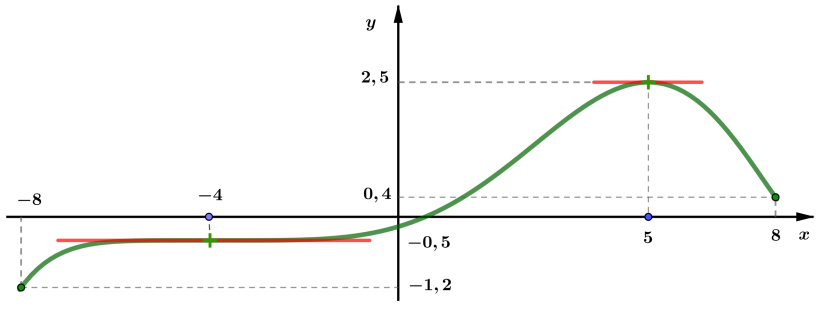
d) $(2, 0)$ e) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ f) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$

**AM 109** Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} \ln x$. Să se determine punctele de pe graficul funcţiei $f$ în care tangenta la grafic este paralelă cu axa $Ox$.

a) $A(1, 0)$ b) $A(e, \sqrt{e})$ c) $A(e^{-2}, -2)$

d) $A(e^{-2}, -2e^{-1})$ e) $A(1, -2e^{-1})$ f) $A(e^2, 2e)$

**AM 110** Graficul derivatei unei funcţii $f$, derivabilă pe $[-8, 8]$, este dat în figura următoare:



Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui $m \in \mathbb{R}$, pentru care graficul funcţiei $f$ are exact două tagente paralele cu dreapta $y = mx$.

a) $m \in \emptyset$ b) $m \in \mathbb{R}$ c) $m \in (-\infty, -1, 2)$

d) $m \in \left[\frac{5}{2}, +\infty, \right)$ e) $m \in \left[\frac{2}{5}, \frac{5}{2}\right)$ f) $m \in [-8, 8]$

**AM 111** Cerinţa de omologare a unui tobogan este ca panta tangentei profilului lateral în orice punct al său să fie cuprinsă între $-1$ şi 1. Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât profilul tipului de tobogan descris de funcţia

$$f : [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3}{27} - \frac{mx^2}{9} - \frac{8x}{9} + m + \frac{5}{3},$$

să respecte condiţia de omologare.

a) $m \in \emptyset$ b) $m \in \mathbb{R}$ c) $m \in \left(-\infty, \frac{1}{9}\right)$

d) $m \in \left[\frac{1}{6}, 1\right]$ e) $m \in (1, +\infty)$ f) $m \in \left[\frac{1}{9}, \frac{1}{6}\right)$

**AM 112** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. Să se determine mulţimea punctelor de inflexiune ale lui $f$.

a) $\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ b) $\left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$ c) $\emptyset$

d) $\{-1\}$ e) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ f) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

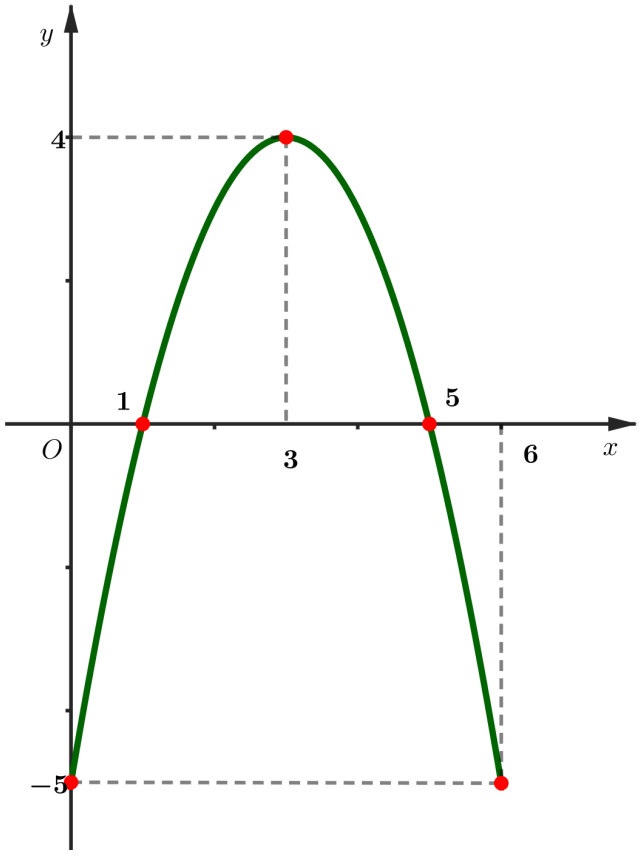
**AM 113** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$. Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale funcţiei $f$.

a) 1 b) 2 c) 0 d) 3 e) 4 f) 5

**AM 114** Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 - \ln x$, $a > 0$. Să se stabilească numărul punctelor de inflexiune ale lui $f$.

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4 f) depinde de valoarea lui $a$

**AM 115** Graficul derivatei unei funcţii $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$ este afişat mai jos. Care dintre afirmaţiile de mai jos sunt adevărate?




$P_1$ : $f$ este strict crescătoare pe $(0, 3)$;

$P_2$ : $f$ este strict descrescătoare pe $(3, 6)$;

$P_3$ : $f$ strict crescătoare pe $(1, 5)$;

$P_4$ : $f$ strict descrescătoare pe $(0, 1) \cup (5, 6)$;

$P_5$ : $f$ strict crescătoare pe $(0,1)$;

$P_6$ : $f$ strict descrescătoare pe $(3,5)$.

a) $P_2$ şi $P_5$ b) $P_1$ şi $P_2$ c) $P_3$ şi $P_5$

d) $P_3$ şi $P_4$ e) $P_2$ şi $P_6$ f) $P_1$ şi $P_6$

**AM 116** Graficul derivatei unei funcţii $f : [0,6] \to \mathbb{R}$ este afişat la problema **AM 100**. Care dintre afirmaţiile de mai jos sunt adevărate?

$P_1$ : $x = 1$ este punct de minim al funcţiei $f$;

$P_2$ : $x = 5$ este punct de maxim al funcţiei $f$;

$P_3$ : $x = 1$ este punct de maxim al funcţiei $f$;

$P_4$ : $x = 5$ este punct de minim al funcţiei $f$;

$P_5$ : funcţia $f$ nu are puncte de extrem;

$P_6$ : $x = 3$ este punct de maxim al funcţiei $f$.

a) $P_1$ şi $P_2$ b) $P_3$ c) $P_4$

d) $P_5$ e) $P_6$ f) $P_3$ şi $P_4$

**AM 117** Graficul derivatei unei funcţii $f : [0,6] \to \mathbb{R}$ este afişat la problema **AM 100**. Care dintre afirmaţiile de mai jos sunt adevărate?

$P_1$ : $f$ este convexă pe $(0,3)$;

$P_2$ : $f$ este concavă pe $(3,6)$;

$P_3$ : $f$ este convexă pe $(3,6)$;

$P_4$ : $f$ este concavă pe $(0,3)$;

$P_5$ : $f$ este convexă pe $(0,6)$;

$P_6$ : $f$ este concavă pe $(0,6)$.

a) $P_1$ şi $P_2$ b) $P_3$ c) $P_4$

d) $P_5$ e) $P_6$ f) $P_3$ şi $P_4$

**AM 118** Graficul derivatei unei funcţii $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$ este afişat la problema **AM 100**. Care dintre afirmaţiile de mai jos sunt adevărate?

$P_1$ : $f$ nu are puncte de inflexiune;

$P_2$ : $x = 1$, $x = 5$ sunt puncte de inflexiune ale funcţiei $f$;

$P_3$ : $x = 3$ este punct de inflexiune al funcţiei $f$;

$P_4$ : $x = 1$ este punct de inflexiune al funcţiei $f$;

$P_5$ : $x = 5$ este punct de inflexiune al funcţiei $f$;

$P_6$ : $x = 0$, $x = 6$ sunt puncte de inflexiune ale funcţiei $f$.

a) $P_1$ b) $P_2$ c) $P_3$ d) $P_4$ e) $P_5$ f) $P_6$

**AM 119** Funcţia $f : D_{\max} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{ab}{a + (b - a)\, e^{-rt}}$, cu parametrii $a, b$ şi $r$ pozitivi (funcţia logistică) modelează evoluţia numărului de indivizi ai unei specii. Să se precizeze care dintre următoarele afirmaţii este adevărată:

a) Dacă $b < a$, atunci $f$ este descrescătoare, mărginită şi îşi atinge marginile;

b) Dacă $b > a$, atunci $f$ este crescătoare şi nemărginită pe $D_{\max}$;

c) Dacă $b > a$, atunci $f$ este crescătoare, mărginită şi îşi atinge marginile;

d) Dacă $b < a$, atunci $f$ este descrescătoare, mărginită dar nu îşi atinge marginile;

e) Dacă $b > a$, atunci $f$ este crescătoare, mărginită dar nu îşi atinge marginile;

f) Dacă $b < a$, atunci $f$ este descrescătoare şi nemărginită pe $D_{\max}$

**AM 120** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$. Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei $f$.

a) $\{-1\}$ b) $\{0, 1\}$ c) $\{1\}$ d) $\{-1, 1\}$ e) $\{1, 2\}$ f) $\emptyset$

**AM 121** Fie funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ . Să se determine punctele de extrem local ale graficului funcţiei $f$ precizând şi natura acestora.

a) $(e, 2e)$, minim local

b) $\left(e, \dfrac{1}{2e}\right)$, maxim local

c) $\left(\sqrt{e}, \dfrac{1}{2e}\right)$, maxim local

d) $(\sqrt{e}, 2e)$, minim local

e) $\left(\sqrt{e}, \dfrac{1}{2e}\right)$, minim local

f) $\left(\dfrac{1}{e}, 2e\right)$, minim local

**AM 122** Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$, unde $D$ este domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f$.

a) $\{0, 6\}$ b) $\{3\}$ c) $\emptyset$ d) $\{0\}$ e) $\{6\}$ f) $\{1, 6\}$

**AM 123** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax + a - 2}{x^2 + 1},$$

unde $a$ este un parametru real. Să se determine $a$ astfel încât $x_0 = 1$ să fie punct de extrem local al funcţiei $f$.

a) $1$ b) $2$ c) $-2$ d) $-1$ e) $3$ f) $-3$

**AM 124** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$. Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei $f$.

a) $\{-1, 0\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{-1, 1\}$ e) $\{1\}$ f) $\emptyset$

**AM 125** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - x|}$. Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei $f$.

a) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ b) $\{0\}$ c) $\{1\}$

d) $\{0,1\}$ e) $\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$ f) $\emptyset$

**AM 126** Să se determine mulţimea punctelor de extrem local pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)\ .$$

a) $\{2,4\pm\sqrt{5}\}$ b) $\{4,2\pm\sqrt{5}\}$ c) $\{2\}$

d) $\{4\}$ e) $\{4,4\pm\sqrt{5}\}$ f) $\{2,2\pm\sqrt{5}\}$

**AM 127** Funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{3}-\ln x$ are:

a) un punct de minim local

b) un punct de maxim local

c) două puncte de maxim local

d) două puncte de minim local

e) un punct de minim local şi un punct de maxim local

f) nu are puncte de extrem local

**AM 128** Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f\left(x\right)=\sqrt[3]{|x^3-3x^2|}\ .$$

a) $f$ are doar două puncte de extrem local: 0 şi 3

b) $f$ nu are puncte de extrem local

c) $f$ are un singur punct de extrem local: 2

d) $f$ are trei puncte de extrem local: 0, 1 şi 3

e) $f$ are trei puncte de extrem local: 0, 2 şi 3

f) $f$ are doar două puncte de extrem local: $-1$ şi 3

**AM 129** Se consideră punctele $A(-1,0)$ şi $B(3,0)$. Dacă $C$ este un punct variabil pe graficul funcţiei $f:(0,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^{-x}$, să se calculeze valoarea maximă pe care o poate lua aria triunghiului $ABC$.

a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{e}$ d) $\frac{2}{e}$ e) $\frac{4}{e}$ f) $\frac{12}{e^3}$

**AM 130** Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{mx+1}{x^2+1}\ .$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului real $m$ astfel ca funcţia $f$ să aibă două puncte de extrem local.

a) $\{-1\}$ b) $(-1,1)$ c) $(-\infty,-1)$
d) $(1,\infty)$ e) $(0,1)$ f) $\mathbb{R}^*$

**AM 131** Se consideră funcţia

$$f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{e^x}{2+x}\ .$$

Să se determine punctele de extrem local ale graficului funcţiei $f$ precizând şi natura acestora.

a) $(-1,e)$, maxim local b) $\left(1,\frac{e}{3}\right)$, minim local
c) $\left(-1,\frac{1}{e}\right)$, maxim local d) $\left(1,\frac{e}{3}\right)$, maxim local
e) $\left(-1,\frac{1}{e}\right)$, minim local f) $(1,e)$, maxim local

**AM 132** Să se determine valoarea minimă a funcţiei $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, definită prin

$$f(x)=3\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x.$$

a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $4\sqrt{3}$ f) 0

**AM 133** Să se determine punctul de minim al funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x} - 12 \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

a) 2 b) 1 c) 0 d) $\pi$ e) $\frac{\pi}{2}$ f) $\frac{1}{2}$

**AM 134** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x\, b^{1-x} + b^x\, a^{1-x}$, cu $a, b > 0$, $a \neq b$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Atunci:

a) $\left(\frac{1}{2}, 2\sqrt{ab}\right)$ este punct de maxim local al graficului funcţiei $f$

b) $\left(\frac{1}{2}, 2ab\right)$ este punct de minim local al graficului funcţiei $f$

c) $\left(\frac{1}{2}, 2\sqrt{ab}\right)$ nu este punct de extrem al graficului funcţiei $f$

d) $\left(\frac{1}{2}, 2ab\right)$ este punct de maxim local al graficului funcţiei $f$

e) $\left(\frac{1}{2}, 2\sqrt{ab}\right)$ este punct de minim local al graficului funcţiei $f$

f) $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{ab}\right)$ este punct de maxim local al graficului funcţiei $f$

**AM 135** Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{e^{|\ln x|}}{x + 1}\ .$$

Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcţiei $f$.

a) 0 b) 2 c) 3 d) 1 e) 4 f) 5

**AM 136** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{|1 - x^2|}$ şi mulţimile

$$E = \{x \in \mathbb{R} : \ x \text{ este punct de extrem local al lui } f\},$$

respectiv

$$I = \{x \in \mathbb{R} : \ (x, f(x)) \text{ este punct de întoarcere pentru graficul funcţiei } f\}.$$

Ştiind că $|A|$ notează numărul de elemente ale unei mulţimi finite $A$, să se calculeze $|E|^{|I|}$.

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 9 f) 6

**AM 137** Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^{|\ln|x-2||}}{x+1}$ , unde $D$ reprezintă domeniul maxim de definiţie. Să se calculeze suma

$$S = \sum_{x \in E} f(x),$$

unde $E = \{x \mid x \in D, \ x \text{ este punct de extrem local al lui } f\}$.

a) $S = \dfrac{3}{4}$ b) $S = \dfrac{7}{4}$ c) $S = 3$ d) $S = \dfrac{5}{4}$ e) $S = \dfrac{3}{2}$ f) $S = 1$

**AM 138** Să se determine abscisa punctului din cadranul doi corespunzător distanţiei maxime dintre graficul funcţiei $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln(x^2)$ şi axa $Ox$.

a) $-1$ b) $-e$ c) $-\dfrac{1}{e}$ d) $-\dfrac{1}{e^2}$ e) $-\dfrac{1}{2}$ f) $-2$

**AM 139** Concentraţia unui medicament în fluxul sanguin la $t$ ore după administrare este

$$C(t) = \frac{13,6t}{(9,6t + 19,2)^2}.$$

În cât timp este atinsă concentraţia maximă $C_{\max}$ a medicamentului? Care este durata de timp pentru care concentraţia depăşeşte $\dfrac{8}{9}$ din $C_{\max}$?

a) $t_{\max} = 1$ ore şi $C \geq \frac{8}{9} C_{\max}$ pentru trei ore

b) $t_{\max} = 3$ ore şi $C \geq \frac{8}{9} C_{\max}$ pentru două ore

c) $t_{\max} = 2$ ore şi $C \geq \frac{8}{9} C_{\max}$ pentru două ore

d) $t_{\max} = 1$ ore şi $C \geq \frac{8}{9} C_{\max}$ pentru jumătate de oră

e) $t_{\max} = 2$ ore şi $C \geq \frac{8}{9} C_{\max}$ pentru trei ore

f) $t_{\max} = 3$ ore şi $C \geq \frac{8}{9} C_{\max}$ pentru jumătate de oră

**AM 140** Să se determine abscisa punctului de pe graficul funcţiei

$$f : (-2, 0) \to \mathbb{R} , \quad f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 2x} ,$$

situat cel mai aproape de prima bisectoare.

a) $-\sqrt{2}$ b) $-1$ c) $-\frac{3}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

**AM 141** Fie $A$ punctul aparţinând graficului funcţiei

$$f : \left[ -\frac{1}{2}, \infty \right) \to \mathbb{R} , \quad f(x) = \left( x + \frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} ,$$

situat cel mai aproape de originea $O$ a sistemului de coordonate carteziene $xOy$. Să se afle distanţa de la $O$ la $A$.

a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{36}$ e) $\frac{\sqrt{21}}{18}$ f) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

**AM 142** Un camion trebuie să parcurgă 100 $km$ cu o viteză constantă $v$ $km/h$ (cu condiţia $40 \leq v \leq 70$) consumând $\left(8 + \dfrac{v^2}{300}\right)$ $litri/h$ de benzină. Să se determine viteza pentru care costul este minim, ştiind că şoferul este plătit cu 15 $lei/h$ şi benzina costă 6 $lei/litru$.

a) 50 $km/h$ b) 55 $km/h$ c) $15\sqrt{14}$ $km/h$

d) $16\sqrt{14}$ $km/h$ e) 70 $km/h$ f) $14\sqrt{14}$ $km/h$

**AM 143** Să se determine dintre toate numerele reale pozitive pe cel pentru care diferenţa dintre acesta şi cubul său să fie maximă.

a) $\sqrt{3}$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ f) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

**AM 144** Să se determine mulţimea soluţiilor inecuaţiei

$$x - \frac{x^3}{6} - \sin x \leq 0.$$

a) $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ b) $(-\infty, 0]$ c) $[0, \infty)$

d) $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ e) $\mathbb{R}$ f) $\mathbb{Z}$

**AM 145** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - x$. Soluţia inecuaţiei $f(x) - 1 > 0$ este:

a) $(0, +\infty)$ b) $(-\infty, 0)$ c) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ d) $(1, +\infty)$ e) $(-\infty, -1)$ f) $\emptyset$

**AM 146** Să se determine cel mai mare număr real $a$ cu proprietatea

$$x^2 + 1 \geq a + 2\ln x, \quad \text{pentru orice} \quad x \in (0, \infty).$$

a) 0 b) 2 c) 1 d) $-1$ e) 4 f) 3

**AM 147** Să se determine mulţimea valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x + e^x \geq mx + 1, \quad \text{pentru orice} \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\{0\}$ d) $\{0, 2\}$ e) $\{0, 1\}$ f) $\emptyset$

**AM 148** Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului real $m$ astfel ca ecuaţia $e^x = mx^2$ să aibă trei rădăcini reale distincte.

a) $(-\infty, 0]$ b) $\{1\}$ c) $\left(0, \dfrac{e^2}{8}\right)$

d) $\left(\dfrac{e^2}{8}, \dfrac{e^2}{4}\right)$ e) $\left(\dfrac{e^2}{4}, \infty\right)$ f) $\left\{\dfrac{e^2}{4}\right\}$

**AM 149** Să se rezolve inecuaţia $e^{13x} + 13e^{-x} \geq 14$.

a) $\emptyset$ b) $\{0\}$ c) $[0, \infty)$ d) $(-\infty, 0]$ e) $\mathbb{R}$ f) $\{1\}$

**AM 150** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x+3}\,, & \text{dacă } x \neq -3 \\ 0\,, & \text{dacă } x = -3\,. \end{cases}$$

Să se studieze monotonia funcţiei $f$.

a) $f$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$ b) $f$ este crescătoare pe $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

c) $f$ este crescătoare pe $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ d) $f$ este descrescătoare pe $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$

e) $f$ este descrescătoare pe $\mathbb{R}$ f) $f$ nu este monotonă pe $\mathbb{R}$

**AM 151** Se consideră funcţia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,.$$

Să se determine imaginea funcţiei $f$.

a) $[0,1]$ b) $[0,+\infty)$ c) $\mathbb{R}$

d) $[0,10]$ e) $[1,4]$ f) $\left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right]$

**AM 152** Fie $f(t)=t^3e^{-\frac{t}{5}}$ puterea emisă la descărcarea unui aparat electric la fiecare moment $t>0$ (puterea este măsurată în waţi şi timpul în secunde). Să se determine la ce moment puterea va fi maximă.

a) 3 b) 15 c) 5 d) 20 e) $15^2$ f) 25

**AM 153** Fie triunghiul echilateral $ABC$ de latura $a$. Pe laturile $BA$ şi $BC$ se consideră punctele $D$, respectiv $E$ cu $BD=BE$. Se pliază triunghiul $DBE$ de-a lungul lui $DE$, punctul $B$ devenind $B'$, astfel încât planul triunghiului $B'DE$ să fie perpendicular pe planul iniţial al triunghiului $ABC$. Să se determine volumul maxim al piramidei $B'ACED$.

a) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$ b) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$ c) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{36}$ d) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{18}$ e) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ f) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$

**AM 154** Dintr-o mină urmează să fie transportat minereul de cupru folosind vagoane paralelipipedice. Ştiind că tunelul este liniar, are $2m$ înălţime şi $2,4m$ lăţime, iar secţiunea transversală este o parabolă de gradul al doilea, ce lăţime şi înălţime ar trebui să aibă vagoanele pentru a fi transportat cât mai mult minereu, dacă zona de încărcare a vagonului este la $30cm$ deasupra solului?

a) $L=\dfrac{2\sqrt{255}}{125},h=\dfrac{129}{90}$ b) $L=\dfrac{2\sqrt{255}}{25},h=2$ c) $L=\dfrac{2\sqrt{51}}{5},h=\dfrac{51}{90}$

d) $L=\dfrac{2\sqrt{51}}{\sqrt{5}},h=\dfrac{141}{90}$ e) $L=\dfrac{2\sqrt{5}}{125},h=\dfrac{51}{45}$ f) $L=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}},h=\dfrac{31}{90}$

**AM 155** Fie funcţia $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

şi afirmaţiile:

(i) $f$ este continuă, dar nu este derivabilă;

(ii) $x = 0$ este asimptotă verticală;

(iii) $y = 0$ este asimptotă orizontală;

(iv) $f'(0) = \dfrac{1}{2}$;

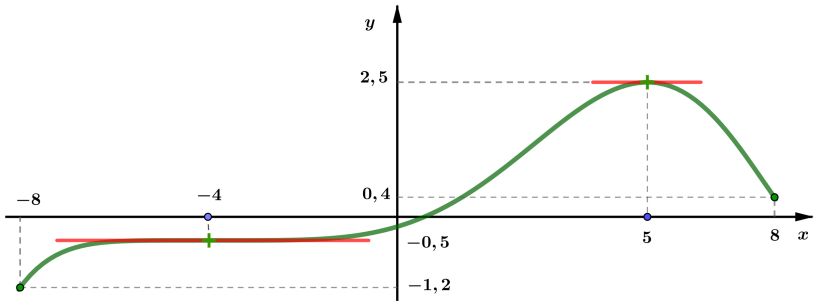
(v) $f$ este strict crescătoare;

(vi) Im $f = \left[-\dfrac{2}{\pi}, \dfrac{2}{\pi}\right]$.

Câte dintre afirmaţiile date sunt adevărate?

