Universitatea de Vest din Timişoara
Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Inspectoratul Şcolar Judeţean Timiş

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul "Traian Lalescu"
Ediţia a XXXIV-a, Timişoara, 25 martie 2023

Soluţii şi barem orientativ de corectare la clasa a V-a

1. *Fane a cules 756 de afine. El a împărţit afinele cu prietenii săi astfel încât toţi copiii au avut acelaşi număr de afine. La un moment dat, trei dintre prietenii lui Fane au spus că s-au săturat şi i-au dat înapoi lui Fane afinele rămase, exact un sfert din câte au primit. Fane este un mâncăcios; el a mâncat nu numai porţia sa dar şi ce a rămas de la prietenii săi. El nu mai ştie exact câte afine a mâncat, dar ştie sigur că au fost mai mult de 150 de afine. Câte afine a mâncat Fane?*

Soluţie şi barem: Start **1p**
Dacă notăm cu n numărul de afine rămase de la fiecare din cei trei copii care nu şi-au mâncat afinele, atunci porţia fiecărui copil a fost de $4n$ afine. **2p**
Fane a mâncat porţia sa, de $4n$ afine, plus câte n afine de la fiecare din cei trei prieteni, deci $7n$ afine în total. **1p**
Cum $7n > 150$, deducem că $n \geq 22$, deci $4n \geq 88$. Aşadar, o porţie constă din cel puţin 88 de afine. **2p**
Cum $9 \cdot 88 > 756$, rezultă că numărul de copii, să-l notăm cu m, este cel mult 8 (şi cel puţin 4). El trebuie să satisfacă $m \cdot 4n = 756$, adică $mn = 189$. Singura posibilitate este atunci ca $m = 7$ şi $n = 27$. Astfel, Fane a mâncat $7n = 189$ de afine. **4p**

2. *Se face o listă cu numerele de la 1 la 2023 în felul următor:*
- mai întâi, se scriu în ordine crescătoare acele numere care nu sunt divizibile cu 3;
- apoi, în continuare, se scriu, tot în ordine crescătoare, acele numere care sunt divizibile cu 3 dar nu şi cu 9;
- urmează, în ordine crescătoare, numerele divizibile cu 9 dar nu şi cu 27;
- se continuă în acest mod până când sunt scrise toate numerele de la 1 la 2023.
a) Care este ultimul număr de pe listă?
b) Determinaţi toate perechile formate din două numere scrise unul după altul în listă şi a căror sumă nu este divizibilă cu 3.
c) Al câtelea număr de pe listă este numărul 2023? Dar 999?

Soluţie şi barem: Start **1p**
a) Cum $3^6 = 729$ şi $2 \cdot 3^6 = 1458$ sunt mai mici ca 2023, dar $3^7 = 2187 > 2023$, ultimele două numere scrise vor fi 729 şi 1458. Aşadar, ultimul număr scris este 1458. ..... **2p**
b) Lista începe cu numerele nedivizibile cu 3, scrise în ordine. După fiecare număr de forma $3k+1$ urmează $3k+2$, iar după fiecare număr de forma $3k+2$ urmează $3k+4$, astfel că suma oricăror două numere vecine, nedivizibile cu 3, este divizibilă cu 3.
Lista continuă cu numerele divizibile cu 3, astfel că şi aici suma oricăror două numere vecine este divizibilă cu 3.
Singura pereche de numere vecine care au suma nedivizibilă cu 3 este cea formată din ultimul număr nedivizibil cu 3, anume 2023, şi primul număr divizibil cu 3 (dar nedivizibil cu 9), anume 3. ..... **2p**
c) În faţa lui 2023 sunt scrise toate numerele mai mici decât el dar nedivizibile cu 3. Aşadar, din cele 2022 de numere mai mici decât el lipsesc $3 \cdot 1$, $3 \cdot 2$, $3 \cdot 3$, ... , $3 \cdot 674$, adică 674 numere. Aşadar, înaintea lui 2023 sunt $2022 - 674 = 1348$ de numere, deci 2023 este al 1349-lea. **2p**
Deoarece $999 = 27 \cdot 37$ este divizibil cu 3^3 dar nu şi cu 3^4, înaintea lui 999 apar în listă:
- numerele nedivizibile cu 3
- numerele divizibile cu 3, dar nu şi cu 9
- numerele divizibile cu 9, dar nu şi cu 27
- numerele divizibile cu 27, dar nu şi cu 81 care sunt mai mici ca 999.