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2 f) 1

**AM 156** Graficul derivatei unei funcţii $f$ de două ori derivabilă pe $[-8, 8]$ este dat în figura următoare:




Ştiind că acest grafic are exact 2 tangente orizontale în punctele $(-4; f'(-4))$ şi $(5; 2{,}5)$, să se determine numărul punctelor de inflexiune ale funcţiei $f$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

**AM 157** Fie funcţia $f : [-100, 100] \to \mathbb{R}$, $f(t) = t + 2 \cdot 10^{-5} t^2 + 3 \cdot 10^{-7} t^3$. Să se determine intervalul $I \subset [-100, 100]$, de lungime maximă, pe care funcţia este convexă. Să se calculeze apoi valorile minimă $m$ şi maximă $M$ ale funcţiei $f$ pe intervalul $I$.

a) $I = \left[-\frac{200}{3};\ 100\right]$ şi $m = -\frac{2}{9} \cdot 10^2 + \frac{16}{243} \cdot 10^{-1}$ şi $M = 100 + 6 \cdot 10^{-1}$

b) $I = \left[-\frac{200}{9};\ 100\right]$ şi $m = -\frac{2}{3} \cdot 10^2 + \frac{16}{81} \cdot 10^{-1}$ şi $M = 100 + 5 \cdot 10^{-1}$

c) $I = \left[-100;\ -\frac{200}{9}\right]$ şi $m = -2 \cdot 10^2$ şi $M = 100 + \frac{16}{243} \cdot 10^{-1}$

d) $I = \left[-\frac{200}{3};\ 100\right]$ şi $m = 0$ şi $M = 100 + \frac{16}{243} \cdot 10^{-1}$

e) $I = \left[-\frac{200}{9};\ 100\right]$ şi $m = -\frac{2}{9} \cdot 10^2 + \frac{16}{243} \cdot 10^{-1}$ şi $M = 100 + 5 \cdot 10^{-1}$

f) $I = \left[-100;\ -\frac{200}{9}\right]$ şi $m = -\frac{2}{3} \cdot 10^2 + \frac{16}{81} \cdot 10^{-1}$ şi $M = 100 + 6 \cdot 10^{-1}$

**AM 158** Pentru motociclişti, într-un concurs de motociclete, este importantă aflarea punctelor impuse schimbărilor de viraj, de la dreapta la stânga şi de la stânga la dreapta, pentru ca parcursul să fie ideal. În ce punct de pe pistă un concurent trebuie să schimbe poziţia de viraj a motocicletei de la stânga la dreapta, pentru a avea un parcurs optim, dacă traseul este descris de funcţia $f : [-4, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -0{,}05 \cdot x^4 + 1{,}2 \cdot x^2 + 2$?

a) $(0, 0)$ b) $(0, 2)$ c) $(-2, 6)$

d) $(2, 6)$ e) $\left(-2\sqrt{3}, \frac{46}{5}\right)$ f) $\left(2\sqrt{3}, \frac{46}{5}\right)$

**AM 159** Fie şirul $(x_n)$ definit prin $x_1 = \frac{1}{e-1}$, $x_{n+1} = \ln(1 + x_n), n \geq 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

a) 0 b) $\frac{1}{e}$ c) 1 d) $e$ e) $e + 1$ f) $\infty$

**AM 160** Se consideră funcţia $f$ care satisface relaţia

$$2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)+f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=x$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$. Se cere să se calculeze limita şirului cu termenul general

$$a_n=\frac{1}{f^{(n)}(-1)},n\in\mathbb{N}^*,$$

unde $f^{(n)}(x_0)$ semnifică derivata de ordinul $n$ a lui $f$ în $x_0$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{2}$ f) $\infty$

**AM 161** Fie funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(3x^2-6x)\sqrt[3]{x}$. Să se precizeze care dintre următoarele afirmaţii este adevărată:

a) $F$ este o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , $f(x)=(6x-6)\sqrt[3]{x}$

b) $F$ este o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , $f(x)=(x^3-3x^2)\sqrt[3]{x^2}$

c) $F$ nu este o funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}$

d) $F$ este o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , $f(x)=(7x-8)\sqrt[3]{x}$

e) $F$ este o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , $f(x)=(7x-8)\sqrt[3]{x^2}$

f) $F$ este o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , $f(x)=(x^3-3x^2)\sqrt[3]{x}$

**AM 162** Fie funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x|x-1|$. Să se precizeze care dintre următoarele afirmaţii este adevărată:

a) $F$ este o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , $f(x)=\left|\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right|$

b) $F$ este o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , $f(x)=\frac{x^2}{2}|x-1|$

c) $F$ este o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , $f(x)=|2x-1|$

d) $F$ este o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , $f(x)=x\left|\frac{x^2}{2}-x\right|$

e) $F$ nu poate fi primitivă a nici unei funcţii $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

f) $F$ este o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , $f(x)=|x-1|+x$

**AM 163** Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x + e^{-x}, & x < 0 \\ 1 + xe^{x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

a) $\int f(x)\,dx = \begin{cases} (x^2 - 2) - e^{-x}, & x < 0 \\ (x-1)(2e^x + 1), & x \geq 0 \end{cases} + \mathcal{C}$

b) $\int f(x)\,dx = \begin{cases} (x^2 + 1) - e^{-x}, & x < 0 \\ (x-1)(1 - e^x), & x \geq 0 \end{cases} + \mathcal{C}$

c) $\int f(x)\,dx = \emptyset$ deoarece $f$ nu este primitivabilă

d) $\int f(x)\,dx = \begin{cases} (x^2 + 2) - e^{-x}, & x \leq 0 \\ x + e^{x}, & x > 0 \end{cases} + \mathcal{C}$

e) $\int f(x)\,dx = \begin{cases} x^2 - 1 - e^{-x}, & x < 0 \\ (x-1)(1 + e^x), & x \geq 0 \end{cases} + \mathcal{C}$

f) $\int f(x)\,dx = \begin{cases} (x^2 - 2) - e^{-x}, & x \leq 0 \\ (x-1)(e^x + 2), & x > 0 \end{cases} + \mathcal{C}$

**AM 164** Să se determine valorile parametrilor reali $a, b, c$ pentru care funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = ax + (bx^2 + c)\,\text{arctg}x$ este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\,\text{arctg}\,x$.

a) $a = -\frac{1}{2}$, $b = c = \frac{1}{2}$ b) $a = b = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{2}$ c) $a = b = c = -\frac{1}{2}$

d) $a = b = c = \frac{1}{2}$ e) $a = c = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$ f) $a = b = c = 1$

**AM 165** Să se calculeze

$$\int \left(x^2 - x\right) e^{-2x} dx.$$

a) $(2x-1)\,e^{-2x}+\mathcal{C}$ b) $\dfrac{x^2}{2}e^{-2x}+\mathcal{C}$ c) $\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}\right)e^{-2x}+\mathcal{C}$

d) $(1-2x)\,e^{-2x}+\mathcal{C}$ e) $-\dfrac{x^2}{2}e^{-2x}+\mathcal{C}$ f) $\left(-\dfrac{2x^3}{3}+x^2\right)e^{-2x}+\mathcal{C}$

**AM 166** Să se calculeze

$$\int (2x-1)\cos 2x dx.$$

a) $x\sin 2x+\dfrac{1}{2}\left(\cos 2x-\sin 2x\right)+\mathcal{C}$ b) $2x\cos 2x-\left(\cos 2x-\sin 2x\right)+\mathcal{C}$

c) $x\sin 2x+2\left(\cos 2x+\sin 2x\right)+\mathcal{C}$ d) $\dfrac{x}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}\left(\cos 2x-\sin 2x\right)+\mathcal{C}$

e) $x\cos 2x+\left(\sin 2x-\cos 2x\right)+\mathcal{C}$ f) $\dfrac{x}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{2}\left(\sin 2x-\cos 2x\right)+\mathcal{C}$

**AM 167** Fie $I_n=\displaystyle\int \frac{e^x}{x^n}\,dx$, $x\in(0,+\infty)$, unde $n$ este un număr natural nenul. Care dintre umătoarele afirmaţii este adevărată?

a) $I_3=\dfrac{e^x}{2x^2}-\dfrac{1}{2}I_1$ b) $3I_3=\dfrac{e^x}{x^2}-I_1$

c) $I_3=-\dfrac{e^x}{2x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{2}I_1$ d) $2I_3=\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{2}{3}I_2$

e) $I_3=\dfrac{e^x}{3x^2}-\dfrac{2}{3}I_2$ f) $I_3=\dfrac{e^x}{3x^3}-\dfrac{e^x}{2x^2}+\dfrac{1}{3}I_2$

**AM 168** Fie $I\subset(-\infty,1)$ un interval şi funcţia $f:I\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2-6x+5}\ .$$

Să se calculeze $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

a) $\dfrac{11}{4}\ln(1-x)-\dfrac{3}{4}\ln(5-x)+\mathcal{C}$ b) $\dfrac{11}{4}\ln(5-x)-\dfrac{3}{4}\ln(1-x)+\mathcal{C}$

c) $\dfrac{11}{4}\ln\dfrac{x-5}{x-1}+\mathcal{C}$ d) $\dfrac{3}{4}\ln\dfrac{1-x}{|x-5|}+\mathcal{C}$

e) $\dfrac{7}{4}\ln|x-1|-\dfrac{3}{4}\ln(5-x)+\mathcal{C}$ f) $\dfrac{11}{4}\ln(1-x)-\dfrac{7}{4}\ln|x-5|+\mathcal{C}$

**AM 169** Să se determine familia primitivelor funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{ax+b}{a^2x^2+b^2}\ ,\quad a>0,\ \ b\in\mathbb{R}^*.$$

a) $F(x)=\dfrac{1}{2a}\ln(a^2x^2+b^2)+\dfrac{1}{ab}\operatorname{arctg}\dfrac{ax}{b}+\mathcal{C}$

b) $F(x)=\dfrac{1}{2a}\ln(a^2x^2+b^2)+\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{ax}{b}+\mathcal{C}$

c) $F(x)=\dfrac{1}{2a}\ln(a^2x^2+b^2)+\dfrac{a}{b}\operatorname{arctg}\dfrac{ax}{b}+\mathcal{C}$

d) $F(x)=\dfrac{b}{a}\ln(a^2x^2+b^2)+\dfrac{b}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{ax}{b}+\mathcal{C}$

e) $F(x)=\dfrac{1}{a}\ln(a^2x^2+b^2)+\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{ax}{b}+\mathcal{C}$

f) $F(x)=\dfrac{b}{2a}\ln(a^2x^2+b^2)+\dfrac{b}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{ax}{b}+\mathcal{C}$

**AM 170** Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{1}{x^2+(x-1)^2}$$

şi $F$ o primitivă a sa. Să se determine acea primitivă pentru care $F(0)=\dfrac{\pi}{24}$.

a) $F(x)=\operatorname{arctg}(2x-1)+\dfrac{7\pi}{24}$ b) $F(x)=\operatorname{arctg}(2x-1)-\dfrac{5\pi}{24}$

c) $F(x)=\ln(2x-1)+\dfrac{5\pi}{24}$ d) $F(x)=\operatorname{arctg}(x-1)+\dfrac{7\pi}{12}$

e) $F(x)=\ln(x-1)+\dfrac{\pi}{4}$ f) $F(x)=\operatorname{arctg}(x^2+1)+\dfrac{5\pi}{24}$

**AM 171** Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2x - 8 - x^2}{x^4 + 4x^3} \ .$$

Să se determine acea primitivă $F$ a funcţiei $f$ care verifică relaţia $F(5) = \frac{4}{25}$.

a) $\ln \sqrt{\frac{x+4}{x}} - \frac{x-1}{x^2} + \frac{8}{25} - \ln \frac{3\sqrt{5}}{5}$

b) $\ln \sqrt{\frac{x+4}{x^3}} - \frac{x-1}{x^2} + \frac{6}{25} - \ln \frac{3\sqrt{3}}{5}$

c) $\ln \sqrt{\frac{x+4}{x}} - \frac{x^2}{x+1} + \frac{8}{5} - \ln \frac{3\sqrt{5}}{5}$

d) $\ln \sqrt{\frac{x+4}{x}} - \frac{x-1}{x^2} - \ln \frac{3\sqrt{5}}{5}$

e) $\ln \sqrt{\frac{x}{x+4}} + \frac{x-1}{x^2} + \frac{6}{25} - \ln \frac{3\sqrt{3}}{5}$

f) $\ln \sqrt{\frac{x}{\sqrt{x+4}}} - \frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{25} - \ln \frac{3\sqrt{5}}{5}$

**AM 172** Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei $f(x) = \frac{1}{x^{2018} + x}$ pe intervalul $I \subset (0, \infty)$.

a) $\ln x - \frac{\ln(1 + x^{2017})}{2017} + \mathcal{C}$

b) $\ln x + \frac{\ln(1 + x^{2017})}{2017} + \mathcal{C}$

c) $\ln x + \ln(1 + x^{2017}) \cdot 2017 + \mathcal{C}$

d) $\ln x - \frac{\ln(x + x^{2018})}{2018} + \mathcal{C}$

e) $-\ln x + \frac{\ln(1 + x^{2017})}{2017} + \mathcal{C}$

f) $\frac{\ln x}{2018} - \frac{\ln(1 + x^{2017})}{2017} + \mathcal{C}$

**AM 173** Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f\,(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}} \ .$$

a) $\frac{2}{7}\sqrt{x^2 - 6x + 10} + \ln \left| x - 3 - \sqrt{x^2 - 6x + 10} \right| + \mathcal{C}$

b) $\frac{2}{7}\text{arctg}\sqrt{x^2 - 6x + 10} + \mathcal{C}$

c) $\frac{2\,(x-3)}{7} \ln \sqrt{x^2 - 6x + 10} + \mathcal{C}$

d) $\dfrac{2x}{7}\sqrt{x^2-6x+10}+\mathcal{C}$

e) $2\sqrt{x^2-6x+10}+7\ln\left(x-3+\sqrt{x^2-6x+10}\right)+\mathcal{C}$

f) $2\sqrt{x^2-6x+10}+7\ln\left(x+\sqrt{x^2-6x+10}\right)+\mathcal{C}$

**AM 174** Fie $I\subset(0,\infty)$ un interval şi funcţia $f:I\to\mathbb{R}$ ,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\ .$$

Să se calculeze $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

a) $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+\mathcal{C}$

b) $3\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+\mathcal{C}$

c) $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+\mathcal{C}$

d) $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+\mathcal{C}$

e) $2\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}+3\sqrt[6]{x}-3\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+\mathcal{C}$

f) $3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}-\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+\mathcal{C}$

**AM 175** Se consideră funcţia

$$f(x)=x^5\sqrt[3]{(a^3+x^3)^2},\ \ a\in\mathbb{R}\ .$$

Să se determine familia primitivelor funcţiei $f$.

a) $\dfrac{1}{8}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^8}-\dfrac{a^3}{5}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}+\mathcal{C}$

b) $\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^8}-\dfrac{a^2}{5}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}+\mathcal{C}$

c) $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}-\dfrac{a^2}{3}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^3}+\mathcal{C}$

d) $\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^8}-\dfrac{a^2}{5}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}+\mathcal{C}$

e) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^8} - \frac{a^2}{3}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5} + \mathcal{C}$

f) $\frac{5}{8}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^8} - \frac{3a^2}{5}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5} + \mathcal{C}$

**AM 176** Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2-e^x}{e^x + e^{2-x}} .$$

a) $\frac{2}{e}\text{arctg}e^{x-1} - \ln(e^{2x}+e^2) + \mathcal{C}$

b) $2\text{arctg}e^{x-1} - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+e^2) + \mathcal{C}$

c) $\frac{2}{e}\text{arctg}e^{x-1} - \frac{1}{2}\ln\left(e^{2(x-1)}+1\right) + \mathcal{C}$

d) $\frac{1}{e}\text{arctg}e^{x} - \frac{1}{2}\ln\left(e^{2(x-1)}+1\right) + \mathcal{C}$

e) $2\text{arctg}e^{x-1} - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+e^2) + \mathcal{C}$

f) $\frac{2}{e}\text{arctg}e^{x} - \ln\left(e^{2(x-1)}+1\right) + \mathcal{C}$

**AM 177** Fie funcţiile[3] :

$$\text{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \text{ch}\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{şi respectiv} \quad \text{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \text{sh}\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} .$$

Să se determine primitiva $F$ a funcţiei $f(x) = \text{ch}^2\ x \cdot \text{sh}^2\ x$ care verifică relaţia $F(0) = 0$.

a) $\frac{e^{4x}}{64} - \frac{e^{-4x}}{64} - \frac{x}{8}$

b) $-\frac{x}{16} + \frac{1}{32}\ \text{sh}\ 4x$

c) $\frac{e^{4x}}{64} - \frac{e^{-4x}}{64} + 2x$

d) $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\ \text{ch}\ x$

e) $\frac{e^{2x}}{16} + \frac{e^{-2x}}{16} + \frac{3x}{4} - \frac{1}{8}$

f) $\frac{e^{4x}}{64} + \frac{e^{-4x}}{64} + \frac{e^{2x}}{16} + \frac{e^{-2x}}{16} - \frac{5}{32}$

[3]Funcţia ch se numeşte *cosinus hiperbolic* iar funcţia sh se numeşte *sinus hiperbolic*

**AM 178** Să se determine familia primitivelor funcţiei

$$f:\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}\,,\quad f(x)=\frac{1}{\cos x}\,.$$

a) $\ln\dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}+\mathcal{C}$ b) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}+\mathcal{C}$ c) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+\operatorname{tg}\,x}{1-\operatorname{tg}\,x}\right|+\mathcal{C}$

d) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\cos x}+\mathcal{C}$ e) $\ln\left|\dfrac{1+\operatorname{tg}\,\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\,\frac{x}{2}}\right|+\mathcal{C}$ f) $\ln\left|\dfrac{1+\operatorname{tg}\,x}{1-\operatorname{tg}\,x}\right|+\mathcal{C}$

**AM 179** Să se determine familia primitivelor funcţiei

$$f(x)=\frac{1}{\operatorname{tg}^2x-1}$$

pe intervalul $I=\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right)$.

a) $F(x)=\dfrac{x}{2}+\ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{tg}\,x}{1-\operatorname{tg}\,x}}+\mathcal{C}$ b) $F(x)=\operatorname{tg}\,x+\dfrac{1}{4}\ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{tg}\,x}{1-\operatorname{tg}\,x}}+\mathcal{C}$

c) $F(x)=2x+\ln\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{tg}\,x}{1+\operatorname{tg}\,x}}+\mathcal{C}$ d)$F(x)=x^2+\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\,x-1}{\operatorname{tg}\,x+1}\right|+\mathcal{C}$

e) $F(x)=x+\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\,x-1}{\operatorname{tg}\,x+1}\right|+\mathcal{C}$ f) $F(x)=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\,x-1}{\operatorname{tg}\,x+1}\right|+\mathcal{C}$

**AM 180** Pentru orice $n\in\mathbb{N}$ se definesc integralele

$$I_n=\int\frac{1}{x^n\sqrt{a^2+x^2}}\,dx,\quad x\in(0,\infty),\quad a\in\mathbb{R}^*.$$

Care dintre următoarele relaţii este adevărată?

a) $I_9=\dfrac{1}{8a^2}\left(-7I_7-\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^8}\right)$ b) $I_9=\dfrac{1}{9a^2}\left(-8I_7-\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^8}\right)$

c) $I_9=\dfrac{1}{9a^2}\left(8I_7-\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^8}\right)$ d) $I_9=\dfrac{1}{7a^2}\left(8I_7-\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^8}\right)$

e) $I_9=\dfrac{1}{9a^2}\left(\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^8}-8I_7\right)$ f) $I_9=\dfrac{1}{8a^2}\left(\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^8}-7I_7\right)$

**AM 181** Fie şirul de integrale

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\, dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

Să se exprime $I_{2017}$ sub forma $I_{2017} = a\ x^{2016}\sqrt{1+x^2} + b\ I_{2015}$, $a, b \in \mathbb{R}$ şi să se precizeze care dintre următoarele afirmaţii este adevărată.

a) $a = b$ b) $a - b = 1$

c) $a \cdot b = 2016$ d) $a = 2017b$

e) $a + b = -2015$ f) $\nexists\ a, b \in \mathbb{R}$ care să verifice relaţia

**AM 182** Pentru $n \in \mathbb{N}$ se consideră integralele

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx,\ x \in (-a, a),\ a > 0.$$

Să se determine o relaţie între $I_5$ şi $I_3$.

a) $5I_5 = x^4\sqrt{a^2-x^2} - 3a^2 I_3$ b) $5I_5 = -x^4\sqrt{a^2-x^2} + 4a^2 I_3$

c) $5I_5 = 4x^4\sqrt{a^2-x^2} - 3a^2 I_3$ d)$I_5 = x^4\sqrt{a^2-x^2} - 2a^2 I_3$

e) $I_5 = 4x^4\sqrt{a^2-x^2} - 5a^2 I_3$ f) $4I_5 = x^4\sqrt{a^2-x^2} - 3a^2 I_3$

**AM 183** Să se calculeze

$$\int_1^e \frac{1 + 2\ln x}{x\,(2+\ln x)}\, dx.$$

a) $3\ln 2 + 3\ln 3 + 2$ b) $\ln \dfrac{9e^2}{32}$ c) $6 + \ln \dfrac{9}{8e}$

d) $2\ln 2 + 3\ln 3 + 1$ e) $\ln \dfrac{8e^2}{27}$ f) $4 - \ln \dfrac{3}{2e}$

**AM 184** Să se calculeze

$$\int_0^1 e^{-3x}\cos \pi x \; dx.$$

a) $\dfrac{3\,(1+e^{-3})}{9+\pi^2}$ b) $\dfrac{2\,(1+e^{2})}{4+\pi^2}$ c) $\dfrac{1+e^{-3}}{9+\pi^2}$

d) $\dfrac{1+e^{3}}{4+\pi^2}$ e) $\dfrac{2\,(1+e^{3})}{9+\pi^2}$ f) $\dfrac{3\,(1+e^{-3})}{4+\pi^2}$

**AM 185** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-x^3}{x^4+1}\; dx.$

a) $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\ln 2}{8}$ b) $\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{\ln 2}{4}$ c) $\pi-2\ln 2$

d) $2\pi-4\ln 2$ e) $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\ln 2}{2}$ f) $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\ln 2}{3}$

**AM 186** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+4}\; dx.$

a) $\dfrac{\text{arctg } 3-\ln 5}{8}$ b) $\dfrac{\text{arctg } 2-\ln 2}{4}$ c) $\dfrac{2\text{arctg } 3-\ln 2}{4}$

d) $\dfrac{2\text{arctg } 2-\ln 5}{8}$ e) $\dfrac{\text{arctg } 4-\ln 3}{8}$ f) $\dfrac{2\text{arctg } 4-\ln 3}{4}$

**AM 187** Să se calculeze $\displaystyle\int_1^e (2x+1)\ln x\; dx.$

a) $\dfrac{1}{2}\,(e+3)$ b) $\dfrac{1}{3}\,(e^2+2)$ c)$\dfrac{1}{2}\,(e^2+3)$

d) $\dfrac{1}{2}\,(e^2-2)$ e) $\dfrac{1}{3}\,(e-3)$ f)$\dfrac{1}{3}\,(e^2+1)$

**AM 188** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$.

a) $\frac{40}{9}$ b) $\frac{10}{3}$ c) $\frac{50}{9}$ d) $\frac{20}{3}$ e) $\frac{10}{9}$ f) $\frac{40}{3}$

**AM 189** Să se calculeze $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{(4x-1)\sqrt{x}}$ .

a) $\sqrt{5}$ b) $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$ c) $\ln\frac{9}{2}$ d) $\ln\frac{5}{2}$ e) $\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$ f) $3\sqrt{5}$

**AM 190** Fie $a \in \mathbb{R}^*$ şi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{3+x^2}\ , & |x| \le \sqrt{3} \\ 0, & |x| > \sqrt{3} \end{cases}$ .

Să se calculeze $F(1) - F(0)$, unde $F(x) = \displaystyle\int_{-e}^{x} f(t)dt$.

a) 0 b) 1 c) $a\sqrt{3}$ d) $2a$ e) $2a\sqrt{3}$ f) $\frac{a\pi}{6\sqrt{3}}$

**AM 191** Să se calculeze $\displaystyle\int_7^{27} \frac{1}{x+\sqrt{2x-5}}\,dx$.

a) $\ln\frac{10}{7} - \operatorname{arctg}\frac{2}{25}$ b) $\ln\frac{17}{5} - \operatorname{arctg} 6 + \operatorname{arctg} 3$

c) $\ln\frac{17}{5} - \operatorname{arctg}\frac{2}{9}$ d) $\ln\frac{10}{9} - \operatorname{arctg}\frac{9}{25}$

e) $\ln\frac{34}{7} - \operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg} 2$ f) $\ln\frac{34}{5} - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$

**AM 192** Să se determine valoarea integralei $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x| \arcsin x\ dx$.

a) $-\frac{\pi}{2}$ b) $-1$ c) 1 d) $\frac{\pi}{2}$ e) 0 f) $\pi$

**AM 193** Să se determine valoarea integralei

$$\int_{-1}^{1} |x| \arcsin^2 x \, dx.$$

a) $\frac{\pi}{8}$ b) $\frac{\pi^2}{8}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$ e) $\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}$ f) $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}$

**AM 194** Să se determine valoarea parametrului $a > 0$ astfel încât integrala

$$\int_{-a}^{a} \frac{x^4}{1 + e^x} \, dx$$

să ia valoarea 20000.

a) 4 b) $\frac{1}{2}$ c) $e$ d) 1 e) 10 f) 100

**AM 195** Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_{0}^{1024} \frac{\ln(2017 - x)}{\ln[1505^2 - (512 - x)^2]} \, dx.$$

a) 2017 b) $993 \cdot 2017$ c) $1024 \cdot 2017$

d) 512 e) $\frac{993 \cdot 2017}{2}$ f) $993 \cdot 1024$

**AM 196** Să se calculeze

$$\int_{1}^{3} x[x]dx,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real $a$.

a) $\frac{11}{2}$ b) $\frac{11}{3}$ c) $\frac{13}{2}$ d) $\frac{13}{3}$ e) 4 f) 5

**AM 197** Se consideră funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = [mx],\ m > 0,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real $a$. Să se determine constanta $m$ pentru care $\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2}$ .

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{4}$ d) 2 e) 4 f) 8

**AM 198** Studiaţi dacă există $a \in (0, \infty)$ pentru care $\int_{-a}^{a} [x]\, dx = -82$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui $x$. În caz afirmativ, precizaţi valoarea parametrului $a$.

a) nu există b) 40 c) 41 d) 81 e) 82 f) 164

**AM 199** Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului $m \in [-2, 3]$ pentru care

$$\int_{-2}^{3} (x + |m - x|)\, dx = 9.$$

a) $\left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$ b) $\{0, 1\}$ c) $\left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

d) $\left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$ e) $\left\{-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right\}$ f) $\{-1, 3\}$

**AM 200** Să se calculeze integrala definită

$$\int_{-2}^{1} (1 - |x|)\ dx.$$

a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $-2$ f) 0

**AM 201** Să se calculeze integrala definită

$$\int_{-2}^{2} \Big(1 - \Big||x| - 1\Big|\Big) dx.$$

a) $0$ b) $1$ c) $2$ d) $\frac{1}{2}$ e) $-1$ f) $-\frac{1}{2}$

**AM 202** Să se calculeze

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \min\left\{\sin x, \frac{1}{2}\right\} dx.$$

a) $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$ b) $\frac{\pi}{6} + \frac{3}{2}$ c) $\frac{\pi}{3} + \frac{3}{2}$

d) $\frac{\pi + 6 - 3\sqrt{3}}{6}$ e) $\frac{\pi + 3 + 3\sqrt{3}}{6}$ f) $\frac{2\pi}{3} + 1$

**AM 203** Să se calculeze

$$\int_{0}^{\pi} \min\{\sin x, \cos x\}\ dx.$$

a) $\sqrt{2}$ b) $1 - \sqrt{2}$ c) $0$ d) $2\pi$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**AM 204** Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_{0}^{1} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\ dx.$$

a) $\frac{\pi}{2} + 1$ b) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}$ c) $\frac{\pi}{4} + 1$

d) $\frac{\pi}{8} + 1$ e) $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$ f) $\frac{\pi - 1}{4}$

**AM 205** Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{1}{(x^2+9)^2}\, dx.$$

a) $\dfrac{\pi - 3\sqrt{3}}{324}$ b) $\dfrac{\pi - 3\sqrt{3}+3}{648}$ c) $\dfrac{\pi - 3\sqrt{3}+6}{648}$

d) $\dfrac{\pi + 3}{648}$ e) $\dfrac{6\sqrt{3}-3}{648}$ f) $\dfrac{\pi + 3\sqrt{3}-6}{324}$

**AM 206** Se consideră funcţia inversabilă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{-x^3 + 2x^2 - 5x + 8}{x^2 + 7}\ .$$

Să se calculeze $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{8}{7}} f^{-1}(y)dy$ , unde $f^{-1}$ reprezintă inversa funcţiei $f$.

a) $1 + \ln\dfrac{8}{7} - \dfrac{6\sqrt{7}}{7}\text{arctg}\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ b) $1 + \ln\dfrac{7}{8} - \dfrac{\sqrt{7}}{6}\text{arctg}\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

c) $1 + \ln\dfrac{8}{7}$ d) $-1 - \ln\dfrac{8}{7} + \text{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

e) $2 + \text{arctg}\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ f) $0$

**AM 207** Fie integrala

$$I(a) = \int_1^3 \frac{dx}{|x-a|+1}\ ,\ a \in \mathbb{R}.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{a\to\infty} I(a)$ .

a) $0$ b) $\infty$ c) $2$ d) $\ln 3$ e) $1$ f) $\dfrac{1}{2}$

**AM 208** Să se calculeze integrala

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x}\, dx\ .$$

a) $\frac{\pi}{3} + \frac{9}{10}\ln\frac{9}{10}$ b) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{10}\ln\frac{9}{2}$ c) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{10}\ln\frac{9}{2}$

d) $\frac{2\pi}{5} + \frac{10}{3}\ln\frac{2}{9}$ e) $\frac{\pi}{4} + \frac{10}{7}\ln\frac{9}{2}$ f) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{4}\ln\frac{9}{2}$

**AM 209** Să se calculeze

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3 + \cos^2 x}\, dx.$$

a) $\frac{\pi^2}{4}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{\pi^2\sqrt{3}}{6}$ e) $\frac{\pi^2\sqrt{3}}{12}$ f) $\frac{\pi^2\sqrt{3}}{18}$

**AM 210** Să se calculeze integrala

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\frac{x}{2}}{1 + e^{ax}} dx\ ,$$

unde $a \in \mathbb{R}$.

a) $2a$ b) $\frac{a\pi}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $2$ e) $e^{a\pi}$ f) $2e^a$

**AM 211** Să se determine constanta reală $a$ pentru care valoarea integralei

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{a}{\sin x \cos x}\, dx$$

este $\ln\sqrt[4]{3}$.

a) $2$ b) $1$ c) $\pi$ d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{3}$

**AM 212** Să se calculeze integrala definită

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\, dx.$$

a) $\dfrac{2\sqrt{3}+\pi}{6}$ b) $\dfrac{6\sqrt{3}-\pi}{2}$ c) $\dfrac{3\sqrt{3}+\pi}{6}$

d) $\dfrac{5\sqrt{3}-\pi}{3}$ e) $\dfrac{4\sqrt{3}-\pi}{6}$ f) $\dfrac{5\sqrt{3}+\pi}{2}$

**AM 213** Să se calculeze integrala definită

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 2x\ \sin 2x\ dx.$$

a) 0 b) $-\dfrac{1}{10}$ c) $\dfrac{1}{10}$ d) $\dfrac{1}{5}$ e) $-\dfrac{1}{5}$ f) 1

**AM 214** Se consideră integralele definite

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x\ dx, \quad \text{unde} \ \ a \in \mathbb{N}.$$

Să se calculeze produsul $aI(a)I(a-1)$ pentru toate valorile lui $a \in \mathbb{N}^*$.

a) $\dfrac{\pi a}{2}$ b) $\dfrac{\pi}{2\,(a-1)!}$ c) $\pi$ d) $\dfrac{\pi}{2}$ e) $\dfrac{\pi a}{a-1}$ f) $\dfrac{\pi\,(a-1)}{2}$

**AM 215** Fie $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$f\,(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\,(n \arccos\ x)}{\sqrt{1-x^2}}\ , & |x| < 1, \\ n\ (\operatorname{sign}\ x)^{n+1}, & |x| = 1, \quad n \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

unde sign reprezintă funcţia semn. Să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^{1} f\,(x)\, dx$.

a) $\dfrac{1}{n}$ b) $\cos\dfrac{\pi}{n}$ c) $\dfrac{1+(-1)^n}{n}$

d) $\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{n}$ e) $(-1)^n\cos\dfrac{\pi}{n}$ f) $0$

**AM 216** Să se calculeze

$$\int_0^{\ln 2}\frac{x}{1+e^{-x}}\,dx+\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{x}{1-e^{-x}}\,dx.$$

a) $\ln 2\ln 3$ b) $\ln 2+4\ln 3$ c) $\ln 2+\ln 3$

d) $2\ln 2\ln 3$ e) $3\ln 2+2\ln 3$ f) $\ln 2+2\ln 3$

**AM 217** Să se determine numărul real $m$ pentru care are loc identitatea

$$\int_0^1\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}dx=m\int_1^2(x-1)^2\sqrt{x}\,dx.$$

a) $3,5$ b) $2$ c) $3$ d) $1,5$ e) $1$ f) $2,5$

**AM 218** Să se calculeze $\lim\limits_{a\to\infty}I(a)$, unde

$$I(a)=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{1}{x^2+x+1}\,dx,\quad\text{unde}\quad a>1.$$

a) $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ b) $\dfrac{\pi}{2}$ c) $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ d) $\pi\sqrt{3}$ e) $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}$ f) $1$

**AM 219** Să se calculeze

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^{a^2}e^{-\sqrt{x}}\,dx.$$

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $2$ c) $\sqrt{2}$ d) $4$ e) $\infty$ f) $\dfrac{1}{4}$

**AM 220** Să se calculeze valoarea limitei

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\displaystyle\int_0^{\cos x} e^{t^2}dt}{\displaystyle\int_0^{\operatorname{ctg}x} \ln(t^2+2)dt}\ .$$

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{\ln 2}$ d) $\frac{2}{\ln 2}$ e) 0 f) $\ln 2$

**AM 221** Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcţia definită prin $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{t^2}{t^2+\sin^2 t}\,dt$. Să se precizeze care dintre afirmaţiile următoare este adevărată.

a) $F$ este crescătoare
b) $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=0$
c) $F$ este pară
d) $F$ este descrescătoare
e) $F(1)=0$
f) nici un răspuns nu este corect

**AM 222** Să se calculeze $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(101x)\cdot\sin^{99}x dx$.

a) $\frac{\sqrt{3}}{100\cdot 2^{101}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{101\cdot 2^{100}}$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{100\cdot 2^{101}}$
d) $-\frac{\sqrt{3}}{101\cdot 2^{100}}$ e) $\frac{1}{2^{101}}$ f) $\frac{1}{10100}$

**AM 223** Se consideră funcţia continuă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $f(2x)=3f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Dacă

$$\int_0^1 f(x)dx=1\ ,$$

să se calculeze

$$\int_1^2 f(x)dx.$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

**AM 224** Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n^2}}\right).$$

a) 1 b) 0 c) $\sqrt{2}$

d) $2\sqrt{2}-2$ e) $2\sqrt{2}$ f) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**AM 225** Să se calculeze limita şirului cu termenul general

$$a_n=\frac{\pi}{3n}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3n}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3n}\right)+...+\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{3n}\right)\right].$$

a) $\pi$ b) $\dfrac{3}{\pi}$ c) $\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{1}{3}$ e) $\dfrac{1}{\pi}\ln 3$ f) $\ln 2$

**AM 226** Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+...+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$$

a) $\dfrac{\pi}{2}$ b) $\dfrac{3}{\pi}$ c) $\dfrac{2}{\pi}$ d) $\dfrac{\pi}{4}$ e) 1 f) $\dfrac{\pi}{6}$

**AM 227** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\int\limits_0^1 x^n e^{x^2}\,dx$.

a) 0 b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) $\dfrac{e}{2}$ e) $e$ f) $\infty$

**AM 228** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\int_0^1 x^n e^{-ax^2}dx$ , unde $a>0$.

a) $e^a$ b) $e^{-a}$ c) $1+ae^2$ d) $e^{-2a}$ e) $e^{2a}$ f) $1-ae^2$

**AM 229** Un mobil porneşte de pe loc şi se deplasează în linie dreaptă timp de $T$ minute, $T > 1$, număr întreg, cu viteza

$$v(t) = \begin{cases} t & , \quad 0 \leq t \leq 60 \\ 60 + \dfrac{1}{\pi} \sin \pi (t - 60) & , \quad 60 < t \leq 60T \end{cases}$$

măsurată în metri/secundă. Să se calculeze $a_1$, acceleraţia atinsă de mobil la un minut de la pornire şi $d$, distanţa parcursă în cele $T$ minute.

a) $a_1 = 60T$ m/s$^2$ şi $d = 1740 - T$ m

b) $a_1 = 2T$ m/s$^2$ şi $d = 1740 + 60T$ m

c) $a_1 = 60T$ m/s$^2$ şi $d = 1800 - T$ m

d) $a_1 = 2T$ m/s$^2$ şi $d = 1800 + 60T$ m

e) $a_1 = 1$ m/s$^2$ şi $d = 1800(2T - 1)$ m

f) $a_1 = 1$ m/s$^2$ şi $d = 1800 + 60T$ m

**AM 230** Variaţia sumei depuse într-un cont bancar de-a lungul unui deceniu este descrisă de funcţia $S : [0, 10] \to \mathbb{R}$,

$$S(t) = 2000 - 10t \cdot \exp\left(5 - \frac{t^2}{8}\right).$$

Să se stabilească la câţi ani (notaţie: $t_{\min}$) de la iniţierea contului, depozitul atinge valoarea minimă $S_{\min}$. Care este valoarea medie $S_{md}$ a funcţiei $S$ în acest interval de timp?

a) $t_{\min} = 3$ ani, $S_{\min} = 2000 - 20e^4\sqrt{e}$, $S_{md} = 20e^{\frac{9}{2}} - 20e^5 + 2000$

b) $t_{\min} = 2$ ani, $S_{\min} = 2000 - 18e^4\sqrt{e}$, $S_{md} = 18e^{\frac{9}{2}} - 18e^5 + 1800$

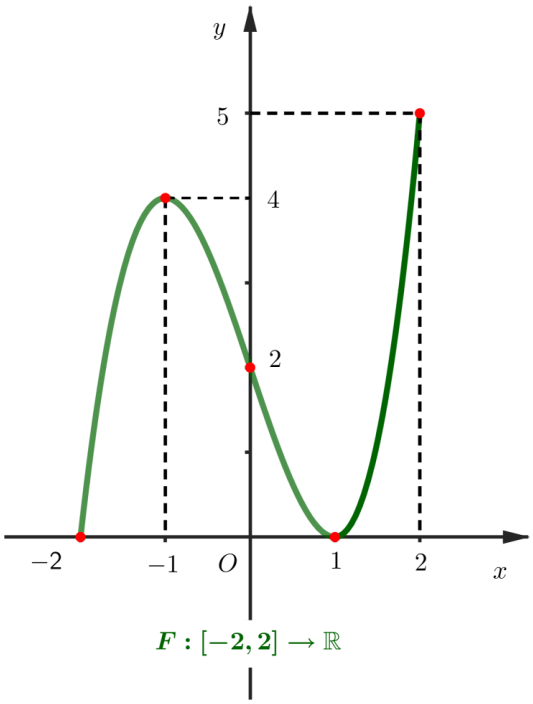
c) $t_{\min} = 3$ ani, $S_{\min} = 1800 - 20e^4\sqrt{e}$, $S_{md} = 18e^{\frac{9}{2}} - 18e^5 + 2000$

d) $t_{\min} = 5$ ani, $S_{\min} = 1800 - 18e^4\sqrt{e}$, $S_{md} = 18e^{\frac{9}{2}} - 20e^5 + 1800$

e) $t_{\min} = 2$ ani, $S_{\min} = 2000 - 20e^4\sqrt{e}$, $S_{md} = 20e^{\frac{9}{2}} - 20e^5 + 2000$

f) Toate răspunsurile de mai sus sunt greşite

**AM 231** Graficul unei primitive $F$ a unei funcţii continue $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ este dat mai jos. Câte dintre afirmaţiile de mai jos sunt adevărate?




$(i)$ $F'(1) = f(1)$ $(ii)$ $f(1) = F(1)$ $(iii)$ $\int_0^2 f(x)dx = 3$

$(iv)$ $f(F(-2)) > 0$ $(v)$ $f(x) < 0, \forall x \in (-1, 1)$

a) 0 b) 1 c) 3 d) 2 e) 4 f) 5

**AM 232** Să se determine aria subgraficului funcţiei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x+1}{x+3}\,.$$

a) $\ln \frac{16}{9}$ b) $2 - \ln \frac{16}{9}$ c) $1 - \ln \frac{16}{9}$

d) $\ln \frac{9}{16}$ e) $1 - \ln \frac{9}{16}$ f) 2

**AM 233** Să se determine aria mulţimii mărginite cuprinse între

$$y = \frac{x^2 + 3}{x + 3} \quad \text{şi} \quad y = 2.$$

a) $12 - 3\ln 3$ b) $12 + 3\ln 3$ c) $16 - 3\ln 3$

d) $16 - 12\ln 3$ e) $16 - \ln 12$ f) $\ln 12$

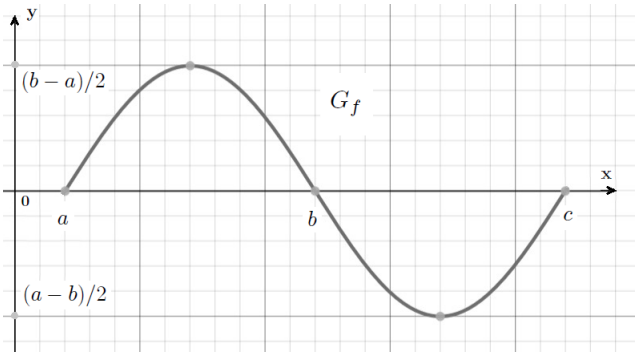
**AM 234** Să se calculeze aria domeniului mărginit ce este cuprins între parabolele $y = 2x^2 + 5x - 3$ şi $y = 6 - x - x^2$.

a) $2^5$ b) 12 c) $2^4$ d) 60 e) $2^6$ f) 34

**AM 235** Să se determine aria domeniului mărginit, delimitat de parabola $y^2 = 10x$ şi dreapta $y = 5x$.

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{9}{2}$ d) $\frac{2}{15}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{5}$

**AM 236** Graficul unei funcţii derivabile $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ este afişat mai jos.




Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate ?

$A_1$: Exista o funcţie constantă $g : [a, b] \to (0, \infty)$ astfel încât aria subgraficului lui $g$ să coincidă cu aria subgraficului lui $f|_{[a,b]}$

$A_2$: Există cel mult un punct $x_0 \in (a, c)$ cu proprietatea că $f'(x_0) = 0$

$A_3$: Valoarea integralei $\displaystyle\int_a^c f(x)\, dx$ este $2\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$

$A_4$: Punctul $x_0 = b$ este punct de inflexiune pentru $f$

$A_5$: Funcţia $f : [a, c] \to \left[\dfrac{a-b}{2}, \dfrac{b-a}{2}\right]$ este surjectivă

$A_6$: Valoarea integralei $\displaystyle\int_a^c |f(x)|\, dx$ este mai mare decât $\dfrac{(b-a)^2}{2}$

a) $A_1$, $A_4$, $A_5$ şi $A_6$ b) $A_3$ şi $A_5$ c) $A_1$, $A_3$, $A_4$ şi $A_5$

d) toate e) $A_2$ şi $A_4$ f) $A_3$, $A_5$ şi $A_6$

**AM 237** Să se determine volumul corpului de rotaţie generat de graficul funcţiei $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[4]{7 - x^2 + 6x}$.

a) $\pi\left(3\sqrt{3} + 12 \arcsin \dfrac{1}{4}\right)$ b) $\pi\left(3\sqrt{7} - 12 \arcsin \dfrac{1}{4}\right)$

c) $\pi\left(3\sqrt{7} + 16 \arcsin \dfrac{3}{4}\right)$ d) $\pi\left(\ln \dfrac{3}{4} + 16 \arcsin \dfrac{3}{4}\right)$

e) $\pi\left(3\sqrt{7} + \ln \dfrac{3}{4}\right)$ f) $\pi\left(7\sqrt{3} - 16 \arcsin \dfrac{5}{6}\right)$

**AM 238** Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei $Ox$ a graficului funcţiei $f : \left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cos x$.

a) $\dfrac{4\pi^4}{9} - \dfrac{3\pi^2}{2}$ b) $\dfrac{1}{16}\pi^2(3\pi^2 + 2)$ c) $\dfrac{\pi^4}{16} - \dfrac{3\pi^2}{4}$

d) $\dfrac{9\pi^4}{16} - \dfrac{3\pi^2}{8}$ e) $\dfrac{3}{8}\pi^2(\pi^2 - 2)$ f) $\dfrac{8\pi^4}{9} - \dfrac{3\pi^2}{8}$

**AM 239** Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei $Ox$ a cercului de ecuaţie $x^2 + (y-2)^2 - 1 = 0$.

a) $2\pi$ b) $2\pi^2$ c) $\pi$ d) $\pi^2$ e) $4\pi$ f) $4\pi^2$

**AM 240** Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei $Ox$ a elipsei de ecuaţie $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - 1 = 0$.

a) $12\pi$ b) $10\pi$ c) $16\pi$ d) $12\pi^2$ e) $10\pi^2$ f) $16\pi^2$

**AM 241** Să se determine parametrul $m$ aşa încât volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei

$$f : [1,2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\left(x - \frac{m}{x}\right)$$

în jurul axei $Ox$ să fie egal cu volumul unei sfere de rază 1.

a) 3 b) 2 c) $-1$ d) $-2$ e) 4 f) $-3$

**AM 242** Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei $Ox$ a graficului funcţiei $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln(1+x)}}{x}.$$

a) $\pi \ln \dfrac{5}{\sqrt[3]{4}}$ b) $\pi \ln \dfrac{4}{\sqrt[3]{3}}$ c) $\dfrac{3\pi}{\sqrt[3]{4}}$

d) $\dfrac{4\pi}{\sqrt[3]{3}}$ e) $\pi \ln \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ f) $\pi \ln \dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$

**AM 243** Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei $Ox$ a graficului funcţiei $f : [1,3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+4}}.$$

a) $\pi \ln \dfrac{5}{13}$ b) $3\pi \ln \dfrac{13e}{5}$ c) $\pi \ln \dfrac{5}{13}$

d) $3\pi \ln \dfrac{5e}{13}$ e) $2\pi \ln \dfrac{13}{5e}$ f) $2\pi \ln \dfrac{5e}{13}$

# ANEXE

## Subiectele date la admitere în anii 2014-2023 cu rezolvările integrale

**SESIUNEA: IULIE, DATA 22.07.2014** **A**

**1.(8p)** Fie ecuaţia $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x+7}=3$. Să se determine suma modulelor rădăcinilor ecuaţiei.

a) 1 b) 29 c) 36 d) 25 e) 37

**2.(10p)** Să se calculeze

$$E=\sum_{i=1}^{2014}\left[\left(1+\frac{1}{i}\right)\sum_{k=1}^{i}k!(k^2+1)\right].$$

a) $2014!$ b) $2014!-1$ c) $2015!$ d) $2015!-2$ e) $2016!-2$

**3.(8p)** Fie matricea $A=(a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ cu elementele date de

$$a_{ij}=\begin{cases}(-1)^{i+j}, \text{ dacă } i=j,\\ (-1)^{i+j}C_j^i, \text{ dacă } i<j,\\ 0, \text{ dacă } i>j,\end{cases}$$

unde $C_j^i$ reprezintă combinări de $j$ luate câte $i$. Să se calculeze $A^{-1}$.

a) $\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-1&2&-3\\0&-1&3\\0&0&-1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}1&-2&-3\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}$

**4.(7p)** Se consideră grupul $(\mathcal{M},\cdot)$, unde

$$\mathcal{M}=\left\{A(m)=\begin{pmatrix}1&m\\0&1\end{pmatrix},\ m\in\mathbb{Z}\right\}$$

şi " $\cdot$ " este operaţia de înmulţire a matricelor. Să se determine simetricul elementului $A(2014)$.

a) $A(1)$ b) $A(0)$ c) $A(-2014)$ d) $A(-1)$ e) $A\left(\frac{1}{2014}\right)$

**5.(9p)** Se consideră polinoamele

$$f = (X-2014)(X-2016) \text{ şi } g = (X-2015)^{2014} + X - 2001.$$

Să se determine restul împărţirii lui $g$ la $f$.

a) $X + 2014$ b) $X - 2000$ c) $X - 2016$ d) $X - 2014$ e) $X + 2016$

**6.(9p)** Ştiind că $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ şi $\sin a + \cos a = \frac{7}{5}$, să se afle tg $\frac{a}{2}$.

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{1}{2}$ şi $\frac{1}{3}$ e) $\sqrt{2}-1$

**7.(7p)** Dreapta $d : 2x + y - 2 = 0$ intersectează axele de coordonate în punctele $A$ şi $B$. Să se determine coordonatele punctului $C$ astfel ca punctul $G(3,2)$ să fie centrul de greutate al triunghiului $ABC$.

a) $(8,4)$ b) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ c) $(3,5)$ d) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ e) $(6,2)$

**8.(9p)** Fie funcţia $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$ arctg $x$. Să se determine asimptotele la graficul funcţiei $f$.

a) $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ b) $y = \frac{\pi}{2}x - 1$, $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ c) $y = -\frac{\pi}{2}x + 1$

d) nu există e) $y = -\frac{\pi}{2}x + 1$, $y = \frac{\pi}{2}x + 1$

**9.(7p)** Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$, unde $D$ este domeniul maxim de definiţie. Să se studieze derivabilitatea lui $f$ în punctul $x_0 = 0$. În caz afirmativ să se determine $f'(0)$.

a) $f$ este derivabilă în $x_0 = 0$ şi $f'(0) = -1$

b) $f$ este derivabilă în $x_0 = 0$ şi $f'(0) = 2$

c) $f$ este derivabilă în $x_0 = 0$ şi $f'(0) = 1$

d) $f$ nu este derivabilă în $x_0 = 0$

e) $f$ este derivabilă în $x_0 = 0$ şi $f'(0) = 0$

**10.(10p)** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax + a - 2}{x^2 + 1},$$

unde $a$ este un parametru real. Să se determine $a$ astfel încât funcţia să aibă un extrem în punctul $x = 1$.

a) $-2$ b) $1$ c) $-1$ d) $3$ e) $2$

**11.(9p)** Să se calculeze

$$\int_{-1}^{0} |4x^2 - 11x - 3| dx.$$

a) $\frac{435}{96}$ b) $\frac{135}{32}$ c) $\frac{221}{48}$ d) $\frac{37}{96}$ e) $\frac{231}{48}$

**12.(7p)** Calculaţi aria cuprinsă între graficul funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln^2 x$, axa $Ox$ şi dreptele $x = \frac{1}{e}$ şi $x = e$.

a) $\frac{e^2}{2} - \frac{5}{4e^2}$ b) $\frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}$ c) $\frac{e^2}{2} - \frac{3}{4e^2}$

d) $\frac{e^2}{4} - \frac{7}{4e^2}$ e) $\frac{e^2}{8} - \frac{5}{4e^2}$

SOLUŢII AC+ETC 2014

**1.** Punem condiţia de existenţă $x+7 \geq 0$ şi obţinem $x \in [-7, +\infty)$.

Notăm $\sqrt[3]{2-x} = u$ şi $\sqrt{x+7} = v$ şi atunci avem $2 - x = u^3$ şi $x + 7 = v^2$, de unde obţinem sistemul

$$\begin{cases} u^3 + v^2 = 9 \\ u + v = 3 \end{cases}$$

cu soluţiile $u_1 = 0$, $v_1 = 3$, $u_2 = 2$, $v_2 = 1$, $u_3 = -3$ şi $v_3 = 6$, adică $x_1 = 2$, $x_2 = -6$ şi $x_3 = 29$.

În concluzie, suma modulelor rădăcinilor ecuaţiei este

$$|2| + |-6| + |29| = 37.$$

Răspuns corect: e).

**2.**

$$\begin{aligned}
E &= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \left(1 + \frac{1}{i}\right) \sum_{k=1}^{i} k![(k+1)^2 - 2(k+1) + 2] \right\} = \\
&= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \left(1 + \frac{1}{i}\right) \sum_{k=1}^{i} [k!(k+1)(k+1) - 2k!(k+1) + 2k!] \right\} = \\
&= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \left(1 + \frac{1}{i}\right) \left[ \sum_{k=1}^{i} [(k+1)!(k+1)] - 2\sum_{k=1}^{i} [(k+1)! - k!] \right] \right\} = \\
&= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \left(1 + \frac{1}{i}\right) \left[ \sum_{k=1}^{i} [(k+1)!(k+2-1)] - 2[(i+1)! - 1] \right] \right\} = \\
&= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \frac{1+i}{i} \left[ \sum_{k=1}^{i} [(k+2)! - (k+1)!] - 2(i+1)! + 2 \right] \right\} = \\
&= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \frac{1+i}{i} [(i+2)! - 2 - 2(i+1)! + 2] \right\} = \\
&= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \frac{1+i}{i} [(i+1)!(i+2) - 2(i+1)!] \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{2014}\left[\frac{1+i}{i}(i+1)!i\right] = \sum_{i=1}^{2014}[(1+i)(i+1)!] = \\ &= \sum_{i=1}^{2014}[(2+i-1)(i+1)!] = \sum_{i=1}^{2014}[(2+i)! - (i+1)!] = \\ &= 2016! - 2 \end{aligned}$$

Răspuns corect: e).

**3.** Cum

$$a_{11} = (-1)^{1+1} = 1, \quad a_{22} = (-1)^{2+2} = 1, \quad a_{33} = (-1)^{3+3} = 1,$$

$$a_{12} = (-1)^{1+2}C_2^1 = -2, \quad a_{13} = (-1)^{1+3}C_3^1 = 3, \quad a_{23} = (-1)^{2+3}C_3^2 = -3,$$

$$a_{21} = 0, \quad a_{31} = 0, \quad a_{32} = 0,$$

rezultă că

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şi atunci

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Răspuns corect: b).