În total, în primele trei categorii intră toate numerele nedivizibile cu 27. Cum $2023 = 27 \cdot 74 + 25$, în primele trei categorii intră $2023 - 74 = 1949$ de numere. La astea se mai adaugă acelea dintre numerele $27 \cdot 1$, $27 \cdot 2$, ... , $27 \cdot 36$ care nu sunt divizibile cu 81. Cum 12 din cele 36 de numere de mai sus sunt divizibile cu 81, în categoria a patra sunt 24 de numere. În total, sunt $1949 + 24 = 1973$ de numere înaintea lui 999, deci 999 este al 1974-lea. **3p**
Alternativ, se puteau număra numerele care apar după 999 în listă: cei 24 de multipli de 81 şi cele 25 de numere divizibile cu 27, dar nu şi cu 81, mai mari ca 999.

3. *a) Arătaţi că numerele* $1, 2, 3, \ldots, 12$ *pot fi grupate în patru grupe de câte trei aşa încât, în fiecare grupă, unul dintre numere să fie egal cu suma celorlalte două.*
b) Stabiliţi dacă numerele $1, 2, 3, \ldots, 12$ *pot fi grupate în trei grupe de câte patru aşa încât, în fiecare grupă, unul dintre numere să fie egal cu suma celorlalte trei.*
c) Stabiliţi dacă numerele $1, 2, 3, \ldots, 33$ *pot fi grupate în 11 grupe de câte trei aşa încât, în fiecare grupă, unul dintre numere să fie egal cu suma celorlalte două.*

Soluţie şi barem: Start **1p**
a) Putem grupa numerele, de exemplu, în felul următor: $(12, 11, 1)$, $(10, 6, 4)$, $(9, 7, 2)$, $(8, 5, 3)$. În fiecare grupă, primul număr este egal cu suma celorlalte două. **3p**
(Sunt şi alte şase moduri de a face gruparea.)
b), c) Nu există o asemenea grupare. Să presupunem că ar exista. Să numim ,,special" acel număr din fiecare grupă care este egal cu suma celorlalte. Suma numerelor speciale trebuie să fie egală cu suma celorlalte numere, deci trebuie să fie egală cu

jumătate din suma numerelor date. **3p**
La b), suma numerelor date este 78, deci suma celor trei numere speciale trebuie să fie 39. Dar suma a trei dintre numerele date poate fi cel mult $10+11+12=33<39$, deci gruparea de la b) nu este posibilă. **2p**
c) Suma numerelor date este impară, deci gruparea nu este posibilă. **1p**

4. *Câte dintre numerele naturale mai mici decat 2023 au proprietatea că produsul cifrelor este un număr nenul, divizibil cu 64?*