**4.** Simetricul elementului

$$A(2014) = \begin{pmatrix} 1 & 2014 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

în raport cu înmulţirea matricelor este

$$[A(2014)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2014 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(-2014).$$

Răspuns corect: c).

**5.** Cum restul împărţirii polinomului $g$ la $f$ este un polinom de grad cel mult 1, din Teorema împărţirii cu rest avem

$$g = f \cdot q + ax + b,\ a, b \in \mathbb{R},$$

unde $q$ este câtul împărţirii, adică

$$(x - 2015)^{2014} + x - 2001 = (x - 2014)(x - 2016) \cdot q + ax + b.$$

Pentru $x = 2014$ şi $x = 2016$, ecuaţia precedentă ne conduce la sistemul

$$\begin{cases} 2014a + b = 14 \\ 2016a + b = 16 \end{cases}$$

cu soluţia $a = 1$ şi $b = -2000$.

În concluzie, restul căutat este $X - 2000$.

Răspuns corect: b).

**6.** Cum $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ rezultă că $\frac{a}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right)$, iar $\operatorname{tg} \frac{a}{2} \in \left(0, \sqrt{2} - 1\right)$, deoarece

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} + 2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - 1 = 0,$$

adică $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

Deci, relaţia din enunţ este echivalentă cu

$$\frac{2\operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} = \frac{7}{5}, \quad \text{unde} \quad \operatorname{tg} \frac{a}{2} \in \left(0, \sqrt{2} - 1\right),$$

adică

$$6\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} - 5\operatorname{tg} \frac{a}{2} + 1 = 0,$$

de unde obţinem că $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{1}{3}$ este singura soluţie.

Răspuns corect: a).

**7.** Dreapta $d$ intersectează axele de coordonate în punctele $A(1,0)$ şi $B(0,2)$. Cum punctul $G$ este centrul de greutate al $\triangle ABC$, rezultă că

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3 = \frac{1+0+x_C}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x_C = 8$$

şi

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 2 = \frac{0+2+y_C}{3} \quad \Leftrightarrow \quad y_C = 4.$$

Răspuns corect: a).

**8.** Cum $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, rezultă că funcţia $f$ nu are asimptote orizontale. În continuare, verificăm dacă $f$ are asimptote oblice, adică asimptote de forma $y = mx + n$, unde

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2}$$

şi

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[ f(x) \mp \frac{\pi}{2} x \right] = \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} x \left( \operatorname{arctg} x \mp \frac{\pi}{2} \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \mp \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{x^2}{1+x^2} = -1. \end{aligned}$$

În concluzie, $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ este asimptotă oblică la $+\infty$ şi $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ este asimptotă oblică la $-\infty$.

Răspuns corect: b).

**9.** Deoarece

$$\begin{aligned} f'_s(0) &= \lim_{x\nearrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\nearrow 0}\frac{\sqrt{\sin x^2}}{x}=\lim_{x\nearrow 0}\sqrt{\frac{\sin x^2}{x^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2}}{x}= \\ &= \lim_{x\nearrow 0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\nearrow 0}\frac{-x}{x}=-1 \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} f'_d(0) &= \lim_{x\searrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\searrow 0}\frac{\sqrt{\sin x^2}}{x}=\lim_{x\searrow 0}\sqrt{\frac{\sin x^2}{x^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2}}{x}= \\ &= \lim_{x\searrow 0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\searrow 0}\frac{x}{x}=1, \end{aligned}$$

rezultă că $f$ nu este derivabilă în 0.

Răspuns corect: d).

**10.** Cum $f$ admite un extrem în punctul $x=1$, rezultă că $f'(1)=0$.
Dar

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a(x^2+1)-(ax+a-2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}= \\ &= \frac{ax^2+a-2ax^2-2ax+4x}{(x^2+1)^2}= \\ &= \frac{-ax^2+(4-2a)x+a}{(x^2+1)^2}, \end{aligned}$$

ceea ce ne conduce la ecuaţia $4-2a=0$ cu soluţia reală $a=2$.

Răspuns corect: e).

**11.** Deoarece

$$|4x^2-11x-3|=\begin{cases} 4x^2-11x-3\ , \text{ dacă } x\in\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]\cup[3,\infty) \\ -4x^2+11x+3\ , \text{ dacă } x\in\left(-\frac{1}{4},3\right)\ , \end{cases}$$

integrala devine

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{4}}(4x^2-11x-3)dx+\int_{-\frac{1}{4}}^{0}(-4x^2+11x+3)dx=$$

$$= \left(4 \cdot \frac{x^3}{3} - 11 \cdot \frac{x^2}{2} - 3x\right)\Big|_{-1}^{-\frac{1}{4}} + \left(-4 \cdot \frac{x^3}{3} + 11 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x\right)\Big|_{-\frac{1}{4}}^{0} = \frac{221}{48} \ .$$

Răspuns corect: c).

**12.** Folosind formula de integrare prin părţi de două ori, obţinem

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{1}{e}}^{e} x \ln^2 x dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln^2 x dx = \frac{x^2}{2} \ln^2 x\Big|_{\frac{1}{e}}^{e} - \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{x^2}{2} (\ln^2 x)' dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \int_{\frac{1}{e}}^{e} x \ln x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \frac{x^2}{2} \ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{e} - \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{x^2}{2} (\ln x)' dx = -\frac{1}{e^2} + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{e}}^{e} x dx = \\ &= -\frac{1}{e^2} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4e^2} = \frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2} \ . \end{aligned}$$

Răspuns corect: b).

**SESIUNEA: IULIE, DATA 22.07.2015** **A**

**1.(7p)** Fie ecuaţia $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{8-\sqrt{x}} = 3$. Să se determine suma rădăcinilor ecuaţiei.

a) $S = -49$ b) $S = 49$ c) $S = 0$ d) $S = -48$ e) $S = 48$

**2.(9p)** Fie şirul $(x_n)_{n>1}$ cu termenul general

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{C_{n+1}^2}\right), \ n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$

Să se determine suma tuturor elementelor mulţimii

$$M = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} : \frac{1}{2} \leq x_n \leq \frac{2}{3} \right\}.$$

a) 7 b) 18 c) 9 d) 20 e) 12

**3.(9p)** Fie mulţimile

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z-2| = 2 \text{ şi } \left[ \frac{1}{|z-3|} \right] = 1 \right\}, \quad P = \{|z| : z \in M\}.$$

Atunci:

a) $P \subset \left( 4, \frac{\sqrt{70}}{2} \right]$ b) $P = \left( 4, \frac{35}{8} \right)$ c) $P = \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$

d) $P \subset (1, 4]$ e) $P = \left( 4, \frac{\sqrt{75}}{2} \right)$

**4.(8p)** Să se determine mulţimea valorilor parametrului real $m$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} mx - 2y = 1 \\ -2x + y = m \\ x + my = -2 \end{cases}$$

este compatibil.

a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ c) $\{-1\}$ d) $\{\pm 1, 2\}$ e) $\{1\}$

**5.(7p)** Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c, a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine $(b+c)^a$ ştiind că restul împărţirii polinomului $f$ la $X^2+2$ să fie $X+1$ şi restul împarţirii lui $f$ la $X+1$ este 3.

a) 49 b) 32 c) $\frac{1}{64}$ d) 64 e) $-27$

**6.(10p)** Fie $OA$ şi $OB$ două raze perpendiculare în cercul de centru $O$ şi rază $2\sqrt{5}$. Să se calculeze latura pătratului $MNPQ$, unde $Q \in (OA), P \in (OB)$, iar $M$ şi $N$ aparţin arcului mic $AB$.

a) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ b) $\sqrt{5}$ c) $2\sqrt{2}$ d) $2$ e) $\sqrt{2}$

**7.(8p)** Fie $C$ simetricul punctului $A(1,2)$ faţă de punctul $B(3,4)$. Prin $C$ se duce o dreaptă $d$ ce intersectează axa $Ox$ în punctul $P$. Să se determine toate valorile pantei dreptei $d$ astfel încât aria triunghiului $APC$ să fie egală cu 4.

a) $-3, 1$ b) $\frac{6}{5}, \frac{6}{7}$ c) $-2, 0$ d) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}$ e) $1, \frac{6}{5}$

**8.(9p)** Să se determine

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - x\ln(e^x+1)).$$

a) $\infty$ b) $0$ c) $1$ d) $-\infty$ e) nu există

**9.(10p)** Să se calculeze integrala

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{3-x}}\, dx.$$

a) $\frac{\pi}{2}+1$ b) $\frac{\pi}{2}-1$ c) $\pi+1$ d) $\pi-\frac{1}{2}$ e) $\frac{\pi-1}{2}$

**10.(8p)** Să se determine aria figurii plane situată în cadranul IV, mărginită de parabola $y^2 = 9-2x$ şi de dreapta $2x-3y=9$.

a) $9$ b) $\frac{9}{2}$ c) $18$ d) $\frac{9}{4}$ e) $24$

**11.(8p)** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = (x^2-2x+1)e^x$. Să se determine mulţimea absciselor punctelor de extrem local ale funcţiei $f$.

a) $\{-1,0\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0,1\}$ d) $\{-1,1\}$ e) $\{1\}$

**12.(7p)** Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=xlnx$. Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul de abscisă 1.

a) $2y-x+1=0$ b) $y-x-1=0$ c) $y+x=0$
d) $y-x+1=0$ e) $y-2x+1=0$

SOLUŢII AC+ETC 2015

**1.** Notând $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}=u$, $\sqrt[3]{8-\sqrt{x}}=v$ şi eliminând $x$ din cele două relaţii, se obţine:

$$u+v=3, u^3+v^3=9,$$

cu soluţiile $u=2,v=1$ şi $u=1,v=2$. Rezultă $x=49$ sau $x=0$.

Răspuns corect: b).

**2.** Avem succesiv:

$$x_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{C_{n+1}^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{C_{k+1}^2}\right)$$

$$=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+2}{k(k+1)}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$$

$$=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+2}{k+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\prod_{k=2}^{n}\frac{k+2}{k+1}=\frac{n+2}{3n}.$$

Rămâne de rezolvat în $\mathbb{N}$ inecuaţia:

$$\frac{1}{2}\le\frac{n+2}{3n}\le\frac{2}{3},$$

deci $n\in\{2,3,4\}$. Răspuns corect: c).

**3.** Considerăm numărul complex $z$ scris în forma algebrică, adică $z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}$. Din condiţia $\mid z - 2 \mid = 2$ se obţine $a^2 + b^2 = 4a$, adică $-a^2 + 4a = b^2 \geq 0$, ceea ce implică $a \in [0, 4]$.

Din a doua relaţie, $1 \leq \dfrac{1}{\mid z - 3 \mid} < 2$ rezultă $\dfrac{1}{4} < 9 - 2a \leq 1$, deci $a \in \left[4, \dfrac{35}{8}\right)$. Ţinând acum cont că $a \in [0, 4]$ avem unica soluţie $a = 4, b = 0$ sau $z = 4$, deci $P = \{4\}$.

Răspuns corect: d).

**4.** Din Teorema Kronecker-Capelli, sistemul este compatibil dacă şi numai dacă rang $A$ = rang $\bar{A}$. Cum rangul maxim al lui $A$ este 2, rezultă că determinantul lui $\bar{A}$ trebuie să fie 0, adică $m = 1$. Se verifică uşor că pentru $m = 1$ avem rang $A$ = rang $\bar{A} = 2$, deci sistemul este compatibil.

Răspuns corect: e).

**5.** Aplicând Teorema lui Bézout rezultă că $f(-1) = 3$ şi aplicând apoi Teorema împărţirii cu rest, rezultă că există polinomul $Q$ astfel încât

$$f(x) = (x^2 + 2)Q(x) + x + 1.$$

Coroborând acum cele două informaţii, avem $a - b + c = 4$. Înlocuind în polinomul $f$ pe $c = 4 - a + b$ si împărţindu-l la $X^2 + 2$ se obţine restul $(b - 2)X + 4 - 3a + b$, care trebuie sa coincidă cu $X + 1$. Se obţin $a = 2, b = 3, c = 5$.

Răspuns corect: d).

**6.** Notând cu $x$ lungimea segmentelor $[OQ]$ şi $[OP]$, cu $C$ proiecţia punctului $O$ pe latura $PQ$ şi cu $D$ proiecţia punctului $O$ pe latura $MN$ rezultă imediat că latura pătratului $MNPQ$ este $x\sqrt{2}$, $OC = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$, iar $OD = \dfrac{3x\sqrt{2}}{2}$. Aplicând Teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $OMD$ se obţine că $x = 2$, deci latura pătratului $MNPQ$ este $PQ = 2\sqrt{2}$.

Răspuns corect: c).

**7.** Cum $C$ este simetricul punctului $A(1,2)$ faţă de $B(3,4)$, se obţine imediat că $C(5,6)$. Fie $P(p,0)$, $p \in \mathbb{R}$. Atunci, aria triunghiului $APC$ se calculează astfel:

$$A_{\Delta APC} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ p & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |2p+2| = 4,$$

de unde rezultă că $p = 1$ sau $p = -3$. Dacă $p = 1$ atunci panta dreptei $AP$ este $m = \dfrac{3}{2}$, iar dacă $p = -3$ se obţine $m = \dfrac{3}{4}$.

Răspuns corect: d).

**8.** Făcând schimbarea de variabilă $e^x + 1 = y$, avem:

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 - x\ln(e^x+1)) = \lim_{y\to\infty} (\ln^2(y-1) - \ln(y-1)\ln y) = \lim_{y\to\infty} \ln(y-1)\cdot\ln\frac{y-1}{y}.$$

Din cauza nedeterminării $0\cdot\infty$, trecem unul din factori la numitorul celuilalt şi aplicăm apoi de două ori Regula lui l´ Hospital:

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\ln\dfrac{y-1}{y}}{\dfrac{1}{\ln(y-1)}} = \lim_{y\to\infty} \frac{-\ln^2(y-1)}{y} = \lim_{y\to\infty} \frac{-2}{y-1} = 0.$$

Răspuns corect: b).

**9.** Amplificând raportul din integrală cu $\sqrt{x-1}$ se obţine:

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{3-x}}\,dx = \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{(3-x)(x-1)}}\,dx = \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{1-(x-2)^2}}\,dx$$

$$= \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1-(x-2)^2}}\,dx - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1-(x-2)^2}}\,dx$$

$$= -\sqrt{1-(x-2)^2}\Big|_1^2 + \arcsin(x-2)\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Răspuns corect: b).

**10.** Punctele de intersecţie ale parabolei $y^2 = 9 - 2x$ cu dreapta $2x - 3y = 9$ sunt $A(0, -3)$ şi $B\left(\frac{9}{2}, 0\right)$. Cum graficul parabolei se află sub graficul dreptei pe tot interiorul intervalului $\left[0, \frac{9}{2}\right]$, aria suprafeţei determinate de parabolă şi dreaptă se calculează cu formula:

$$A = \int_0^{\frac{9}{2}} \left(\frac{2x-9}{3} + \sqrt{9-2x}\right) dx = \frac{x^2}{3}\Big|_0^{\frac{9}{2}} - 3x\Big|_0^{\frac{9}{2}} - \frac{1}{3}(9-2x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{9}{2}} = \frac{9}{4}.$$

Răspuns corect: d).

**11.** Ştiind că mulţimea punctelor de extrem local ale unei funcţii se găsesc printre soluţiile primei derivate, rezolvăm ecuaţia $f'(x) = 0$. Se obţin soluţiile $x = \pm 1$. Folosind tabelul de monotonie al funcţiei $f$ se observă că $x = -1$ este punct de maxim local, iar $x = 1$ este punct de minim local al funcţiei $f$.

Răspuns corect: d).

**12.** Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul de abscisă 1 este:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1).$$

Cum $f(1) = 0$ iar $f'(1) = 1$, se obţine $y = x - 1$.

Răspuns corect: d).

**SESIUNEA: IULIE, DATA 26.07.2016** **A**

**1.(8p)** Să se determine valoarea minimă $m$, respectiv valoarea maximă $M$, a funcţiei $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 - 3x + 2.$$

a) $m = -\dfrac{1}{4}$, $M = 0$ b) $m = 0$, $M = 42$ c) $m = -42$, $M = 0$

d) $m = 0$, $M = 2$ e) $m = -\dfrac{1}{4}$, $M = 2$

**2.(9p)** Să se calculeze suma

$$S = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{2016} \log_2 k^2} + \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{2016} \log_3 k^2} + ... + \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{2016} \log_{2016} k^2} - \frac{1}{3}\ .$$

a) $S = 0$ b) $S = \dfrac{2015}{3}$ c) $S = 2016$ d) $S = \dfrac{1}{6}$ e) $S = \dfrac{2}{3}$

**3.(7p)** Fie $X \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ astfel încât

$$X \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & -12 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Să se determine suma elementelor matricei $X$.

a) 11 b) 12 c) 10 d) 4 e) 5

**4.(8p)** Fie $G = (3, +\infty)$. Să se găsească valorile parametrilor reali $a$ şi $b$ astfel încât legea de compoziţie

$$x * y = xy - 3x - 3y + a$$

să determine pe $G$ o structură de grup abelian, iar aplicaţia $f : \mathbb{R} \to G$, $f(x) = e^x + b$ să fie morfism între grupul aditiv al numerelor reale $(\mathbb{R}, +)$ şi $(G, *)$.

a) $a = -12$, $b = 3$ b) $a = 3$, $b = 12$ c) $a = 12$, $b = 3$

d) $a = 12$, $b = -3$ e) $a = 3$, $b = -3$

**5.(7p)** Să se determine numărul de rădăcini întregi $n$ ale polinomul

$$X^3 + X^2 + X - 3.$$

a) 4 b) 0 c) 3 d) 1 e) 2

**6.(10p)** Să se determine mulţimea valorilor parametrului real $m$ pentru care nu există $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ astfel încât

$$\cos 4x + (m+3)(\sin x + \cos x)^2 - 3m - 2 = 0.$$

a) $m \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ b) $m \in [1, 2)$ c) $m = 2$
d) $m = 3$ e) $m \in (2, 3)$

**7.(9p)** În sistemul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(1, -2)$ şi $B(1, 3)$. Să se determine valoarea parametrului pozitiv $a$ pentru care punctul $P(2, a)$ aparţine bisectoarei unghiului $AOB$.

a) $10\sqrt{2} - 14$ b) $\frac{\sqrt{2}}{10}$ c) $14\sqrt{2} - 10$ d) $\frac{\sqrt{3}}{10}$ e) $\frac{1}{10}$

**8.(8p)** Să se calculeze

$$\lim_{x \searrow 0} x^x.$$

a) $\frac{1}{e}$ b) 0 c) 1 d) $\infty$ e) $e$

**9.(8p)** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - e \cdot x$. Să se determine imaginea mulţimii $\mathbb{R}$ prin $f$.

a) $[1, \infty)$ b) $[e, \infty)$ c) $(-\infty, 0]$ d) $[0, \infty)$ e) $\mathbb{R}$

**10.(8p)** Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} \cdot lnx$. Să se determine panta tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul $A(1, 0)$.

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) 1 e) $e$

**11.(8p)** Să se calculeze integrala

$$\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x(1+\sqrt{\ln x})^3}dx.$$

a) $\frac{5}{4}-2\ln 2$ b) $2\ln 2-\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{4}-\ln 4$ d) $\ln 4-\frac{5}{4}$ e) $2\ln 2-\frac{5}{6}$

**12.(10p)** Să se calculeze aria suprafeţei cuprinse între graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+4}}\ ,$$

axa $Ox$ şi dreptele $x=1$, respectiv $x=3$.

a) $\sqrt{13}-\sqrt{5}+2\ln\frac{\left(\sqrt{13}-3\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}$

b) $\sqrt{5}+\sqrt{13}-4\sqrt{2}+2\ln\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{13}-3\right)}{4}$

c) $13\sqrt{5}-4\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$

d) $4\sqrt{2}+\sqrt{13}-\sqrt{5}+2\ln\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{13}-3\right)}{4}$

e) $\sqrt{5}+\sqrt{13}-4\sqrt{2}-2\ln\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{13}-3\right)}{4}$

SOLUŢII AC+ETC 2016

**1.** Cum vârful parabolei asociate funcţiei $f(x)$ este $V\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$, minimul funcţiei pe intervalul $[1,3]$ este $m=-\frac{1}{4}$; în plus, $f(1)=0, f(3)=2$, deci maximul este $M=2$.

Răspuns corect: e).

**2.** Suma dată se poate scrie succesiv:

$$S=\frac{1}{\log_2 1+\log_2 2^2+...+\log_2 2016^2}+\frac{1}{\log_3 1+\log_3 2^2+...+\log_3 2016^2}+$$

$$+...+\frac{1}{\log_{2016} 1+\log_{2016} 2^2+...+\log_{2016} 2016^2}-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{\log_2 1^2\cdot 2^2\cdot...\cdot 2016^2}+\frac{1}{\log_3 1^2\cdot 2^2\cdot...\cdot 2016^2}+...+\frac{1}{\log_{2016} 1^2\cdot 2^2\cdot...\cdot 2016^2}-\frac{1}{3}$$

$$=\log_{1^2\cdot 2^2\cdot...\cdot 2016^2} 2\cdot 3\cdot...\cdot 2016-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Răspuns corect: d).

**3.** Considerând $X=\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$, ecuaţia devine:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & -12 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se obţin relaţiile $2a-4b+c=1, b=2, 5a-12b+3c=3$ de unde $a=0, b=2, c=9$, deci $X=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

Răspuns corect: a).

**4.** Din condiţia ca legea de compoziţie să fie asociativă se obţine $a=12$. Se observă că pentru această valoare a parametrului $a$ restul axiomelor grupului sunt îndeplinite. Folosind definiţia morfismului între două grupuri, $f(x+y)=f(x)\star f(y)$, avem succesiv:

$$f(x+y)=e^{x+y}+b$$

şi

$$f(x)\star f(y)=e^{x+y}+(b-3)e^x+(b-3)e^y+b^2-4b+12.$$

Egalând cele două expresii, se obţine $(b-3)(e^x+e^y+b+4)=0$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$, adică $b=3$.

Răspuns corect: c).

**5.** Se observă că suma coeficienţilor polinomului este 0, deci $x = 1$ este rădăcină a polinomului. Împărţind polinomul la $X - 1$ (sau folosind Schema lui Horner) se obţine câtul $X^2 + 2X + 3$ care, având discriminantul negativ, nu mai are rădăcini reale. Deci polinomul are o singură rădăcină întreagă.

Răspuns corect: d).

**6.** Ecuaţia dată se poate scrie sub forma:

$$-2\sin^2 2x + (m+3)\sin 2x - 2m + 2 = 0.$$

Notând $\sin 2x = t$, ecuaţia devine:

$$-2t^2 + (m+3)t - 2m + 2 = 0,$$

şi are rădăcinile $t_1 = 2, t_2 = \dfrac{m-1}{2}$. Cum prima rădăcină este în afara intervalului $[0, 1]$, rămâne ca şi a doua rădăcină să fie în afara aceluiaşi interval, adică $\dfrac{m-1}{2} < 0$ şi $\dfrac{m-1}{2} > 1$. Se obţine $m \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Răspuns corect: a).

**7.** Folosind proprietatea punctelor aflate pe bisectoarea unui unghi de a se afla la distanţe egale de laturile unghiului, punem condiţia $d(P, OB) = d(P, OA)$. Se găsesc ecuaţiile dreptelor $OA : y = -2x$ şi $OB : y = 3x$, deci distanţele de la punctul $P$ aflat pe bisectoare la acestea sunt:

$$d(P, OA) = \frac{|\, 4 + a \,|}{\sqrt{5}}, \quad d(P, OB) = \frac{|\, 6 - a \,|}{\sqrt{10}}.$$

Egalând cele două expresii se obţine $a = 10\sqrt{2} - 14$.

Răspuns corect: a).

**8.** Observăm că suntem în cazul nedeterminării $0^0$, deci avem succesiv:

$$\lim_{x \searrow 0} x^x = \lim_{x \searrow 0} e^{xlnx} = \lim_{x \searrow 0} e^{\frac{lnx}{\frac{1}{x}}}.$$

Aplicând Regula lui l´ Hospital, se obţine:

$$\lim_{x\searrow 0} e^{\frac{ln x}{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\searrow 0} e^{\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}} = e^{-\lim\limits_{x\searrow 0} x} = e^0 = 1.$$

Răspuns corect: c).

**9.** Soluţia ecuţiei $f'(x) = 0$ este $x = 1$ iar limitele la capetele domeniului de definiţie sunt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Folosind tabloul de variaţie al funcţiei, se obţine că $Imf = [0, \infty)$.

Răspuns corect: d).

**10.** Panta tangentei la graficul funţiei $f$ în punctul $A(1, 0)$ este $f'(1) = 1$.

Răspuns corect: d).

**11.** Folosind substituţia $\ln x = t, \dfrac{1}{x}\, dx = dt$, integrala devine:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{t}}{(1+\sqrt{t})^3}\, dt = 2\int_1^2 \frac{t}{2\sqrt{t}(1+\sqrt{t})^3}\, dt.$$

Se face apoi schimbarea de variabilă $1 + \sqrt{t} = s, \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\, dt = ds$ şi se obţine:

$$2\int_1^2 \frac{(s-1)^2}{s^3}\, ds = 2\left(\int_1^2 \frac{1}{s}\, ds - 2\int_1^2 \frac{1}{s^2}\, ds + \int_1^2 \frac{1}{s^3}\, ds\right) = 2\ln 2 - \frac{5}{4}.$$

Răspuns corect: d).

**12.** Observând că funcţia $f$ este pozitivă pe intervalul $[2, 3]$ şi negativă pe $[1, 2]$, aria se va calcula astfel:

$$A = \int_1^2 \frac{2-x}{\sqrt{x^2+4}}dx + \int_2^3 \frac{x-2}{\sqrt{x^2+4}}dx$$

$$= 2\ln(x+\sqrt{x^2+4})\Big|_1^2 - \sqrt{x^2+4}\Big|_1^2 + \sqrt{x^2+4}\Big|_2^3 - 2\ln(x+\sqrt{x^2+4})\Big|_2^3$$

$$= \sqrt{5} + \sqrt{13} - 4\sqrt{2} + 2\ln \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{13}-3\right)}{4} .$$

Răspuns corect: b).

**SESIUNEA: IULIE, DATA 25.07.2017** **A**

**1.(9p)** Fie $x_1$ şi $x_2$ soluţiile ecuaţiei

$$x^2 - 2a(x-1) - x(a+1) = -a,$$

unde $a$ este un parametru real. Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 - 1$.

a) $9a^2+1$ b) $9a^2-12a$ c) $9a^2-1$ d) $9a^2$ e) $9a^2-3a+12$

**2.(7p)** Să se determine numărul termenilor raţionali ai dezvoltării binomului

$$(\sqrt[3]{5} - \sqrt[5]{2})^{80} .$$

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

**3.(8p)** Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a-2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b-2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c-2)^2 \end{vmatrix}.$$

a) 0 b) $-4(b-a)(c-a)(c-b)$

c) $12(b-a)(c-a)(c-b)$ d) $4(b-a)(c-a)(b-c)$

e) $12(a-b)(c-a)(b-c)$

**4.(9p)** Fie mulţimea numerelor reale înzestrată cu legea de compoziţie

$$x * y = 2xy - 6(x+y) + 21$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Produsul soluţiilor ecuaţiei $2^x * 2^{-x} = 8$ este:

a) 0 b) $-1$ c) 1 d) 2 e) $\frac{1}{2}$

**5.(10p)** Să se determine restul împărţirii polinomului $(2X^3+X+1)^{2017}$ la polinomul $X^2-X+1$.

a) $X-1$ b) $X$ c) $X+1$ d) $-X+1$ e) $-X-1$

**6.(7p)** În paralelogramul $ABCD$, unghiurile $\widehat{BAC}$ şi $\widehat{ABC}$ au măsurile de $30^\circ$, respectiv $135^\circ$, iar lungimea laturii $AD$ este 3. Să se calculeze aria paralelogramului $ABCD$.

a) $\frac{9}{4}(3-\sqrt{3})$ b) $\frac{3}{2}(3-\sqrt{3})$ c) $\frac{9}{2}(\sqrt{3}+1)$
d) $\frac{9}{4}(\sqrt{3}-1)$ e) $\frac{9}{2}(\sqrt{3}-1)$

**7.(8p)** Prin punctul $A$ de intersecţie a dreptelor $d_1: x+y-2=0$ şi $d_2: 2x-y-4=0$ se duce o dreaptă $d$ paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=x$. Fie $P$ un punct oarecare al dreptei $d$, diferit de $A$. Să se calculeze raportul dintre distanţa de la $P$ la $d_1$ şi distanţa de la $P$ la $d_2$.

a) $2\sqrt{5}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{10}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ e) $2\sqrt{10}$

**8.(8p)** Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3x^4}{x^2+1}$. Să se calculeze

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(e^x)\right)^{\frac{1}{x}}.$$

a) $e^3$ b) $e$ c) 1 d) $e^2$ e) $\infty$

**9.(8p)** Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^{-x}$. Să se calculeze $f''(-1)$.

a) $7e$ b) $-7e$ c) $e$ d) $-3e$ e) $4e$

**10.(8p)** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - 4x|}$ . Să se determine mulţimea tuturor punctelor de extrem local ale funcţiei $f$.

a) $\{2\}$ b) $\{0, 2, 4\}$ c) $\{2, 4\}$ d) $\{0, 4\}$ e) $\emptyset$

**11.(8p)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\int_{-a}^{a} \frac{x^4}{e^x + 1}\, dx = -\frac{32}{5} .$$

a) 1 b) $-\sqrt[3]{3^2}$ c) $-3\sqrt[3]{3^2}$ d) 2 e) $-2$

**12.(10p)** Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei $Ox$ a graficului funcţiei $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln(1 + x)}}{x} .$$

a) $\frac{\pi}{3} \ln \frac{27}{4}$ b) $\frac{\pi}{3} \ln \frac{64}{3}$ c) $\frac{\pi}{3} \ln \frac{9}{4}$ d) $\frac{\pi}{3} \ln \frac{3\sqrt{3}}{4}$ e) $\pi \ln \frac{5}{\sqrt[3]{4}}$

SOLUŢII AC+ETC Iulie 2017

**1.** Deoarece ecuaţia din enunţ este echivalentă cu $x^2 - (3a + 1)x + 3a = 0$, se observă că $x_1 + x_2 = 3a + 1$ şi $x_1 x_2 = 3a$, de unde

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 1 = 9a^2.$$

Răspuns corect: d).

**2.** Termenul general din dezvoltarea binomului $(\sqrt[3]{5}-\sqrt[5]{2})^{80}$ fiind

$$T_{k+1}=C_{80}^{k}(\sqrt[3]{5})^{80-k}(\sqrt[5]{2})^{k}=C_{80}^{k}5^{\frac{80-k}{3}}2^{\frac{k}{5}},\quad k\in\overline{0,80},$$

el este număr raţional dacă şi numai dacă sunt satisfăcute simultan condiţiile:

$$\frac{80-k}{3}\in\mathbb{N}\quad \text{şi}\quad \frac{k}{5}\in\mathbb{N}\ ,$$

adică $k\in\{5,20,35,50,65,80\}$.

Răspuns corect: d).

**3.** Făcând operaţii cu coloane şi linii, determinantul poate fi scris

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a-2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b-2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c-2)^2 \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2:=C_2-C_1\\ C_3:=C_3-C_1}}{=} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & -4a+4 \\ b^2 & 2b+1 & -4b+4 \\ c^2 & 2c+1 & -4c+4 \end{vmatrix} \overset{C_3:=C_3+2C_2}{=}$$

$$=6\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 1 \\ b^2 & 2b+1 & 1 \\ c^2 & 2c+1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2:=L_2-L_1\\ L_3:=L_3-L_1}}{=} 6\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 1 \\ b^2-a^2 & 2(b-a) & 0 \\ c^2-a^2 & 2(c-a) & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=12(b-a)(c-a)(b-c).$$

Răspuns corect: c).

**4.** Ecuaţia din enunţ este echivalentă cu $2(2^x+2^{-x})=5$, care are soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=-1$, deci produsul lor este $-1$.

Răspuns corect: b).

**5.** Cum restul împărţirii polinomului $(2X^3+X+1)^{2017}$ la $X^2-X+1$ este un polinom de grad cel mult 1, din Teorema împărţirii cu rest avem

$$(2x^3+x+1)^{2017}=(x^2-x+1)\cdot Q(x)+ax+b,\ a,b\in\mathbb{R},$$

unde $Q$ este câtul împărţirii.

Fie $\omega$ o rădăcină a polinomului $X^2-X+1$. Atunci $\omega^3=-1$ şi $\omega^2-\omega+1=0$, adică $\omega^2=\omega-1$ şi înlocuind pe $x$ cu $\omega$ în relaţia de mai sus se obţine

$$(\omega-1)^{2017}=a\omega+b \quad \Leftrightarrow \quad (\omega^2)^{2017}=a\omega+b \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2=a\omega+b,$$

de unde rezultă că $a=1$ şi $b=-1$, deci restul căutat este $X-1$.

Răspuns corect: d).

**6.** Aplicând Teorema sinusurilor în triunghiul $ABC$ se obţine că

$$\frac{BC}{\sin(\widehat{BAC})}=\frac{AC}{\sin(\widehat{ABC})} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{1}{2}}{3}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{AC} \quad \Leftrightarrow \quad AC=3\sqrt{2}.$$

Cum $\mathrm{m}(\widehat{ACB})=15^\circ$ şi

$$\cos(15^\circ)=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\cdot\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

atunci din Teorema cosinusului avem că

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos(\widehat{ACB})=9(2-\sqrt{3})=\left[\frac{3\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)\right]^2,$$

adică

$$A_{ABCD}=AB\cdot BC\cdot\sin(\widehat{ABC})=\frac{9}{2}(\sqrt{3}-1).$$

Răspuns corect: e).

**7.** Cum $A$ este punctul de intersecţie al dreptelor $d_1$ şi $d_2$, atunci coordonatele lui se găsesc rezolvând sistemul format din ecuaţiile celor două drepte şi obţinem $A(2,0)$, iar ecuaţia dreptei $d$ este $y=x-2$.

Fie $P(p,p-2)\in d$, $p\neq 2$. Raportul cerut este

$$\frac{d(P,d_1)}{d(P,d_2)}=\frac{\frac{2|p-2|}{\sqrt{2}}}{\frac{|p-2|}{\sqrt{5}}}=\sqrt{10}.$$

Răspuns corect: c).

**8.** Funcţia $f$ poate fi scrisă

$$f(x)=\frac{3x^4}{x^2+1}=3x^2\cdot\frac{x^2}{x^2+1}=3x^2\cdot\frac{x^2+1-1}{x^2+1}=3x^2\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)$$

şi atunci

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(e^x)\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left[3e^{2x}\left(1-\frac{1}{e^{2x}+1}\right)\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}3^{\frac{1}{x}}e^2\left(1-\frac{1}{e^{2x}+1}\right)^{\frac{1}{x}}=e^2.$$

Răspuns corect: d).

**9.** Observând că $f'(x)=e^{-x}(2x-x^2)$ şi $f''(x)=e^{-x}(x^2-4x+2)$, rezultă că $f''(-1)=7e$.

Răspuns corect: a).

**10.** Explicitând modulul, funcţia $f$ devine

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-4x}\ , \text{ dacă } x\in(-\infty,0]\cup[4,+\infty)\\ \sqrt{-x^2+4x}\ , \text{ dacă } x\in(0,4),\end{cases}$$

iar derivata sa este

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{2\sqrt{x^2-4x}}\ , \text{ dacă } x\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty)\\ \dfrac{-x+2}{2\sqrt{-x^2+4x}}\ , \text{ dacă } x\in(0,4).\end{cases}$$

Din tabloul de variaţie al funcţiei se observă că punctele de extrem ale funcţiei sunt $\{0,2,4\}$.

Răspuns corect: b).

**11.** Notând integrala din enunţ cu $I$ şi făcând schimbarea de variabilă $-x=t$ obţinem

$$I=\int_a^{-a}-\frac{t^4}{e^{-t}+1}\,dt=\int_{-a}^{a}\frac{t^4e^t}{e^t+1}\,dt=\int_{-a}^{a}\frac{t^4(e^t+1-1)}{e^t+1}\,dt=$$

$$= \int_{-a}^{a} \left( t^4 - \frac{t^4}{e^t + 1} \right) dt = \frac{t^5}{5}\Big|_{-a}^{a} - I \quad \Leftrightarrow \quad I = \frac{a^5}{5}$$

Prin urmare, soluţia ecuaţia $\frac{a^5}{5} = -\frac{32}{5}$ este $a = -2$.

Răspuns corect: e).

**12.** Volumul căutat este

$$V = \pi \int_1^3 \frac{\ln(x+1)}{x^2}\, dx = \pi \int_1^3 \ln(x+1) \left( -\frac{1}{x} \right)' dx =$$

$$= \pi \left[ -\frac{1}{x} \ln(x+1)\Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{x(x+1)}\, dx \right] =$$

$$= \pi \left[ \frac{1}{3} \ln 2 + \int_1^3 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \right] = \frac{\pi}{3} \ln \frac{27}{4}\ .$$

Răspuns corect: a).

**SESIUNEA: SEPTEMBRIE, DATA 13.09.2017** **A**

**1.(8p)** Fie $x_1$ şi $x_2$ soluţiile ecuaţiei

$$\log_2(6x^2 - 11x + 6) = 0.$$

Să se determine $x_1 + x_2$.

a) $\frac{5}{6}$ b) 1 c) $\frac{11}{6}$ d) 8 e) 12

**2.(9p)** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ în care $a_1 = 1$ şi raţia $r = \frac{1}{2}$. Să se determine $a_5$.

a) 3 b) $\frac{5}{2}$ c) 4 d) 6 e) $\frac{9}{2}$

**3.(8p)** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze determinantul matricei $A^{2017}$.

a) 1 b) $2^{2017}$ c) $-2^{2017}$ d) 0 e) $-1$

**4.(9p)** Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = -1 \\ 2x + 2y + 3z = 2 \\ x - 2y - z = 4 \ . \end{cases}$$

a) $(-2, 1, 1)$ b) $(3, -2, -3)$ c) $(-5, -3, 6)$
d) $(0, -1, 0)$ e) $(-14, -21, 24)$

**5.(7p)** Fie polinomul $f = X^3 - 2X^2 + aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine $a$ şi $b$ ştiind că $-1$ este rădăcină a polinomului $f$ şi restul împărţirii polinomului $f$ la $X - 2$ este 6.

a) $a = 1$, $b = -1$ b) $a = 1$, $b = 4$ c) $a = 2$, $b = 4$
d) $a = 0$, $b = 3$ e) $a = -4$, $b = 1$

**6.(8p)** Să se calculeze tg $x$ ştiind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $\sin x = \frac{3}{5}$.

a) $-\frac{3}{4}$ b) 1 c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $-\frac{4}{5}$

**7.(10p)** Fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât punctul $Q(4, -1)$ aparţine dreptei

$$d : 2x + ay - 9 = 0.$$

Să se scrie ecuaţia dreptei ce conţine punctul $P(-1, 1)$ şi este paralelă cu dreapta $d$.

a) $y = x + 2$ b) $y = -x$ c) $y = 2x + 3$

d) $y = -2x - 1$ e) $y = 2x + 1$

**8.(8p)** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^4 + x^2 + 3$. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x^4}$.

a) $-2$ b) $0$ c) $\infty$ d) $1$ e) $2$

**9.(8p)** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cos x$. Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul de abscisă $x_0 = 0$.

a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = 0$

d) $y = -x$ e) $y = x + 1$

**10.(8p)** Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^x(x^2 - 2x + 1).$$

a) $\{-1, 0\}$ b) $\{-1, 1\}$ c) $\{0\}$ d) $\{0, 1\}$ e) $\emptyset$

**11.(10p)** Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x \ln^2 x,$$

axa $Ox$ şi dreptele $x = \dfrac{1}{e}$ şi $x = e$.

a) $\dfrac{e^2}{8} - \dfrac{3}{e^2}$ b) $\dfrac{e^2}{16} - \dfrac{7}{4e^2}$ c) $\dfrac{e^2}{2} - \dfrac{7}{4e^2}$

d) $\dfrac{e^2}{4} - \dfrac{5}{4e^2}$ e) $\dfrac{e^2}{8} - \dfrac{5}{2e^2}$

**12.(7p)** Să se calculeze integrala nedefinită

$$\int \frac{x - 3}{x^2 + 4x - 5} dx$$

pe un interval $I \subset (1, \infty)$.

a) $\frac{4}{3}\ln(x+5)-\frac{1}{3}\ln(x-1)+\mathcal{C},\ \mathcal{C}\in\mathbb{R}$

b) $\frac{1}{3}\ln(x+5)-\frac{4}{3}\ln(x-1)+\mathcal{C},\ \mathcal{C}\in\mathbb{R}$

c) $\frac{4}{3}\ln(x+1)+\frac{1}{3}\ln(x+5)+\mathcal{C},\ \mathcal{C}\in\mathbb{R}$

d) $\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{4}{3}\ln(x+5)+\mathcal{C},\ \mathcal{C}\in\mathbb{R}$

e) $\frac{1}{2}\ln(x+5)+\frac{4}{3}\ln(x-1)+\mathcal{C},\ \mathcal{C}\in\mathbb{R}$

SOLUŢII AC+ETC Septembrie 2017

**1.** Cum $6x^2-11x+6>0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, ecuaţia din enunţ este echivalentă cu $6x^2-11x+5=0$ şi atunci suma soluţiilor ei este $\frac{11}{6}$ .

Răspuns corect: c).

**2.** Termenul căutat este $a_5=a_1+4r=1+4\cdot\frac{1}{2}=3$.

Răspuns corect: a).

**3.** Cum $\det A=0$, rezultă că $\det(A^{2017})=(\det A)^{2017}=0$.

Răspuns corect: d).

**4.** Fie $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\2&2&3\\1&-2&-1\end{pmatrix}$ matricea asociată sistemului. Cum $\det A=1\neq 0$, rezultă că sistemul este compatibil determinat şi aplicând Formulele lui Cramer se obţine soluţia $x=-14$, $y=-21$ şi $z=24$.

Răspuns corect: e).

**5.** Din condiţiile $f(-1) = 0$ şi $f(2) = 6$ rezultă sistemul

$$\begin{cases} a - b = -3 \\ 2a + b = 6 \end{cases}$$

care are soluţia $a = 1$ şi $b = 4$

Răspuns corect: b).

**6.** Din Formula fundamentală a trigonometriei rezultă că $\cos x = \dfrac{4}{5}$, de unde se obţine că $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{3}{4}$.

Răspuns corect: d).

**7.** Cum $Q(4, -1)$ aparţine dreptei $d$ se obţine că $2 \cdot 4 + a \cdot (-1) - 9 = 0$, adică $a = -1$. Din faptul că dreapta căutată este paralelă cu dreapta $d$ rezultă că pantele lor sunt egale cu 2 şi prin urmare, ecuaţia ei este $y = 2x + 3$.

Răspuns corect: c).

**8.** Limita căutată poate fi scrisă

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x^4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4 + x^2 + 3}{x^4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 \left(2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x^4}\right)}{x^4} = 2.$$

Răspuns corect: e).

**9.** Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul de abscisă 0 este:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0).$$

Cum $f(0) = 0$ iar $f'(0) = 1$, se obţine $y = x$.

Răspuns corect: a).

**10.** Cum $f'(x) = e^x(x^2-1)$, rezultă că $x = \pm 1$ sunt cele două puncte de extrem ale funcţiei $f$.

Răspuns corect: b).

**11.** Aria căutată poate fi scrisă

$$A = \int_{\frac{1}{e}}^{e} x \ln^2 x dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln^2 x dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x\Big|_{\frac{1}{e}}^{e} - \int_{\frac{1}{e}}^{e} x \ln x dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{e} + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{e} x dx = \frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}.$$

Răspuns corect: d).

**12.** Integrala poate fi scrisă

$$\int \frac{x-3}{x^2+4x-5} dx = \int \frac{x-3}{(x-1)(x+5)} dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\, dx + \frac{4}{3}\int \frac{1}{x+5}\, dx = -\frac{1}{3}\ln(x-1) + \frac{4}{3}\ln(x+5) + \mathcal{C}.$$

Răspuns corect: a).

**SESIUNEA: IULIE, DATA 23.07.2018** **A**

**1.(7p)** Fie progresia geometrică $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, având termenii strict pozitivi şi raţia 2018. Dacă

$$S = \frac{a_1 + a_2}{a_2 + a_3} + \frac{a_2 + a_3}{a_3 + a_4} + \ldots + \frac{a_{2017} + a_{2018}}{a_{2018} + a_{2019}},$$

atunci:

a) $S = 1$ b) $S = 2017$ c) $S = \frac{2017}{2018}$ d) $S = 2018$ e) $S = \frac{2018}{2017}$

**2.(8p)** Fie mulţimea

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \cdot \overline{z} = 2 \text{ şi } \left| \frac{2z+3}{z-3i} \right| = 1 \right\}.$$

Dacă $S = \sum_{z \in A} z$, atunci:

a) $S = 1 - 2i$ b) $S = -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$ c) $S = 1 + 2i$

d) $S = 3$ e) $S = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

**3.(10p)** Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} 0 & n+1 & C_1^1 \\ C_2^1 & (n+1)^2 & C_2^2 \\ C_3^2 & (n+1)^3 & C_3^3 \end{vmatrix}.$$

a) $n(n+1)(n+2)$ b) $0$

c) $n(n+1)(2n-1)$ d) $n(n+1)(2n+1)$

e) $n(n-1)(n+2)$

**4.(9p)** Fie sistemul

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = m \\ 2x + 4y + 6z = -1 \\ -2x + 6y + 4z = 5. \end{cases}$$

Să se determine valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

a) $\left\{ -\frac{1}{10} \right\}$ b) $\left\{ \frac{1}{10} \right\}$ c) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{10} \right\}$

d) $\emptyset$ e) $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{10} \right\}$

**5.(8p)** Se consideră polinoamele

$$f = (X-2018)^{2017} + X - 2020 \text{ şi } g = (X-2017)(X-2019).$$

Să se determine restul împărţirii lui $f$ la $g$.

a) $4X - 8076$ b) $X + 2019$ c) $2X + 4038$

d) $2X - 2019$ e) $2X - 4038$

**6.(7p)** În triunghiul dreptunghic $ABC$ cu $m(\widehat{A}) = 90^\circ$, $m(\widehat{B}) = 30^\circ$ şi $AB = 6$ se înscrie pătratul ce are două vârfuri pe ipotenuză şi celelalte două, respectiv, pe câte o catetă. Să se afle lungimea laturii pătratului.

a) $1 + \sqrt{3}$ b) $\frac{12}{13}(4 - \sqrt{3})$ c) $\frac{6\sqrt{3} - 5}{2}$

d) $\frac{12}{13}(4\sqrt{3} - 3)$ e) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

**7.(9p)** Se dau punctele $A(0,1), B(1,1)$ şi $C(4,3)$. Fie $y = mx + n$ ecuaţia înălţimii triunghiului $ABC$ dusă din $A$. Să se calculeze $m \cdot n$.

a) $-\frac{3}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{5}{3}$ e) $1$

**8.(8p)** Se consideră funcţia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{4 - 3x^2}{x^3}.$$

Să se determine mulţimea valorilor funcţiei $f$.

a) $\mathbb{R}$ b) $[1, +\infty)$ c) $[-1, 1]$ d) $[-1, 2]$ e) $[-1, +\infty)$

**9.(10p)** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{-x}(ax + b),\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(0) = 1,\ f'(0) = 2$.

a) $a = 1$, $b = 1$ b) $a = 3$, $b = 1$ c) $a = 2$, $b = 1$

d) $a = -2$, $b = -1$ e) $a = 1$, $b = -1$

**10.(7p)** Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \operatorname{tg} x$, unde $D$ este domeniul maxim de definiţie a funcţiei. Să se calculeze

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(\operatorname{tg} x)}{3x^3} .$$

a) $-1$ b) $\frac{1}{3}$ c) $0$ d) $-\frac{1}{3}$ e) $-\frac{1}{9}$

**11.(8p)** Să se calculeze

$$\int_3^7 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-1}} .$$

a) $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}$ b) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{12}$ e) $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$

**12.(9p)** Să se calculeze aria suprafeţei cuprinsă între graficele funcţiilor $f, g : \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = \sin x$ şi $g(x) = \cos x$.

a) $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2} - 2$ c) $2\sqrt{2} - 1$ d) $4\sqrt{2} - 1$ e) $4\sqrt{2} - 2$

SOLUŢII AC+ETC Iulie 2018

**1.** Cum $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie geometrică, atunci suma poate fi scrisă

$$S = \frac{a_1 + a_1 r}{a_1 r + a_1 r^2} + \frac{a_1 r + a_1 r^2}{a_1 r^2 + a_1 r^3} + \ldots + \frac{a_1 r^{2016} + a_1 r^{2017}}{a_1 r^{2017} + a_1 r^{2018}} =$$

$$= \frac{a_1(1+r)}{a_1r(1+r)} + \frac{a_1r(1+r)}{a_1r^2(1+r)} + \ldots + \frac{a_1r^{2016}(1+r)}{a_1r^{2017}(1+r)} = \frac{1}{r} \cdot 2017 = \frac{2017}{2018} \ .$$

Răspuns corect: c).

**2.** Fie $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci relaţia $z \cdot \overline{z} = 2$ este echivalentă cu

$$a^2 + b^2 = 2. \tag{1}$$

Pe de altă parte, relaţia $\left|\frac{2z+3}{z-3i}\right| = 1$ poate fi scrisă

$$\left(\frac{2z+3}{z-3i}\right) \cdot \overline{\left(\frac{2z+3}{z-3i}\right)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{2a+2bi+3}{a+bi-3i}\right) \cdot \overline{\left(\frac{2a+2bi+3}{a+bi-3i}\right)} = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{2a+2bi+3}{a+bi-3i}\right) \cdot \left(\frac{2a+3-2bi}{a-bi+3i}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(2a+3)^2+4b^2}{a^2+(b-3)^2} = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad b = -2a - 1. \tag{2}$$

Rezolvând sistemul format din ecuaţiile (1) şi (2), se obţin două soluţii:

$$a_1 = \frac{1}{5},\ b_1 = -\frac{7}{5}, \qquad \text{de unde} \qquad z_1 = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$$

şi

$$a_2 = -1,\ b_2 = 1, \qquad \text{de unde} \qquad z_2 = -1 + i.$$

În concluzie, $S = z_1 + z_2 = -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$.

Răspuns corect: b).

**3.** Determinantul poate fi scris

$$\begin{vmatrix} 0 & n+1 & 1 \\ 2 & (n+1)^2 & 1 \\ 3 & (n+1)^3 & 1 \end{vmatrix} = (n+1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & n+1 & 1 \\ 3 & (n+1)^2 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_2 := C_2 - C_3}{=}$$

$$= (n+1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & n & 1 \\ 3 & (n+1)^2 - 1 & 1 \end{vmatrix} = n(n+1)(2n+1).$$

Răspuns corect: d).

**4.** Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

matricea asociată sistemului. Cum $\det A = 0$ şi determinantul principal este

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0,$$

rezultă că $\text{rang} A = 2$. Sistemul este incompatibil dacă şi numai dacă determinantul caracteristic este nenul, adică

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 3 & m \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 6 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad m \neq -\frac{1}{10}\ .$$

Răspuns corect: e).

**5.** Cum restul împărţirii polinomului $f$ la $g$ este un polinom de grad cel mult 1, din Teorema împărţirii cu rest avem

$$(x-2018)^{2017} + x - 2020 = (x-2017)(x-2019) \cdot Q(x) + ax + b,\ a, b \in \mathbb{R},$$

unde $Q$ este câtul împărţirii. Înlocuind in această relaţie pe $x$ cu 2017, respectiv 2019, se obţin relaţiile din următorul sistem

$$\begin{cases} 2017a + b = -4 \\ 2019a + b = 0, \end{cases}$$

de unde $a = 2$ şi $b = -4038$, adică restul împărţirii lui $f$ la $g$ este $2X - 4038$.

Răspuns corect: d).