Andrei Eckstein

Soluţie şi barem: Start **1p**
Singurul număr de două cifre cu proprietatea cerută este 88. ..... **1p**
Cu trei cifre, considerăm cazuri, în funcţie de numărul de cifre de 8.
1. Cu trei cifre de 8 îl avem pe numai 888. ..... **1p**
2. Cu două cifre de 8 avem 24 de numere. Poziţia cifrei diferite de 8 poate fi oricare din cele 3, iar cifra nenulă diferită de 8 poate fi aleasă în 8 moduri. (Toate aceste 24 de numere au produsul cifrelor divizibil cu 64.) **2p**
3. Cu o singură cifră de 8: cel puţin una din celelalte două cifre trebuie să fie 4.
Cu doi de 4 avem 3 numere (448, 484 şi 844), cu un 4 (şi încă o cifră pară, 2 sau 6), avem 12 numere (şase numere cu cifrele 2,4,8 şi alte şase cu cifrele 4,6,8).
4. În fine, cu nicio cifră de 8 singurul număr convenabil este 444. ..... **3p**
Aşadar sunt 41 de numere de trei cifre.
Cu patru cifre convin numai numerele care încep cu 1 (cele care încep cu 2 au produsul cifrelor 0). Cum 1 e impar, acestea sunt bune dacă şi numai dacă numărul obţinut ştergând prima cifră este bun, ori am văzut că acest lucru se întâmplă pentru 41 de numere. **1p**
În concluzie, sunt 83 de numere cu proprietatea din enunţ. **1p**

Universitatea de Vest din Timişoara
Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Inspectoratul Şcolar Judeţean Timiş

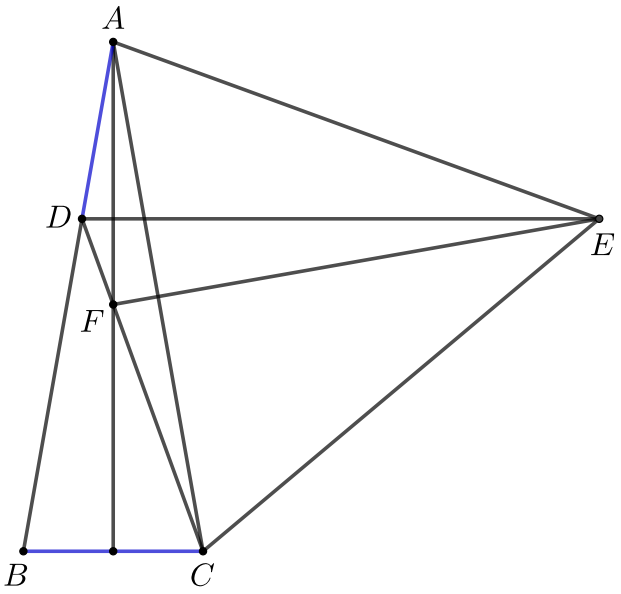
Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul "Traian Lalescu"
Ediţia a XXXIV-a, Timişoara, 25 martie 2023

Soluţii şi barem orientativ de corectare la clasa a VI-a

1. *a) Daţi exemplu de 13 numere întregi cu suma şi produsul egale cu 14.*
b) Arătaţi că nu există 13 numere întregi cu suma 14 şi produsul 15.
c) Stabiliţi dacă există 13 numere întregi cu suma 15 şi produsul 14.

Soluţie şi barem: Start **1p**
a) Un exemplu este $n_1 = 14$, $n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = n_7 = 1$, $n_8 = n_9 = n_{10} = n_{11} = n_{12} = n_{13} = -1$. **4p**
b) Dacă produsul la 13 numere întregi este 15, toate numerele trebuie să fie impare. Atunci şi suma lor este impară, deci nu poate fi 14. ..... **2p**
c) Nu există. Dacă produsul este 14, adică un număr par care nu este divizibil cu 4, exact unul dintre cele 13 numere va fi par, celelalte 12 vor fi impare. Atunci suma celor 13 numere va fi un număr par, deci nu poate fi 15. ..... **3p**

2. *Pe latura AB a triunghiului isoscel ABC, cu $AB = AC$ şi $\sphericalangle BAC = 20^\circ$, se consideră punctul D astfel încât $AD = BC$. În exteriorul triunghiului se construieşte triunghiul echilateral ACE. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ intersectează segmentul CD în punctul F. Arătaţi că:*
a) dreptele BC şi DE sunt paralele;
b) semidreapta $(EF$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AEC$.