**6.** Fie $D \in [AB]$, $E \in [AC]$, $F, G \in [BC]$ astfel încât $DEFG$ este pătratul a cărei latură ni se cere. Notăm lungimea acestei laturi cu $x$.

Aplicând Teorema unghiului de 30° în triunghiul $BDG$ cu $\mathrm{m}(\widehat{BGD}) = 90°$, rezultă că $BD = 2x$, iar

$$\cos(\widehat{DBG}) = \frac{BG}{BD} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BG}{2x} \quad \Leftrightarrow \quad BG = x\sqrt{3}.$$

Analog, în triunghiul $ABC$ cu $\mathrm{m}(\widehat{BAC}) = 90°$, avem

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{BC} \quad \Leftrightarrow \quad BC = 4\sqrt{3},$$

iar în triunghiul $EFC$ cu $\mathrm{m}(\widehat{EFC}) = 90°$ şi $\mathrm{m}(\widehat{FCE}) = 60°$, avem

$$\mathrm{tg}\ (\widehat{FCE}) = \frac{EF}{FC} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{x}{FC} \quad \Leftrightarrow \quad FC = \frac{x\sqrt{3}}{3}.$$

Dar $BC = BG + GF + FG$, adică $\dfrac{x\sqrt{3}}{3} + x + x\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$, de unde se obţine $x = \dfrac{12}{13}(4 - \sqrt{3})$.

Răspuns corect: b).

**7.** Cum panta dreptei $BC$ este $\dfrac{2}{3}$ , rezultă că panta înălţimii căutate este $-\dfrac{3}{2}$ , iar ecuaţia ei este $y = -\dfrac{3}{2}x + 1$. Deci, $m \cdot n = -\dfrac{3}{2}$.

Răspuns corect: a).

**8.** Cum funcţia $f$ este descrescătoare pe intervalul $[1, 2]$ şi crescătoare pe intervalul $(2, \infty)$, $f(1) = 1$, $f(2) = -1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, rezultă că $Imf = [-1, 1]$.

Răspuns corect: c).

**9.** Din $f(0) = 1$, rezultă $b = 1$, iar cum $f'(x) = e^{-x}(-ax - b + a)$ se obţine că $a = 3$.

Răspuns corect: b).

**10.** Aplicând Regula lui l´ Hospital, se obţine

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\text{tg } x)}{3x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg } x-\text{tg }(\text{tg } x)}{3x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\cos^2(\text{tg } x)}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{9x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{9x^2\cos^2 x}\left(1-\frac{1}{\cos^2(\text{tg } x)}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}^2\ (\text{tg } x)}{9x^2\cos^2 x}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}^2\ (\text{tg } x)}{\text{tg }^2x}\cdot\frac{\text{tg }^2x}{x^2}\cdot\frac{1}{9\cos^2 x}=-\frac{1}{9}\ .$$

Răspuns corect: e).

**11.** Făcând schimbarea de variabilă $\sqrt{x-1}=t$, rezultă că $x=t^2+1$ şi integrala din enunţ devine

$$\int_3^7\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-1}}=2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\frac{1}{t^2+2}\ dt=\frac{2}{\sqrt{2}}\ \text{arctg}\ \frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{12}.$$

Răspuns corect: a).

**12.** Aria suprafeţei căutate poate fi scrisă

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)dx+\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}(\cos x-\sin x)dx=4\sqrt{2}-2.$$

Răspuns corect: e).

**SESIUNEA: SEPTEMBRIE, DATA 17.09.2018** **A**

**1.(8p)** Să se găsească soluţiile reale ale ecuaţiei

$$\sqrt{1-x-2x^2}=-x-1.$$

a) 1 b) $-1$ c) 4 d) 0 şi 2 e) 3

**2.(9p)** Care este probabilitatea să se extragă un număr impar dintre numerele de la 1 la 101.

a) $\frac{50}{101}$ b) $\frac{51}{100}$ c) $\frac{49}{100}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{51}{101}$

**3.(8p)** Se consideră matricele

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \text{ şi } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Să se determine valoarea expresiei $B - \frac{1}{2}(A + A^t)$.

a) $O_2$ b) $A$ c) $B$ d) $-I_2$ e) $I_2$

**4.(10p)** Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 3^2 & 1^2 & 2^2 \\ 2^2 & 3^2 & 1^2 \end{vmatrix}.$$

a) $2^3 \cdot 7^3$ b) $2 \cdot 7^3$ c) $2^3 \cdot 7$ d) $-2 \cdot 7^3$ e) $-2^3 \cdot 7$

**5.(8p)** Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie

$$x * y = xy + 2x + 2y + 2,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Să se rezolve ecuaţia

$$x * x = -2.$$

a) 1 b) $-2$ c) 0 d) 4 e) $-1$

**6.(8p)** Fie $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ astfel ca $\operatorname{tg} x = -2$. Să se calculeze $\cos x$.

a) $-\frac{1}{5}$ b) $-\sqrt{5}$ c) $-\frac{1}{3}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

**7.(8p)** Se dau punctele $A(2,3), B(-1,2)$ şi $C(3,6)$. Fie $y = mx + n$ ecuaţia medianei dusă din $A$ în triunghiul $ABC$. Să se calculeze $m + n$.

a) $-6$ b) $3$ c) $-4$ d) $-3$ e) $4$

**8.(10p)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))^x$, unde $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 1}.$$

a) $1$ b) $e^2$ c) $\infty$ d) $e$ e) $e^{-2}$

**9.(8p)** Fie funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x \ln x$. Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul de abscisă 1.

a) $y = -x$ b) $y = x + 1$ c) $y + 1 = x$
d) $y = x$ e) $y = 2(x - 1)$

**10.(7p)** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{mx + 1}{x^2 + 1}\ .$$

Să se determine toate valorile parametrului real nenul $m$ astfel ca funcţia $f$ să aibă două puncte de extrem.

a) $\{-1\}$ b) $(-1, 1)$ c) $(0, 1)$ d) $\mathbb{R}^*$ e) $[0, +\infty)$

**11.(7p)** Să se calculeze integrala

$$\int_0^{\pi} (x \cos x)^2 \, dx.$$

a) $\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi^3}{6}+\frac{3\pi}{4}$ c) $\frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{\pi^2}{3}+\frac{\pi}{4}$

**12.(8p)** Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\left(10x-\frac{3}{x}\right)\ln x,$$

axa $Ox$ şi dreptele $x=1$ şi $x=e^2$.

a) $\frac{15e^4-7}{2}$ b) $10e^2-\frac{7}{2}$ c) $\frac{15e^2-1}{2}$

d) $10e^4-\frac{7}{2}$ e) $\frac{7e^4-15}{2}$

SOLUŢII AC+ETC Septembrie 2018

**1.** Punând condiţiile de existenţă în ecuaţia dată se obţine

$$\begin{cases} 1-x-2x^2\geq 0 \\ -x-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left[-1,\frac{1}{2}\right] \\ x\in(-\infty,-1] \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=-1$$

care este soluţie a ecuaţiei.

Răspuns corect: b).

**2.** Cum de la 1 la 101 sunt 51 de numere impare, probabilitatea cerută este $\frac{51}{101}$.

Răspuns corect: e).

**3.** Expresia din enunţ poate fi scrisă

$$B-\frac{1}{2}(A+A^t)=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}2&9\\-7&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-7\\9&4\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&2\\2&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-I_2.$$

Răspuns corect: d).

**4.** Aplicând Regula triunghiului, valoarea determinantului este

$$\begin{vmatrix}1^2&2^2&3^2\\3^2&1^2&2^2\\2^2&3^2&1^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&9\\9&1&4\\4&9&1\end{vmatrix}=1+9^3+4^3-36-36-36=2\cdot 7^3.$$

Răspuns corect: b).

**5.** Ecuaţia din enunţ poate fi scrisă $x^2+4x+2=-2$, care are soluţia $x=-2$.

Răspuns corect: b).

**6.** Cum

$$\operatorname{tg} x=-2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\sin x}{\cos x}=-2 \quad\Leftrightarrow\quad \sin x=-2\cos x.$$

Aplicând Teorema fundamentală a trigonometriei se obţine $\cos x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. Dar $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, deci $\cos x=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Răspuns corect: e).

**7.** Dacă $M$ este mijlocul segmentului $[BC]$, atunci $M(1,4)$ şi ecuaţia mediani din $A$ este $y=5-x$, de unde rezultă că $m=-1$ şi $n=5$. Deci, $m+n=4$.

Răspuns corect: e).

**8.** Limita căutată poate fi scrisă

$$\lim_{x\to\infty}(f(x))^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+5}{x^2-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+2x+5}{x^2-1}-1\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+6}{x^2-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2x+6}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2x+6}}\right]^{\frac{2x^2+6x}{x^2-1}}=e^2.$$

Răspuns corect: b).

**9.** Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul de abscisă 1 este:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1).$$

Cum $f(1)=0$ iar $f'(1)=1$, se obţine $y=x-1$.

Răspuns corect: c).

**10.** Cum $f'(x)=\dfrac{-mx^2-2x+m}{(x^2+1)^2}$, rezultă că $f$ are două puncte de extrem dacă şi numai dacă discriminantul ecuaţiei $-mx^2-2x+m=0$ este pozitiv. În concluzie,

$$\Delta=4+4m^2>0 \quad\Leftrightarrow\quad m\in\mathbb{R}^*.$$

Răspuns corect: d).

**11.** Aplicând Formula de integrare prin părţi, integrala din enunţ devine

$$\int_0^\pi(x\cos x)^2\,dx=\int_0^\pi x^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\int_0^\pi\frac{x^2}{2}\,dx+\frac{1}{2}\int_0^\pi x^2\cos 2x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^\pi+\frac{1}{2}\int_0^\pi x^2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'dx=\frac{\pi^3}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi x\sin 2x\,dx\right)=$$

$$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{2}\int_0^\pi x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'dx=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^\pi+\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^\pi\right)=\frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi}{4}.$$

Răspuns corect: c).

**12.** Cum funcţia $f$ este pozitivă pe intervalul $[1, e^2]$, aria căutată poate fi scrisă

$$A = \int_1^{e^2} \left(10x - \frac{3}{x}\right) \ln x \ dx = 10 \int_1^{e^2} x \ln x \ dx - 3 \int_1^{e^2} \frac{1}{x} \ln x \ dx.$$

Pentru prima integrala se foloseşte Formula de integrare prin părţi, iar pentru a doua integrală se face schimbarea de variabilă $\ln x = u$, de unde $\frac{1}{x} \ dx = du$ şi atunci se obţine

$$A = 10 \int_1^{e^2} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x \ dx - 3 \int_0^2 u \ du =$$

$$= 10 \left(\frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^{e^2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^{e^2}\right) - 3 \cdot \frac{u^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{15e^4 - 7}{2} \ .$$

Răspuns corect: a).

**SESIUNEA: IULIE, DATA 22.07.2019** **A**

**1.(8p)** Fie mulţimile

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (a+2)x + 2a = 0\} \quad \text{şi} \quad B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 4ax + 4a^2 = 0\}.$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului real $a$, ştiind că $A \cap B$ are un singur element.

a) $\{0, 2\}$ b) $\{2\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{0\}$ e) $\{1\}$

**2.(7p)** Într-o clasă sunt 13 elevi, dintre care 7 sunt fete şi 6 sunt băieţi. În câte moduri se poate forma o grupă de 3 fete şi 2 băieţi?

a) 50 b) 6300 c) 240

d) 1050 e) 525

**3.(10p)** Fie $a$, $b$, $c$ lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic $ABC$ cu $a > b > c$, $\mathrm{m}(\widehat{C}) = 15^\circ$ şi

$$\begin{vmatrix} c^2+ac-2a-4 & ac-2a & a^2-b^2-2c \\ b^2+ab-2a-4 & a^2-c^2-2b & ab-2a \\ b^2c+2bc+bc^2 & a^2b-b^3 & a^2c-c^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Să se determine ariile triunghiurilor de acest fel.

a) $1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ , $1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $4+2\sqrt{3}$ , $4-2\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{3}$ , $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ d) 2 , 1

e) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ , $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

**4.(8p)** Pe mulţimea numerelor reale se definesc legile de compoziţie

$$x \perp y = x+y-1 \quad \text{şi} \quad x \top y = 2xy-2(x+y)+3.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax+b$ să fie un izomorfism între corpurile $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ şi $(\mathbb{R}, \perp, \top)$.

a) $a = b = 1$ b) $a = b = \dfrac{1}{2}$ c) $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1$

d) $a = 1$, $b = 0$ e) $a = 0$, $b = 1$

**5.(8p)** Să se determine parametrii reali $m$ şi $n$ astfel încât polinomul

$$(X+1)^{17} + mX^2 + n$$

să se dividă cu polinomul $X^2+X+1$.

a) $m = 0$, $n = -1$ b) $m = -1$, $n = 0$ c) $m = -1$, $n = -1$

d) $m = 1$, $n = 0$ e) $m = 1$, $n = 1$

**6.(9p)** Triunghiul ascuţitunghic $ABC$ are $AB = 6$, $AC = 8$ şi aria $16\sqrt{2}$. Să se determine $\sin \widehat{C}$.

a) $\frac{4\sqrt{39}}{39}$ b) $\frac{2\sqrt{42}}{21}$ c) $\frac{4\sqrt{37}}{37}$ d) $\frac{2\sqrt{34}}{17}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{17}$

**7.(8p)** Fie $A(-1,-1), B(-2,3)$ şi $C(4,0)$. Să se afle coordonatele punctului $D$ astfel ca simetricul lui faţă de dreapta $BC$ să fie centrul de greutate al triunghiului $ABC$.

a) $(1,2)$ b) $\left(\frac{34}{15}, \frac{53}{15}\right)$ c) $\left(\frac{19}{15}, \frac{38}{15}\right)$ d) $\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$ e) $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$

**8.(7p)** Să se calculeze

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^{2019} + 1}{x^3 + 1} .$$

a) 2019 b) $-673$ c) 0 d) $-2019$ e) 673

**9.(8p)** Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x^3 - 1) - \frac{4}{x}$$

în punctul de abscisă $x = 1$.

a) $y = 7x - 11$ b) $y = 7x$ c) $y = 11x - 7$
d) $7y = x - 11$ e) $7y = x + 11$

**10.(9p)** Să se determine numărul real şi pozitiv cu proprietatea că diferenţa dintre dublul său şi cubul său este maximă.

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 1 e) $\frac{\sqrt{3}}{9}$

**11.(8p)** Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei $Ox$ a graficului funcţiei $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}.$$

a) $2\pi\left(1 + \ln\frac{13}{5}\right)$ b) $\pi\left(2 + \ln\frac{13}{5}\right)$ c) $2\pi\left(1 - \ln\frac{13}{5}\right)$

d) $2\pi \ln\frac{13}{5}$ e) $\pi\left(2 - \ln\frac{13}{5}\right)$

**12.(10p)** Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{x+\sqrt{7}}{(x^2+7)^2} dx \ .$$

a) $\frac{\pi}{14}$ b) $\frac{\pi+1}{14}$ c) $\frac{2\pi+1}{28}$ d) $\frac{\pi+2}{28}$ e) $\frac{1}{28}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$

SOLUŢII AC+ETC Iulie 2019

**1.** Cum soluţiile ecuaţiei $x^2 - (a+2)x + 2a = 0$ sunt $a$ şi 2, iar soluţia ecuaţiei $x^2 - 4ax + 4a^2 = 0$ este $2a$, atunci mulţimea $A \cap B$ are un singur element dacă şi numai dacă

$$2a = a \iff a = 0$$

sau

$$2a = 2 \iff a = 1 \ .$$

Î̂n concluzie, $a \in \{0, 1\}$.

Răspuns corect: c).

**2.** Cu 7 fete se poate forma o grupă de câte 3 fete în $C_7^3 = 35$ moduri, iar cu 6 băieţi se poate forma o grupă de câte 2 băieţi în $C_6^2 = 15$ moduri. Deci, sunt $35 \cdot 15 = 525$ moduri în care se poate forma o grupă de 3 fete şi 2 băieţi.

Răspuns corect: e).

**3.** Cum $\triangle ABC$ este dreptunghic cu $a > b > c$, atunci din Teorema lui Pitagora avem că $a^2 = b^2 + c^2$, care înlocuită în determinant ne conduce la relaţia

$$bc(b-2)(c-2)[(b-c)^2 + (a-c)^2 + (a-b)^2] = 0,$$

de unde distingem două cazuri:

*a*) Dacă $b = 2$, din Teorema sinusurilor, obţinem

$$\frac{2}{\sin 75^\circ} = \frac{c}{\sin 15^\circ} .$$

Cum $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ şi $\sin 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ atunci $c = 4 - 2\sqrt{3}$ şi, prin urmare $A_{\triangle ABC} = 4 - 2\sqrt{3}$.

*b*) Dacă $c = 2$ atunci $A_{\triangle ABC} = 4 + 2\sqrt{3}$.

Răspuns corect: b).

**4.** Cum $f$ este un izomorfism între corpurile $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ şi $(\mathbb{R}, \perp, \top)$, atunci

(*i*) $f$ este bijectivă, de unde rezultă că $a \neq 0$;

(*ii*) $f$ satisface simultan condiţiile:

$$f(x+y) = f(x) \perp f(y) \quad \Rightarrow \quad b = 1$$

$$f(x \cdot y) = f(x) \top f(y) \quad \Rightarrow \quad a \in \left\{ \frac{1}{2}, 0 \right\}.$$

În concluzie, $a = \dfrac{1}{2}$ şi $b = 1$.

Răspuns corect: c).

**5.** Fie $\omega$ o rădăcină a polinomului $X^2+X+1$. Atunci $\omega^3=1$ şi $\omega^2+\omega+1=0$.

Cum polinomul $(X+1)^{17}+mX^2+n$ se divide cu polinomul $X^2+X+1$ se obţine că

$$(\omega+1)^{17}+m\omega^2+n=0 \quad \Leftrightarrow \quad (-\omega^2)^{17}+m(-1-\omega)+n=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -(1+m)\omega-m+n=0,$$

de unde $m=n=-1$.

Răspuns corect: c).

**6.** Notăm $AB=c$, $AC=b$ şi $BC=a$. Cum

$$A_{\triangle ABC}=\frac{bc}{2}\cdot\sin A \quad \Leftrightarrow \quad \sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

şi atunci din Teorema fundamentală a trigonometriei rezultă că $\cos A=\dfrac{1}{3}$. Aplicând Teorema cosinusului

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \quad \Leftrightarrow \quad a=2\sqrt{17}$$

şi apoi din Teorema sinusurilor $\sin C=\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$.

Răspuns corect: d).

**7.** Cum centrul de greutate al $\triangle ABC$ este $G\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ şi $m_{BC}=-\dfrac{1}{2}$, rezultă că ecuaţia dreptei $GD$ este $y=2x$. De asemenea, ecuaţia dreptei $BC$ este $y=-\dfrac{1}{2}x+2$ şi dacă $\{E\}=GD\cap BC$ se obţine că $E\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{8}{5}\right)$ şi că $E$ este mijlocul lui $[GD]$. Deci, $D\left(\dfrac{19}{15},\dfrac{38}{15}\right)$.

Răspuns corect: c).

**8.** Aplicând Regula lui l´ Hospital se obţine

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^{2019}+1}{x^3+1}=\lim_{x\to-1}\frac{2019x^{2018}+1}{3x^2}=\lim_{x\to-1}673x^{2016}=673.$$

Răspuns corect: c).

**9.** Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul de abscisă 1 este:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1).$$

Cum $f(1) = -4$ iar $f'(1) = 7$, se obţine $7x - y - 11 = 0$.

Răspuns corect: a).

**10.** Fie funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - x^3$. Cum $f'(x) = 2 - 3x^2$, rezultă că $x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ sunt punctele de extrem local ale lui $f$. În concluzie, $f$ are valoarea maximă pentru $x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ .

Răspuns corect: b).

**11.** Volumul căutat este

$$V = \pi \int_1^3 \frac{(x+2)^2}{x^2+4}\, dx = \pi \int_1^3 \left(1 + \frac{4x}{x^2+4}\right)\, dx =$$

$$= \pi \left( x\Big|_1^3 + 2\ln(x^2+4)\Big|_1^3 \right) = 2\pi \left(1 + \ln\frac{13}{5}\right).$$

Răspuns corect: d).

**12.** Deoarece

$$\frac{x+\sqrt{7}}{(x^2+7)^2} = \frac{x}{(x^2+7)^2} + \frac{\sqrt{7}}{(x^2+7)^2}$$

şi cum $\dfrac{x}{(x^2+7)^2}$ este o fucţie impară, rezultă că integrala ei pe intervalul simetric $[-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$ este nulă. Prin urmare, avem

$$\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{x+\sqrt{7}}{(x^2+7)^2} dx = \sqrt{7} \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{1}{(x^2+7)^2} dx = \frac{\sqrt{7}}{7} \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{x^2+7-x^2}{(x^2+7)^2} dx =$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{7} \left( \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{1}{x^2+7} dx + \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} x \cdot \frac{x}{(x^2+7)^2} dx \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{7}\left[\frac{1}{\sqrt{7}}\ \text{arctg}\ \frac{x}{\sqrt{7}}\Big|_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} + \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} x\cdot\left(-\frac{1}{2(x^2+7)}\right)' dx\right] =$$

$$= \frac{\pi}{14} - \frac{\sqrt{7}}{7}\left(-\frac{x}{2(x^2+7)}\Big|_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} + \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{1}{x^2+7}dx\right) = \frac{\pi+2}{28}\ .$$

Răspuns corect: d).

**SESIUNEA: SEPTEMBRIE, DATA 14.09.2019** **A**

**1.(10p)** Câte numere întregi are mulţimea

$$\{x \in \mathbb{R},\ |2x-3| \le 6\}\ ?$$

a) 0 b) 7 c) 4 d) 2 e) 6

**2.(8p)** Să se calculeze

$$\frac{i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\cdot i^5}{i+i^2+i^3+i^4+i^5}\ .$$

a) 5 b) $-5$ c) 1 d) $-1$ e) $i$

**3.(8p)** Să se determine matricea $X$ care verifică relaţia

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

**4.(10p)** Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 14 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x + y + 3z = 20 \end{cases}.$$

a) $(1, 1, -1)$ b) $(8, -2, 1)$ c) $(2, -1, 5)$

d) $(2, -7, -1)$ e) $(6, -1, 1)$

**5.(7p)** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{vmatrix} a + x & b + x & c + x \\ a^2 + x^2 & b^2 + x^2 & c^2 + x^2 \\ a^3 + x^3 & b^3 + x^3 & c^3 + x^3 \end{vmatrix},$$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $f'(x)$.

a) $f'(x) = (b - a)(c - a)(c - b)[x^2 - (a + b + c)x + ab + ac + bc]$

b) $f'(x) = (a - b)(c - a)(c - b)[x^2 - (a + b + c)x + ab + ac + bc]$

c) $f'(x) = (b - a)(c - a)(c - b)[3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + ac + bc]$

d) $f'(x) = (b - a)(c - a)(b - c)[3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + ac + bc]$

e) $f'(x) = (b - a)(c - a)(c - b)[2x^2 - 3(a + b + c)x + ab + ac + bc]$

**6.(8p)** Să se calculeze $\sin(2x)$, ştiind că $\sin x = \dfrac{1}{2}$ şi $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

a) 0 b) 1 c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\sqrt{3}$

**7.(8p)** Fie $A$ un punct variabil pe dreapta $y = x + 1$, iar $B$ proiecţia lui $A$ pe dreapta de ecuaţie $x = 3$. Atunci mijlocul segmentului $(AB)$ aparţine dreptei:

a) $x = y$ b) $y = 2x$ c) $x + y = 1$

d) $y = 2x - 2$ e) $x + y = 2$

**8.(9p)** Să se calculeze

$$\lim_{x\to 1} \frac{x + x^2 + x^3 - 3}{x - 1} .$$

a) 6 b) 0 c) 1 d) 3 e) 12

**9.(9p)** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2e^x + 3x - 1$. Să se determine $f'(0)$.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

**10.(8p)** Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x}$ . Să se determine punctul de extrem local al lui $f$.

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) 4

**11.(8p)** Să se calculeze

$$\int_7^{27} \frac{1}{x + \sqrt{2x - 5}}\, dx.$$

a) $\ln \frac{10}{7} - \operatorname{arctg} \frac{2}{25}$ b) $\ln \frac{17}{5} - \operatorname{arctg} 6 + \operatorname{arctg} 3$

c) $\ln \frac{17}{5} - \operatorname{arctg} \frac{2}{9}$ d) $\ln \frac{10}{9} - \operatorname{arctg} \frac{9}{25}$

e) $\ln \frac{34}{7} - \operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg} 2$

**12.(7p)** Să se determine constantele reale $a$ şi $b$ astfel încât funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = e^{-x}(a \cos 4x + b \sin 4x)$$

să fie primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} \cos 4x$.

a) $a = \frac{1}{7}$, $b = -\frac{1}{7}$ b) $a = -\frac{1}{17}$, $b = \frac{4}{17}$ c) $a = \frac{4}{17}$, $b = -\frac{4}{17}$

d) $a = b = \frac{5}{17}$ e) $a = -\frac{1}{7}$, $b = \frac{4}{7}$

SOLUŢII AC+ETC Septembrie 2019

**1.** Inecuaţia din enunţ este echivalentă cu $-6 \leq 2x - 3 \leq 6$, de unde se obţine că $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$, deci $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

În concluzie, mulţimea conţine 6 numere întregi.

Răspuns corect: e).

**2.** Fracţia din enunţ poate fi scrisă

$$\frac{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot i^5}{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5} = \frac{i^{1+2+3+4+5}}{i - 1 - i + 1 + i} = \frac{i^{15}}{i} = i^{14} = i^{4 \cdot 3 + 2} = i^2 = -1 \ .$$

Răspuns corect: d).

**3.** Se observă ca matricea $X$ este de forma $(a\ b\ c)$ şi atunci ecuaţia matriceală devine

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (a\ b\ c) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix},$$

de unde se obţine că $a = 2$, $b = -1$ şi $c = 3$, deci matricea căutată este $X = (2\ -1\ 3)$.

Răspuns corect: d).

**4.** Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ matricea asociată sistemului. Cum $\det A = -5 \neq 0$, rezultă că sistemul este compatibil determinat şi aplicând Formulele lui Cramer se obţine soluţia $x = 2$, $y = -1$ şi $z = 5$.

Răspuns corect: c).

**5.** Funcţia din enunţ poate fi scrisă

$$f(x) \overset{\substack{C_2:=C_2-C_1\\ C_3:=C_3-C_1}}{=} \begin{vmatrix} a+x & b-a & c-a \\ a^2+x^2 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \\ a^3+x^3 & (b-a)(b^2+ab+a^2) & (c-a)(c^2+ac+a^2) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a+x & 1 & 1 \\ a^2+x^2 & b+a & c+a \\ a^3+x^3 & b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix} \overset{C_3:=C_3-C_2}{=}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a+x & 1 & 0 \\ a^2+x^2 & b+a & c-b \\ a^3+x^3 & b^2+ab+a^2 & (c-b)(a+b+c) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} a+x & 1 & 0 \\ a^2+x^2 & b+a & 1 \\ a^3+x^3 & b^2+ab+a^2 & a+b+c \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)[(a+x)(a+b)(a+b+c)+a^3+x^3-$$
$$-(a+x)(b^2+ab+a^2)-(a^2+x^2)(a+b+c)],$$

de unde se obţine că $f'(x) = (b-a)(c-a)(c-b)[3x^2-2(a+b+c)x+ab+ac+bc]$.

Răspuns corect: c).

**6.** Cum $\sin x = \dfrac{1}{2}$ şi $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, rezultă că $x = \dfrac{\pi}{6}$, de unde se obţine că $\sin 2x = \sin \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ .

Răspuns corect: d).

**7.** Fie $A(a, a+1)$, $a \in \mathbb{R}$, atunci $B(3, a+1)$ şi mijlocul segmentului $(AB)$ este $M\left(\dfrac{3+a}{2}, a+1\right)$ care aparţine dreptei $y = 2x-2$, pentru că

$$a+1 = 2 \cdot \frac{3+a}{2} - 2.$$

Răspuns corect: d).

**8.** Aplicând Regula lui l´ Hospital se obţine

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x+1}{1}=6.$$

Răspuns corect: a).

**9.** Cum $f'(x)=2e^x+3$, rezultă că $f'(0)=5$.

Răspuns corect: e).

**10.** Cum $f'(x)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ , rezultă că $x=\dfrac{1}{4}$ este punctul de extrem local al lui $f$.

Răspuns corect: a).

**11.** Integrala din enunţ poate fi scrisă

$$\int_7^{27}\frac{1}{x+\sqrt{2x-5}}\,dx=\int_7^{27}\frac{1}{\sqrt{2x-5}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2x-5}}+1\right)}\,dx.$$

Făcând schimbarea de variabilă $\sqrt{2x-5}=t$, rezultă că $x=\dfrac{t^2+5}{2}$ şi $\dfrac{1}{\sqrt{2x-5}}\,dx=dt$, iar integrala devine

$$\int_3^7\frac{1}{\dfrac{t^2+5}{2t}+1}\,dt=\int_3^7\frac{2t}{t^2+2t+5}\,dt=\int_3^7\frac{2t+2-2}{t^2+2t+5}\,dt=$$

$$=\int_3^7\frac{2t+2}{t^2+2t+5}\,dt-2\int_3^7\frac{1}{t^2+2t+5}\,dt=\ln(t^2+2t+5)\Big|_3^7-2\int_3^7\frac{1}{(t+1)^2+4}\,dt=$$

$$=\ln 68-\ln 20-\operatorname{arctg}\frac{t+1}{2}\Big|_3^7=\ln\frac{17}{5}-\operatorname{arctg}4+\operatorname{arctg}2=$$

$$=\ln\frac{17}{5}-(\operatorname{arctg}4-\operatorname{arctg}2)=\ln\frac{17}{5}-\operatorname{arctg}\frac{4-2}{1+4\cdot 2}=\ln\frac{17}{5}-\operatorname{arctg}\frac{2}{9}.$$

Răspuns corect: c).

**12.** Cum $F$ este primitivă a lui $f$, rezultă că $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ceea ce este echivalent cu

$$-e^{-x}(a\cos 4x+b\sin 4x)+e^{-x}(-4a\sin 4x+4b\cos 4x) = e^{-x}\cos 4x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-x}[(-a+4b)\cos 4x - (4a+b)\sin 4x] = e^{-x}\cos 4x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -a+4b=1 \\ 4a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -\dfrac{1}{17} \\ b = \dfrac{4}{17}\,. \end{cases}$$

Răspuns corect: b).

**SESIUNEA: IULIE, DATA 18.07.2020 A**

**1.(7p)** Să se calculeze

$$E_1 = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} \quad \text{şi} \quad E_2 = |x_1 - x_2|,$$

unde $x_1$ şi $x_2$ sunt soluţiile ecuaţiei

$$x^2 - x - a^2 = 0\ , \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

a) $E_1 = -\dfrac{1+3a}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a}$ b) $E_1 = \dfrac{1+3a}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a}$

c) $E_1 = -\dfrac{1+3a^2}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a^2}$ d) $E_1 = \dfrac{1+3a}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a^2}$

e) $E_1 = \dfrac{1+3a^2}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a^2}$

**2.(8p)** Amestecăm un pachet de 52 de cărţi de joc şi extragem simultan două cărţi la întâmplare. Care este probabilitatea să alegem doi aşi de aceeaşi culoare?

a) $\dfrac{1}{51 \cdot 52}$ b) $\dfrac{1}{51 \cdot 26}$ c) $\dfrac{1}{51 \cdot 13}$ d) $\dfrac{C_4^2}{52}$ e) $\dfrac{A_4^2}{52}$

**3.(9p)** Să se calculeze $B \cdot A \cdot C$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

**4.(8p)** Să se determine acele soluţii $(x, y, z)$ ale sistemului

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

pentru care $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

a) $(0, 1, 0)$, $\left(\dfrac{12}{13}, \dfrac{4}{13}, \dfrac{10}{13}\right)$ b) $(1, 0, 0)$, $\left(-\dfrac{12}{13}, \dfrac{4}{13}, -\dfrac{3}{13}\right)$

c) $(0, 0, 1)$, $\left(\dfrac{12}{13}, \dfrac{4}{13}, -\dfrac{3}{13}\right)$ d) $(0, 0, 1)$, $\left(-\dfrac{12}{13}, \dfrac{4}{13}, \dfrac{3}{13}\right)$

e) $\left(\dfrac{11}{13}, \dfrac{4}{13}, \dfrac{3}{13}\right)$, $(0, 0, 1)$

**5.(7p)** Pe mulţimea numerelor complexe se consideră legea de compoziţie

$$x * y = xy - i(x + y) - 1 + i.$$

Să se determine elementul neutru al acestei legi şi să se calculeze $i * i^2 * i^3 * i^4 * i^5$.

a) $e = i$, $z = -1 + i$ b) $e = 1 + i$, $z = i$ c) $e = 1$, $z = 1 - 2i$

d) $e = 1 - i$, $z = i$ e) $e = -i$, $z = 2 - i$

**6.(8p)** Dacă $\sin a = \frac{3}{5}$, $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ atunci $\cos \frac{a}{2}$ este egal cu:

a) $\frac{4}{5}$ b) $-\frac{4}{5}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ e) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

**7.(8p)** Se consideră punctele $A(-1,0)$, $B(2,3)$, $C(-3,-4)$, $D(4,3)$. Pe dreapta $CD$ se alege punctul $P$ astfel ca $m(\widehat{APC}) = m(\widehat{BPD})$. Să se calculeze distanţa de la $P$ la originea sistemului de axe de coordonate.

a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{8}{5}$ c) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

**8.(9p)** Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})\sqrt{x}$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $\infty$ d) nu există e) 1

**9.(10p)** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x\cos x$. Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul de abscisă $x_0 = 0$.

a) $y = x - 1$ b) $y = x + 1$ c) $y = -x$ d) $y = -x + 2$ e) $y = x$

**10.(8p)** Funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - \ln x$ are:

a) un punct de minim local

b) un punct de maxim local

c) două puncte de maxim local

d) două puncte de minim local

e) un punct de minim local şi un punct de maxim local

**11.(8p)** Să se calculeze

$$\int (2x-1)\cos 2x dx.$$

a) $x\sin 2x + \frac{1}{2}(\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$ b) $2x\cos 2x - (\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$

c) $x\sin 2x + 2(\cos 2x + \sin 2x) + \mathcal{C}$ d) $\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}(\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$

e) $x\cos 2x + (\sin 2x - \cos 2x) + \mathcal{C}$

**12.(10p)** Să se calculeze integrala

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x}\, dx\ .$$

a) $\frac{\pi}{4} + \frac{9}{10}\ln\frac{9}{10}$ b) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{10}\ln\frac{9}{2}$ c) $\frac{\pi}{5} + \frac{9}{10}\ln\frac{9}{10}$

d) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{10}\ln\frac{9}{2}$ e) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{10}\ln\frac{9}{10}$

SOLUŢII AC+ETC Iulie 2020

**1.** Din relaţiile lui Viete avem că $x_1 + x_2 = 1$ şi $x_1 \cdot x_2 = -a^2$ şi atunci

$$E_1 = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 \cdot x_2^3} = \frac{(x_1+x_2)(x_1^2 - x_1\cdot x_2 + x_2^2)}{(x_1\cdot x_2)^3} =$$

$$= \frac{(x_1+x_2)^2 - 3x_1\cdot x_2}{(x_1\cdot x_2)^3} = \frac{1-3(-a^2)}{(-a^2)^3} = -\frac{1+3a^2}{a^6}$$

şi

$$E_2^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1\cdot x_2 + x_2^2 =$$

$$= (x_1+x_2)^2 - 4x_1\cdot x_2 = 1 - 4(-a^2) = 1 + 4a^2,$$

deci $E_2 = \sqrt{1+4a^2}$.

Răspuns corect: c).

**2.** Extrăgând simultan 2 cărţi la întâmplare din pachetul de 52 de cărţi de joc, numărul cazurilor posibile este $C_{52}^2$. Cum cele două cărţi trebuie să fie doi aşi de aceeaşi culoare, ei pot fi 2 aşi roşii sau 2 aşi negri, deci avem 2 cazuri favorabile. Probabilitatea cerută este

$$P = \frac{2}{C_{52}^2} = \frac{2}{51 \cdot 26} = \frac{1}{51 \cdot 13}.$$

Răspuns corect: c).

**3.**

$$B \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Răspuns corect: d).

**4.** Fie

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matricea extinsă asociată sistemului. Cum rang $A = 2 =$ rang $\overline{A} \neq 3 =$ numărul de necunoscute ale sistemului rezultă, din Teorema lui Kronecker-Capelli, că sistemul este compatibil nedeterminat cu necunoscutele principale $x$, $y$ şi $z = \alpha$ necunoscută secundară. Atunci sistemul devine

$$\begin{cases} 2x - 2y = 1 - \alpha \\ 3x - y = 2 - 2\alpha \end{cases},$$

de unde obţinem

$$x = \frac{3 - 3\alpha}{4} \quad \text{şi} \quad y = \frac{1 - \alpha}{4},$$

care înlocuite în relaţia $x^2+y^2+z^2=1$ ne conduc la ecuaţia $13\alpha^2-10\alpha-3=0$ cu soluţiile:

$$\alpha_1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x=0,\ y=0,\ z=1$$

şi

$$\alpha_2 = -\frac{3}{13} \quad \Longrightarrow \quad x=\frac{12}{13}\ ,\ y=\frac{4}{13}\ ,\ z=-\frac{3}{13}\ .$$

Răspuns corect: c).

**5.** Cum legea de compoziţie din enunţ poate fi scrisă

$$x * y = (x-i)\cdot(y-i)+i,$$

elementul neutru $e = i+1$ se găseşte uşor. Pentru a determina elementul absorbant al legii, căutăm $a \in \mathbb{C}$ cu proprietatea că $x * a = a * x = a$ pentru orice $x \in \mathbb{C}$ şi obţinem $a = i$.

În concluzie, $i * i^2 * i^3 * i^4 * i^5 = i$

Răspuns corect: b).

**6.** Cum $\sin a = \dfrac{3}{5}$ şi $a \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ rezultă, din Teorema fundamentală a trigonometriei, că $\cos a = -\dfrac{4}{5}$, de unde se obţine că

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}\ .$$

Răspuns corect: d).

**7.** Cum ecuaţia dreptei $CD$ este $y = x-1$, putem considera $P(a, a-1) \in CD$, $a \in \mathbb{R}$. Dar $m(\widehat{APC}) = m(\widehat{BPD})$, deci tg $(\widehat{APC})$ = tg $(\widehat{BPD})$, ceea ce este echivalent cu

$$\left|\frac{m_{AP}-m_{CD}}{1+m_{AP}\cdot m_{CD}}\right| = \left|\frac{m_{BP}-m_{CD}}{1+m_{BP}\cdot m_{CD}}\right|$$

care ne conduce la ecuaţia

$$\left|\frac{a}{3-a}\right| = 1 \iff a = \frac{3}{2} \implies P\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \implies OP = \frac{\sqrt{10}}{2}\ .$$

Răspuns corect: e).

**8.** Având cazul de nedeterminare $\infty - \infty$ în limită, înmulţim cu conjugata şi obţinem

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\sqrt{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x+1-x)\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \frac{1}{2}.$$

Răspuns corect: a).

**9.** Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul de abscisă $x_0 = 0$ este:

$$y - f(0) = f'(0)(x-0).$$

Cum $f(0) = 0$ iar $f'(0) = 1$, se obţine ecuaţia $y = x$.

Răspuns corect: e).

**10.** Cum

$$f'(x) = \frac{x^3-1}{x},$$

rezultă că $f$ este strict descrescătoare pe intervalul $(0,1)$ şi strict crescătoare pe intervalul $(1,\infty)$, deci $x = 1$ este punct de minim local pentru $f$.

Răspuns corect: a).

**11.** Folosind formula de integrare prin părţi obţinem:

$$\begin{aligned}\int(2x-1)\cos 2x dx &= \int(2x-1)\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)' dx = \\ &= (2x-1)\cdot\frac{\sin 2x}{2} - \int \sin 2x dx = \\ &= x\sin 2x + \frac{1}{2}(\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}.\end{aligned}$$

Răspuns corect: a).

**12.** Căutăm o descompunere a fracţiei de forma:

$$\frac{2\sin x+\cos x}{\sin x+2\cos x}=\frac{A(\sin x+2\cos x)+B(\sin x+2\cos x)'}{\sin x+2\cos x}=$$
$$=\frac{A(\sin x+2\cos x)+B(\cos x-2\sin x)}{\sin x+2\cos x}=$$
$$=\frac{(A-2B)\sin x+(2A+B)\cos x}{\sin x+2\cos x},$$

de unde obţinem, identificând coeficienţii, că $A=\frac{4}{5}$ şi $B=-\frac{3}{5}$. Deci integrala devine:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x+\cos x}{\sin x+2\cos x}\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{4}{5}\,dx-\frac{3}{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x+2\cos x)'}{\sin x+2\cos x}\,dx=$$
$$=\frac{4}{5}\cdot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=$$
$$=\frac{\pi}{5}+\frac{3}{10}\ln\frac{9}{2}.$$

Răspuns corect: d).

**SESIUNEA: IULIE, DATA 19.07.2021** **A**

**1.(7p)** Să se determine funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx-1$, $m\in\mathbb{R}$, ştiind că punctul $A(-2,3)$ aparţine graficului ei.

a) $f(x)=x^2+2x-1$ b) $f(x)=x^2-x-1$

c) $f(x)=x^2-1$ d) $f(x)=x^2-2x-1$

e) $f(x)=x^2+x-1$

**2.(8p)** Să se determine în care dintre următoarele intervale se află soluţia pozitivă a ecuaţiei

$$\log_7(x^2 - x + 1) = 1 \ .$$

a) $[0, 2]$ b) $(2, 5)$ c) $[5, 7)$ d) $[1, 2)$ e) $(4, 6]$

**3.(8p)** Fie numerele reale $a$ şi $b$ astfel încât

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze $7a + 4b$.

a) 2021 b) 0 c) 15 d) $-9$ e) 23

**4.(7p)** Se consideră matricele de forma

$$X(m) = \begin{pmatrix} 1 + 4m & 6m \\ -2m & 1 - 3m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ .$$

Să se calculeze determinantul matricei $X(1)$.

a) 3 b) $-2$ c) $-10$ d) 10 e) 2

**5.(8p)** Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie

$$x * y = xy + 2x + 2y + 2.$$

Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $a * 1 = 6$.

a) $-1$ b) 2 c) $\frac{2}{3}$ d) 3 e) $\frac{3}{2}$

**6.(8p)** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot e^x + 2$. Să se calculeze $f'(0)$.

a) 1 b) 3 c) 4 d) 2 e) 0

**7.(8p)** Să se determine distanţa dintre dreptele paralele

$$d_1:\ 5x+12y-11=0 \quad \text{şi} \quad d_2:\ y=mx+2,\ m\in\mathbb{R}\ .$$

a) 1 b) 3 c) 2 d) 1 e) $\frac{3}{2}$

**8.(10p)** În triunghiul $ABC$ de arie $3\sqrt{15}$, suma pătratelor lungimilor laturilor este egal cu 116. Să se calculeze $\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C$.

a) $\frac{58\sqrt{15}}{45}$ b) $\frac{58\sqrt{15}}{15}$ c) $\frac{29\sqrt{15}}{15}$ d) $\frac{58\sqrt{15}}{9}$ e) $\frac{29\sqrt{15}}{45}$

**9.(9p)** Fie funcţia $f:[0,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}(1-2\{x\})^2$, unde $\{x\}$ este partea fracţionară a lui $x$. Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ şi, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

a) 1 b) nu există c) 0 d) $-1$ e) 2

**10.(9p)** Se consideră punctele $A(-1,0)$ şi $B(3,0)$. Dacă $C$ este un punct variabil pe graficul funcţiei $f:[1,5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{8x-x^2}$, să se calculeze valoarea minimă pe care o poate lua aria triunghiului $ABC$.

a) 8 b) 4 c) $\sqrt{15}$ d) $2\sqrt{7}$ e) $2\sqrt{15}$

**11.(8p)** Fie funţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{şi respectiv} \quad g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\ .$$

Să se determine primitiva $H$ a funcţiei $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=f^2(x)\cdot g^2(x)$ care verifică relaţia $H(0)=\frac{1}{8}$.

a) $\frac{1}{8}[f(4x)-g(4x)+x]$ b) $\frac{1}{64}[f(4x)+8x+7]$

c) $\frac{1}{32}[g(4x)-4x+4]$ d) $\frac{1}{64}[g(4x)+4x+8]$

e) $\frac{1}{32}[f(4x)+4x+3]$

**12.(10p)** Să se calculeze

$$\int_1^2 \frac{x-e^x}{1-2e^{-x}}dx + \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} \frac{x}{1+2e^{-x}}dx.$$

a) $2\ln(e^2-2)$

b) $\ln(e-2)\cdot\ln(e^2-2)$

c) $\ln 2\cdot\ln 3$

d) $4\ln(e^2-2)-3\ln(e-2)+e^2-e$

e) $\ln(e-2)-e^2+e$

SOLUŢII AC+ETC Septembrie 2021

**1.** Punctul $A(-2,3)$ aparţine graficului funcţiei $f(x)=x^2+mx-1$ dacă $f(-2)=3$, de unde obţinem $m=0$, adică funcţia $f(x)=x^2-1$

Răspuns corect: c).

**2.** Ecuaţia logaritmică este echivalentă cu ecuaţia $x^2-x+1=7$ care are soluţia pozitivă $x=3\in(2,5)$.

Răspuns corect: b).

**3.** Ecuaţia matriceală ne conduce la urmatoarele relaţii $a+2b=-7$ şi $b=-4$, de unde $7a+4b=-9$.

Răspuns corect: d).

**4.** Cum

$$X(1)=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$$

rezultă că $\det X(1)=-10+12=2$.

Răspuns corect: e).

**5.** Ecuaţia din enunţ este echivalentă cu $3a = 2$, de unde avem că $a = \dfrac{2}{3}$.

Răspuns corect: c).

**6.** Cum $f'(x) = e^x + e^x \cdot x$, rezultă că $f'(0) = e^0 = 1$.

Răspuns corect: a).

**7.** Fie $A(0, 2)$ un punct de pe dreapta $d_2$. Distanţa dintre cele două drepte paralele coincide cu

$$d(A, d_1) = \frac{|5x_A + 12y_A - 11|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|12 \cdot 2 - 11|}{\sqrt{169}} = 1 \ .$$

Răspuns corect: d).

**8.** Cum

$$A_{\triangle ABC} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} \quad \Longrightarrow \quad \sin A = \frac{6\sqrt{15}}{bc}$$

şi atunci

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{\dfrac{6\sqrt{15}}{bc}} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{12\sqrt{15}} \ .$$

Analog,

$$\operatorname{ctg} B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{12\sqrt{15}} \quad \text{şi} \quad \operatorname{ctg} C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{12\sqrt{15}} \ ,$$

de unde obţinem

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{12\sqrt{15}} = \frac{116}{12\sqrt{15}} = \frac{29\sqrt{15}}{45} \ .$$

Răspuns corect: e).

**9.** Cum

$$[x] = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in [1,2) \\ 2, \text{ dacă } x \in [2,3) \end{cases},$$

rezultă că

$$f(x) = (x-[x])(1-2x+2[x])^2 = \begin{cases} (x-1)(3-2x)^2, \text{ dacă } x \in [1,2) \\ (x-2)(5-2x)^2, \text{ dacă } x \in [2,3) \end{cases}$$

şi atunci

$$l_s(2) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} (x-1)(3-2x)^2 = 1$$

şi

$$l_d(2) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} (x-2)(5-2x)^2 = 0,$$

de unde deducem că nu există $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Răspuns corect: b).

**10.** Fie $C(a, \sqrt{8a-a^2})$, $a \in [1,5]$. Atunci, folosind intervalele de monotonie, aria $A_{\triangle ABC} = 2\sqrt{8a-a^2}$ are valoare minimă pentru $a = 1$, adică valoarea minimă pe care o poate lua aria triungiului $ABC$ este $2\sqrt{7}$.

Răspuns corect: d).

**11.** Cum

$$h(x) = \frac{e^{4x} + e^{-4x} - 2}{16},$$

rezultă că

$$H(x) = \frac{e^{4x} - e^{-4x} - 8x}{64} + \mathcal{C} \ .$$

Dar $H(0) = \dfrac{1}{8}$, de unde obţinem că $\mathcal{C} = \dfrac{1}{8}$, adică

$$H(x) = \frac{e^{4x} - e^{-4x} - 8x}{64} + \frac{1}{8} = \frac{e^{4x} - e^{-4x} - 8x + 8}{64}$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2} - 4x + 4\right) = \frac{1}{32}[g(4x) - 4x + 4] \ .$$

Răspuns corect: c).

**12.**

$$\int_1^2 \frac{x-e^x}{1-2e^{-x}}dx = \int_1^2 \frac{x-e^x}{1-\frac{2}{e^x}}dx = \int_1^2 \frac{x\cdot e^x - e^{2x}}{e^x-2}dx =$$

$$= \int_1^2 \frac{x\cdot e^x}{e^x-2}dx - \int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^x-2}dx =$$

$$\overset{e^x=t}{=} \int_1^2 x\cdot \frac{e^x}{e^x-2}dx - \int_e^{e^2} \frac{t}{t-2}dt =$$

$$= \int_1^2 x\cdot [\ln(e^x-2)]'dx - \int_e^{e^2} \frac{t-2+2}{t-2}dt =$$

$$= x\cdot \ln(e^x-2)\Big|_1^2 - \int_1^2 \ln(e^x-2)dx - t\Big|_e^{e^2} - 2\ln|t-2|\Big|_e^{e^2} =$$

$$= \ln(e-2) - e^2 + e - \int_1^2 \ln(e^x-2)dx.$$

Făcând schimbarea de variabilă $\ln(e^x-2)=y$, rezultă că $x=\ln(e^y+2)$, de unde $dx=\dfrac{e^y}{e^y+2}dy$ şi atunci integrala devine:

$$\int_1^2 \frac{x-e^x}{1-2e^{-x}}dx = \ln(e-2) - e^2 + e - \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} y\cdot \frac{e^y}{e^y+2}dy \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_1^2 \frac{x-e^x}{1-2e^{-x}}dx + \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} y\cdot \frac{e^y}{e^y+2}dy = \ln(e-2) - e^2 + e \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_1^2 \frac{x-e^x}{1-2e^{-x}}dx + \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} \frac{x\cdot e^x}{e^x+2}dx = \ln(e-2) - e^2 + e \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_1^2 \frac{x-e^x}{1-2e^{-x}}dx + \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} \frac{x\cdot e^x}{e^x(1+2e^{-x})}dx = \ln(e-2) - e^2 + e \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_1^2 \frac{x-e^x}{1-2e^{-x}}dx + \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} \frac{x}{1+2e^{-x}}dx = \ln(e-2) - e^2 + e \ .$$

Răspuns corect: e).

**SESIUNEA: SEPTEMBRIE, DATA 13.09.2021** **A**

**1.(7p)** Graficul cărei funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de mai jos conţine punctul $A(-1, 4)$?

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ b) $f(x) = -2x^2 + x + 1$

c) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ d) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

e) $f(x) = -4x^2 + 3x + 1$

**2.(8p)** Să se calculeze

$$N = i + i^2 + i^3 + i^4 \ .$$

a) $N = i$ b) $N = 0$ c) $N = -1$ d) $N = 1$ e) $N = -i$

**3.(8p)** Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = -1 \\ x - 2y - z = 2. \end{cases}$$

a) $(1, 0, -1)$ b) $(0, 1, 1)$ c) $(0, -1, -1)$ d) $(1, 1, 0)$ e) $(1, 1, 1)$

**4.(10p)** Să se calculeze integrala

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 2\cos x}{2\sin x + \cos x}\, dx \ .$$

a) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{5}\ln\frac{4}{9}$ b) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{5}\ln\frac{4}{9}$ c) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{10}\ln\frac{8}{9}$

d) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\ln\frac{1}{9}$ e) $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{5}\ln\frac{8}{9}$

**5.(9p)** Să se calculeze integrala

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max\left\{\cos x, \frac{1}{2}\right\}\, dx \ .$$

a) $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$ b) $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}$ c) $\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}$

**6.(8p)** Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Să se calculeze $B = A^2 - A$.

a) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

**7.(7p)** Pe mulţimea $G = [1, +\infty)$ se defineşte legea de compoziţie

$$x * y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2} \ .$$

Să se calculeze $N = 2 * 1$.

a) $N = 1$ b) $N = 2$ c) $N = \sqrt{3}$ d) $N = 0$ e) $N = \sqrt{5}$

**8.(8p)** Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \ln x - 1$. Să se calculeze $f'(1)$.

a) 2 b) 1 c) 0 d) $-1$ e) 3

**9.(9p)** Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

a) $\{-1,\ 0\}$ b) $\{-2,\ 0\}$ c) $\{1,\ -1\}$
d) $\{1,\ -2\}$ e) $\{0,\ 1\}$

**10.(8p)** Să se calculeze

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \ .$$

a) $L = \frac{1}{2}$ b) $L = 1$ c) $L = \frac{1}{6}$ d) $L = 0$ e) $L = \frac{1}{3}$

**11.(10p)** Se consideră punctele $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$ şi $C(3, 6)$. Fie $y = mx + n$ ecuaţia înălţimii dusă din $A$ în $\triangle ABC$. Să se calculeze $S = m + n$.

a) $S = -3$ b) $S = 2$ c) $S = -1$ d) $S = 0$ e) $S = 4$

**12.(8p)** Să se calculeze $\sin x$, ştiind că $\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ şi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

SOLUŢII AC+ETC Iulie 2021

**1.** Graficul funcţiei $f(x) = x^2 - 2x + 1$ conţine punctul $A(-1, 4)$, pentru că $f(-1) = 4$.

Răspuns corect: d).

**2.** $N = i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0$ .

Răspuns corect: b).

**3.** Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ matricea asociată sistemului. Cum $\det A = 1 \neq 0$, rezultă că sistemul este compatibil determinat şi aplicând Formulele lui Cramer se obţine soluţia $x = 1$, $y = 0$ şi $z = -1$.

Răspuns corect: a).

**4.** Căutăm o descompunere a fracţiei de forma:

$$\frac{\sin x + 2\cos x}{2\sin x + \cos x} = \frac{A(2\sin x + \cos x) + B(2\sin x + \cos x)'}{2\sin x + \cos x} =$$
$$= \frac{A(2\sin x + \cos x) + B(2\cos x - \sin x)}{2\sin x + \cos x} =$$
$$= \frac{(2A - B)\sin x + (A + 2B)\cos x}{2\sin x + \cos x},$$

de unde obţinem, identificând coeficienţii, că $A = \frac{4}{5}$ şi $B = \frac{3}{5}$. Deci integrala devine:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 2\cos x}{2\sin x + \cos x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{5}\, dx + \frac{3}{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\sin x + \cos x)'}{2\sin x + \cos x}\, dx =$$

$$= \frac{4}{5}\cdot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{5}\ln|2\sin x + \cos x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{5} + \frac{3}{10}\ln\frac{8}{9}.$$

Răspuns corect: c).

**5.** Cum $\cos x = \frac{1}{2}$ pentru $x = \frac{\pi}{3}$, integrala din enunţ devine

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max\left\{\cos x, \frac{1}{2}\right\}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x\, dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\, dx = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Răspuns corect: d).

**6.**

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2\ .$$

Răspuns corect: a).

**7.** $N = 2 * 1 = \sqrt{2^2\cdot 1^2 - 2^2 - 1^2 + 2} = \sqrt{4 - 4 - 1 + 2} = 1$ .

Răspuns corect: a).

**8.** Cum $f'(x) = 2 + \frac{1}{x}$, rezultă că $f'(1) = 2 + 1 = 3$.

Răspuns corect: e).

**9.** Cum $f'(x) = e^x \cdot (x^2 + 2x)$ se anulează în $-2$ şi 0, folosind monotonia funcţiei deducem că mulţimea punctelor de extrem local este $\{-2; 0\}$.

Răspuns corect: b).

**10.** Aplicând Regula lui l´ Hospital de 2 ori se obţine

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} .$$

Răspuns corect: c).

**11.** Cum panta dreptei $BC$ este 1, rezultă că panta înălţimii din $A$ este $-1$ şi atunci ecuaţia ei este $y = -x + 5$, de unde $m = -1$ şi $n = 5$, deci $m + n = 4$.

Răspuns corect: e).

**12.** Din Formula fundamentală a trigonometriei rezultă că $\sin^2 x = \frac{2}{3}$. Ţinand cont de intervalul dat se obţine $\sin x = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Răspuns corect: e).

**SESIUNEA: IULIE, DATA 14.07.2022** **A**

**1.(8p)** Un muncitor taie o scândură cu lungimea de 4 $m$ în 10 bucăţi, fiecare bucată fiind cu 6 $cm$ mai lungă decât precedenta. Ce lungime are cea mai lungă bucată?

a) 61 $cm$ b) 67 $cm$ c) 70 $cm$ d) 73 $cm$ e) 79 $cm$

**2.(8p)** Care este probabilitatea ca aruncând trei zaruri să obţinem suma punctelor 5?

a) $\frac{1}{108}$ b) $\frac{1}{72}$ c) $\frac{1}{36}$ d) $\frac{1}{12}$ e) $\frac{1}{6}$

**3.(8p)** Să se determine rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 2022 \end{pmatrix}.$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 5

**4.(9p)** Să se determine numărul matricelor $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care satisfac condiţiile

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

şi $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2022$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4 e) o infinitate

**5.(8p)** Pe mulţimea numerelor complexe se consideră legea de compoziţie

$$z_1 \perp z_2 = z_1 \cdot z_2 + Im(z_1) \cdot Im(z_2),$$

unde pentru $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b = Im(z)$. Să se determine modulul simetricului elementului $z = 2 + i$ în raport cu această lege.

a) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ c) $\sqrt{5}$ d) 1 e) $2\sqrt{5}$

**6.(8p)** Să se calculeze $\sin(2x)$, ştiind că $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ şi $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

a) 1 b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 0 d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $-1$

**7.(7p)** Se dau punctele $A(2,3)$, $B(-1,2)$ şi $C(3,6)$. Fie $y = mx+n$ ecuaţia medianei duse din $A$ în triunghiului $ABC$. Să se calculeze $m+n$.

a) $-6$ b) $-4$ c) 0 d) 4 e) 6

**8.(9p)** Să se determine ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - 2022x \ .$$

a) $y = -2023x + \frac{1}{2}$ b) $y = -2023x - \frac{1}{2}$ c) $y = -2021x - 2$

d) $y = -2021x$ e) $y = -2022x$

**9.(7p)** Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x^2 - 1) - \frac{4}{x}$$

în punctul de abscisă $x = 1$.

a) $y = 5x - 9$ b) $y = 6x - 10$ c) $y = -6x + 2$

d) $y = 6x - 2$ e) $y = 4x - 8$

**10.(10p)** Să se determine mulţimea valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$(1 - mx)e^x \leq 1 \ ,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) $\emptyset$ b) $\{0\}$ c) $\{1\}$ d) $\{2\}$ e) $\{-1\}$

**11.(9p)** Să se calculeze

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1)\cos(2x)\ dx \ .$$

a) $-1$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $0$ d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{\pi-1}{2}$

**12.(9p)** Să se calculeze

$$\int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}dx \ .$$

a) $\frac{40}{3}$ b) $\frac{10}{9}$ c) $\frac{20}{3}$ d) $\frac{10}{3}$ e) $\frac{40}{9}$

SOLUŢII AC Iulie 2022

**1.** Observăm că lungimile celor 10 bucăţi reprezintă primii zece termeni ai progresiei aritmetice $a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n, \ldots$ de raţie $r = 6\ cm$ şi suma $S_{10} = 4\ m = 400\ cm$. Obţinem că $a_1 = 13\ cm$ şi $a_{10} = 67\ cm$.

Deci, cea mai lungă bucată are 67 $cm$.

Răspuns corect: b).

**2.** Cum la aruncarea a trei zaruri numărul cazurilor posibile este $6^3$ şi în doar şase dintre ele suma punctelor este 5, adică în cazurile:

$$(1,1,3),\ (1,3,1),\ (3,1,1),\ (1,2,2),\ (2,1,2),\ (2,2,1)\ ,$$

rezultă că probabilitatea cerută este $\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$.

Răspuns corect: c).

**3.** Deoarece determinantul de ordinul 3

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 2022 \end{vmatrix}$$

este nenul, rezultă că rang $A = 3$.

Răspuns corect: d).

**4.** Din ecuaţia matriceală din enunţ obţinem sistemul

$$\begin{cases} 3a + c = a + b \\ 3b + d = a + b \\ a + 3c = c + d \\ b + 3d = c + d \end{cases} \iff \begin{cases} 2a - b + c = 0 \\ -a + 2b + d = 0 \\ a + 2c - d = 0 \\ b - c + 2d = 0 \end{cases}$$

care are matricea asociată

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

cu $\det A = 0$ şi

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

nenul, deci $\operatorname{rang} A = 3$. Cum sistemul este omogen, rezultă că el este compatibil nedeterminat cu $a$, $b$, $c$ necunoscute principale şi $d$ necunoscută secundară, primele trei ecuaţii sunt principale şi ultima e secundară, deci avem sistemul

$$\begin{cases} 2a - b + c = 0 \\ -a + 2b = -d \\ a + 2c = d \end{cases}$$

cu soluţia $a = -d$, $b = -d$ şi $c = d$, care înlocuită în relaţia $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2022$, ne conduce la $d = \pm\sqrt{\dfrac{2022}{4}}$, adică două matrice.

Răspuns corect: c).

**5.** Cum elementul neutru al legii de compoziţie date este 1, simetricul lui $z = 2 + i$ îl găsim rezolvând ecuaţia $z \perp z' = 1$, de unde rezultă $z' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}i$ cu modulul $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

Răspuns corect: a).

**6.** Din Formula fundamentală a trigonometriei obţinem că $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$. Dar $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, de unde rezultă că $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ şi atunci $\sin 2x = -1$.

Răspuns corect: e).

**7.** Dacă $M$ este mijlocul segmentului $BC$ atunci $M(1, 4)$ şi ecuaţia lui $AM$ este $y = -x + 5$, deci $m = -1$ şi $n = 5$, adică $m + n = 4$.

Răspuns corect: d).

**8.** Cum $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, rezultă că $f$ nu are asimptotă orizontală la $-\infty$, deci căutăm asimptotă oblică la $-\infty$. Avem

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 2022x}{x} =$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(-\sqrt{1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}} - 2022\right)}{x} = -2023$$

şi

$$n = \lim_{x \to -\infty} [f(x) + 2023x] = \lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x) =$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}} + 1\right)} = \frac{1}{2},$$

deci $y = -2023x + \dfrac{1}{2}$.

Răspuns corect: a).

**9.** Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul de abscisă 1 este

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1).$$

Cum $f(1) = -4$ iar $f'(1) = 6$, se obţine $y = 6x - 10$.

Răspuns corect: b).

**10.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 - mx)e^x$. Cum $f(0) = 1$, rezultă că $f(x) \leq f(0)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $x = 0$ este punct de maxim local pentru $f$. Cum $f$ este derivabilă în $x = 0$, rezultă conform teoremei lui Fermat, că $f'(0) = 0$.

Dar $f'(x) = -me^x + (1 - mx)e^x$ cu $f'(0) = -m + 1$, de unde se obţine $m = 1$ care satisface condiţia problemei.

Răspuns corect: c).

**11.** Folosind formula de integrare prin părţi obţinem:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\cos 2x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)' dx = \\ &= (2x-1)\cdot\frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \\ &= (\pi-1)\cdot\frac{\sin\pi}{2} + \frac{\sin 0}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -1.\end{aligned}$$

Răspuns corect: a).

**12.** Folosind formula de integrare prin părţi obţinem:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}dx &= \frac{2}{3}\int_0^2 \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}\cdot x^3 dx = \frac{2}{3}\int_0^2 (\sqrt{1+x^3})'\cdot x^3 dx = \\ &= \frac{2}{3}\left(x^3\sqrt{1+x^3}\Big|_0^2 - \int_0^2 3x^2\sqrt{1+x^3}\ dx\right) \overset{\substack{1+x^3=t \\ 3x^2dx=dt}}{=} \\ &= \frac{2}{3}\left(24 - \int_1^9 \sqrt{t}\ dt\right) = \frac{2}{3}\left(24 - \frac{2}{3}t\sqrt{t}\Big|_1^9\right) = \frac{40}{9}\ .\end{aligned}$$

Răspuns corect: e).

**SESIUNEA: IULIE, DATA 17.07.2023 A**

**1.(7p)** Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$ şi $g(x) = 3x - 1$. Să se determine suma soluţiilor ecuaţiei $(f \circ g)(x) = 0$.

a) 0 b) 1 c) $-1$ d) 9 e) $-9$

**2.(8p)** Fie numărul complex $z$ care verifică ecuaţia

$$\bar{z} + |z| = 2 + 8i.$$

Să se determine $|z|$.

a) 289 b) 15 c) 8 d) 23 e) 17

**3.(9p)** La o şedintă cu părinţii participă şapte doamne şi opt domni, printre care doamna X şi domnul Y. În câte moduri se poate forma un comitet de trei doamne şi patru domni, ştiind că doamna X refuză să fie desemnată împreună cu domnul Y?

a) 277200 b) 1925 c) 525 d) 2450 e) 5040

**4.(10p)** Fie $(x_0, y_0, z_0)$ o soluţie nebanală a sistemului liniar omogen

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 9y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}.$$

Să se determine valoarea raportului

$$\frac{x_0y_0 + x_0z_0 + y_0z_0}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

a) $\frac{37}{75}$ b) $-\frac{47}{75}$ c) 0 d) $-\frac{37}{75}$ e) $\frac{47}{75}$

**5.(8p)** Să se determine rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 0 e) 5

**6.(7p)** Să se descompună în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$ polinomul

$$f = X^4 + \widehat{2}X^3 + \widehat{4}X + \widehat{3} \in \mathbb{Z}_5[X].$$

a) $(X+\widehat{4})^2(X^2+X+\widehat{1})$ b) $(X+\widehat{4})(X+\widehat{2})(X^2+\widehat{1})$
c) $(X+\widehat{2})(X+\widehat{3})(X^2+\widehat{1})$ d) $(X+\widehat{2})^2(X^2+X+\widehat{1})$
e) $(X+\widehat{2})(X+\widehat{4})(X^2+X+\widehat{1})$

**7.(8p)** Fie vectorii $\vec{u} = \vec{i} + (a+1)\vec{j}, \vec{v} = -b\vec{i} + 4\vec{j}, \vec{w} = (2a+4)\vec{i} - 4b\vec{j}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Dacă $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$, să se calculeze $a + b$.

a) $-2$ b) 2 c) 0 d) $-1$ e) 1

**8.(9p)** Să se calculeze diatanţa de la $O(0,0)$ la simetricul punctului $A(4,2)$ faţă de punctul $B(-1,1)$.

a) $2\sqrt{5}$ b) 2 c) $3\sqrt{10}$ d) $\sqrt{2}$ e) 6

**9.(8p)** Să se determine ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei

$$f : (-\infty, -2) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt{4x^2+1} - \sqrt{x^2+2x}.$$

a) $y = -x - 1$ b) $y = x - 1$ c) $y = x + 1$
d) $y = 1 - x$ e) $y = -x$

**10.(8p)** Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \ f(x) = x + 2\sqrt{x}$$

în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

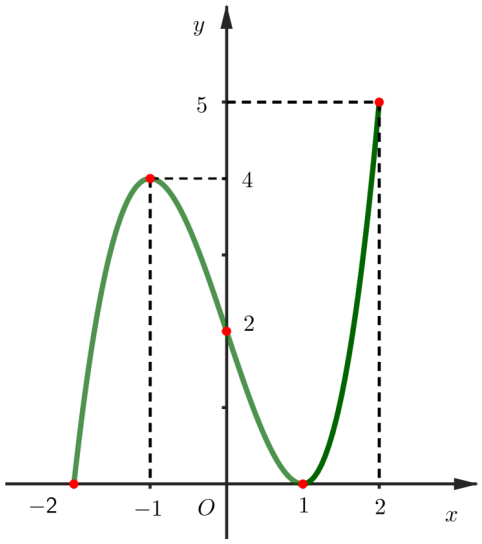
a) $y = 5x - 2$ b) $y = 3x$ c) $y = 2x + 1$
d) $y = 3x + 2$ e) $y = 5 - 2x$

**11.(8p)** Să se calculeze

$$\int_0^1 (x^2 - x) \cdot e^{-2x}\, dx.$$

a) $\frac{1}{2e^2}$ b) $\frac{1}{e^2} + 1$ c) $-\frac{1}{6e^2}$ d) $-\frac{1}{2e^2}$ e) $-\frac{1}{e^2} - 1$

**12.(10p)** Graficul unei primitive $F$ a unei funcţii continue $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ este dat în figura de mai jos. Câte dintre afirmaţiile de mai jos sunt adevărate?




$(i)$ $F'(1) = f(1)$ $(ii)$ $f(1) = F(1)$ $(iii)$ $\int_0^2 f(x)dx = 3$

$(iv)$ $\int_{-1}^{0} f(x) \cdot F(x)\, dx = -6$ $(v)$ $f(x) \leq 0, \forall x \in (-1, 1)$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

SOLUŢII AC Iulie 2023

**1.** Avem $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 - g(x) = 9x^2 - 9x + 2$. Atunci suma soluţiilor ecuaţiei $9x^2 - 9x + 2 = 0$ este $x_1 + x_2 = 1$.

Răspuns corect: b).

**2.** Notăm $z = a + ib$, de unde $\bar{z} = a - ib$ şi $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ecuaţia devine

$$a - ib + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 8i.$$

Prin identificarea părţilor reale, respectiv imaginare obţinem sistemul

$$\begin{cases} a + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \\ b = -8 \end{cases}$$

Rezultă $\sqrt{a^2 + 64} = 2 - a$ cu $2 - a \geq 0$. Prin ridicare la pătrat găsim $a = -15$ şi în final $|z| = 17$.

Răspuns corect: e).

**3.** Dintr-un grup de $n$ persoane se pot alege $k$ persoane în $C_n^k$ moduri. Atunci, fără restricţii, ar fi $C_7^3$ moduri de a alege doamnele şi $C_8^4$ moduri de a alege domnii. Conform "regulii produsului", avem $C_7^3 \cdot C_8^4$ moduri de a forma comitetul respectiv (fără restricţii). Din acest număr vom scădea cazurile "nefavorabile", adică cele în care doamna X şi domnul Y fac parte din comitet: $C_6^2 \cdot C_7^3$ (deoarece mai rămân de ales două doamne din şase şi trei domni din restul de şapte). Rezultă 1925 de moduri.

Răspuns corect: b).

**4.** Notăm $z = z_0$. Atunci sistemul dat devine

$$\begin{cases} x + 2y = -z_0 \\ x - 3y = -2z_0 \end{cases}.$$

Reducem pe $x$ şi găsim $y_0 = \dfrac{z_0}{5}$, apoi $x_0 = -\dfrac{7z_0}{5}$, ce verifică ecuaţia nefolosită. Prin înlocuirea în expresie obţinem $-\dfrac{37}{75}$.

Răspuns corect: d).

**5.** Minorul de ordinul 3 format din primele două coloane şi ultima coloană este nenul, deci rangul matricei este 3.

Răspuns corect: c).

**6.** Folosind schema lui Horner, verificăm dacă elementele lui $\mathbb{Z}_5$ sunt rădăcini ale polinomului dat. Găsim că doar $\hat{1}$ şi $\hat{3}$ sunt rădăcini. Mai mult, rezultă descompunerea

$$f = (X - \hat{1})(X - \hat{3})(X^2 + X + 1) = (X + \hat{4})(X + \hat{2})(X^2 + X + 1),$$

unde $X^2 + X + 1$ este ireductibil deoarece este polinom de gradul doi fără rădăcini în $\mathbb{Z}_5$.

Răspuns corect: e).

**7.** Avem

$$\vec{u} + \vec{v} = (1 - b)\vec{i} + (a + 5)\vec{j}.$$

Prin identificarea cu coordonatele lui $\vec{w}$ obţinem condiţiile

$$1 - b = 2a + 4,\ a + 5 = -4b.$$

Rezultă $a = -1, b = -2$, deci $a + b = -2$.

Răspuns corect: a).

**8.** Folosind formula mijlocului unui segment obţinem că simetricul lui $A$ faţă de $B$ este punctul $C(-6, 0)$. Atunci $OC = 6$.

Răspuns corect: e).

**9.** Folosind că $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ pentru $x < 0$, avem

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -x \left( \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \right) = \infty(2 - 1) = \infty,$$

deci nu există asimptotă orizontală spre $-\infty$.

Căutăm asimptota oblică $y = mx + n$, unde

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)}{x} = -1,\\
n &= \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+1} - \sqrt{x^2+2x} + x\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+1} + 2x\right) - \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} + x\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2+1} - 2x} - \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x} - x}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-x\left(\sqrt{4+1/x^2} + 2\right)} - \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-x\left(\sqrt{1+2/x} + 1\right)}\\
&= 0 + 1 = 1.
\end{aligned}$$

Rezultă $y = -x + 1$.

Răspuns corect: d).

**10.** Avem $f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$. Panta tangentei este $m = f'(1) = 2$. Cum $f(1) = 3$, ecuaţia tangentei va fi $y - 3 = 2(x - 1)$, adică $y = 2x + 1$.

Răspuns corect: c).

**11.** Folosim de două ori formula de integrare prin părţi cu

$$\int e^{-2x}\,dx = \frac{e^{-2x}}{-2}, \text{ adică } e^{-2x} = -\frac{1}{2}(e^{-2x})'$$

Avem

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x^2 - x)\cdot e^{-2x}\,dx &= (x^2 - x)\frac{e^{-2x}}{-2}\Big|_0^1 - \int_0^1 (2x-1)\frac{e^{-2x}}{-2}\,dx\\
&= 0 + \frac{1}{2}\left((2x-1)\frac{e^{-2x}}{-2}\Big|_0^1 - \int_0^1 2\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}\,dx\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-2}}{-2} - \frac{1}{2} + \frac{e^{-2x}}{-2}\Big|_0^1\right) = -\frac{1}{2e^2}.
\end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

**12.** Avem:
$(i)$ Adevărat din definiţia primitivei.
$(ii)$ $x = 1$ este punct de minim al funcţiei derivabile $F$. Din Teorema lui Fermat rezultă că $F'(1) = 0$, deci $f(1) = 0$. Mai mult, din grafic, $F(1) = 0$. Deci adevărat.
$(iii)$ $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0) = 5 - 2 = 3$, deci adevărat.
$(iv)$ $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\cdot F(x)\,dx = \int_{-1}^0 F'(x)\cdot F(x)\,dx = \frac{1}{2}F^2(x)|_{-1}^0 = \frac{1}{2}(2^2 - 4^2) = -6$; adevărat.

$(v)$ Pe intervalul $(-1, 1)$ funcţia $F$ este descrescătoare, deci $F'(x) \leq 0$, adică $f(x) \leq 0$ pentru orice $x \in (-1, 1)$. Astfel şi ultima afirmaţie este adevărată.

Răspuns corect: e).

# Bibliografie


[1] T. Bânzaru, N. Boja, O. Lipovan, A. Kovacs, G. Babescu, P. Găvruţa, D. Rendi, I. Mihuţ, D. Dăianu, D. Păunescu, C. Milici, R. Anghelescu, *Teste grilă de matematică pentru examenul de bacalaureat si admiterea în învaţământul superior*, Editura Politehnica, 2010.

[2] Gh. Cenuşă, V. Burlacu, M. Covrig, B. Iftime, I. Mircea, C. Raischi, R. Şerban, O. Vegheş, *Admitere ASE Bucureşti, Teste grilă şi autoevaluare*, 2005-2008, Editura Cison, Bucureşti.

[3] P. Găvruţa, I. Goleţ, D. Păunescu, C. Arieşanu, C. Lăzureanu, A. Gîrban, L. Cădariu, G. Ţigan, A. Juratoni, C. Hedrea, O. Bundău, C. Petrişor, *Culegere de probleme pentru examenul de bacalaureat şi admiterea în Universitatea Politehnica Timişoara*, Editura Politehnica Timişoara, 2013.

[4] Gh. Gussi, O. Stănăşilă, T. Stoica, *Matematică, Elemente de Analiză Matematică*, Manual pentru clasa a XI-a, Editura Didactică şi Pedagogică, R.A. Bucureşti, 1994.

[5] D. V. Ionescu, *Complemente de Matematici pentru liceu*, Editura Didatică şi Pedagogică, 1978.

[6] C. Ionescu-Ţiu, L. Pîrşan *Calcul diferenţial şi integral pentru admitere în facultate*, Editura Albatros, Bucureşti, 1975.

[7] C. P. Nicolescu, *Teste de analiză matematică*, Editura Albatros, 1984.

[8] C. P. Nicolescu, *Analiză matematică. Aplicaţii*, Editura Albatros, 1987.

[9] I. Petrică, E. Constantinescu, D. Petre, *Probleme de Analiză Matematică*, Vol. 1 (clasa XI), Editura Petrion, 1993.

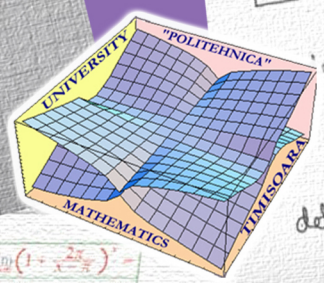
[10] V. Radu, *Teme şi probleme de matematică pentru Concursul "Traian Lalescu"*, caiete de studiu - clasa a XI-a, Editura Mirton, 1999.

[11] *Gazeta Matematică.*

[12] *Manuale alternative de Matematică aprobate de Ministerul Educaţiei Naţionale.*

[13] *Probleme date la olimpiade şi concursuri de matematică.*

[14] *Variante Bacalaureat Matematică emise de Ministerul Educaţiei Naţionale.*




dieze existența limitei $l = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x}{x}\right]$ și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

Să se calculeze $\cos(a-b)$.

b) $-\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $-\frac{1}{8}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $-\frac{1}{2}$

Editura POLITEHNICA

ISBN 978-606-35-0565-2