Soluţie şi barem: Start **1p**
a) Avem $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 80^\circ$ şi $\sphericalangle EAD = \sphericalangle EAC + \sphericalangle CAB = 60^\circ + 20^\circ = 80^\circ$.
De asemenea, avem $AB = AC = CE = AE$.
Cum $AD = BC$, rezultă că triunghiurile EAD şi ABC sunt congruente (LUL). ..**3p**
Rezultă că $\sphericalangle ADE = 80^\circ = \sphericalangle ABC$, de unde $DE \parallel BC$. **1p**
b) Din congruenţa de mai sus rezultă că $DE = AC = CE$ şi că $\sphericalangle AED = 20^\circ$, deci triunghiul CDE este isoscel, cu unghiul de la vârf $\sphericalangle DEC = \sphericalangle AEC - \sphericalangle AED = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$. Atunci unghiurile de la bază au 70°, adică $\sphericalangle ECD = 70^\circ$. **2p**
Deducem că $\sphericalangle FCA = \sphericalangle DCE - \sphericalangle ACE = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ = \sphericalangle FAC$, deci triunghiul FAC este isoscel, cu $AF = FC$. **1p**
În fine, triunghiurile AFE şi CFE sunt congruente (LUL)
($AF = CF$, $\sphericalangle FAE = \sphericalangle FCE = 70^\circ$, EF - latură comună),
deci $\sphericalangle AEF \equiv \sphericalangle CEF$, adică ($EF$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AEC$. **2p**

3. *Câte numere de patru cifre au în scrierea lor în baza 10 o cifră de 2 scrisă lângă o cifră de 3? De exemplu, numerele* $20\underline{23}$, $4\underline{32}1$ *şi* $\underline{32}3\underline{3}$ *sunt numere cu această proprietate.*

Andrei Eckstein

Soluţie şi barem: Start **1p**
Numerele căutate sunt de trei tipuri, după cum grupul $\{2, 3\}$ apare pe primele două cifre, pe cele două din mijloc sau pe ultimele două cifre ale numărului. **1p**
Vom număra câte numere sunt din fiecare tip, dar trebuie să ţinem cont şi de faptul că unele numere se încadrează la mai multe tipuri deci vor fi numărate de mai multe ori.
La primul tip se încadrează numerele de forma $\overline{23xy}$ şi cele de forma $\overline{32xy}$. Cifrele x şi

y pot fi alese în câte 10 moduri, deci sunt câte 100 de numere de fiecare formă, adică 200 în total. **1p**
La tipul al doilea se încadrează numerele $\overline{x23y}$ şi $\overline{x32y}$, unde x este cifră nenulă, iar y orice cifră. Sunt $9 \cdot 10 = 90$ de numere de fiecare forma, deci 180 în total. **1p**
La tipul al treilea se încadrează numerele $\overline{xy23}$ şi $\overline{xy32}$, unde x este cifră nenulă, iar y orice cifră. Sunt $9 \cdot 10 = 90$ de numere de fiecare forma, deci 180 în total. **1p**
Să vedem acum care sunt numerele pe care le-am numarat de mai multe ori.
Am numărat şi la tipul 1 şi la tipul 2 numerele de forma $\overline{232y}$ şi $\overline{323y}$, câte 10 numere, deci 20 în total. **1p**
Am numărat şi la tipul 1 şi la tipul 3 numerele 2323, 2332, 3223 şi 3232. ..... **1p**
Am numărat şi la tipul 2 şi la tipul 3 numerele $\overline{x232}$ şi $\overline{x323}$, câte 9 de fiecare formă. **1p**
Toate aceste numere trebuie scăzute.
Apoi, numerele 2323 şi 3232 care se încadrează la fiecare tip au fost adunate de 3 ori, scăzute de 3 ori, deci trebuie adunate la loc. **1p**
În final, sunt $200 + 180 + 180 - 20 - 4 - 18 + 2 = 520$ de numere care au cifre de 2 şi 3 vecine. **1p**

Soluţie alternativă şi barem: Start **1p**
Numerele căutate sunt de trei tipuri, după cum grupul $\{2, 3\}$ apare pe primele două cifre, pe cele două din mijloc sau pe ultimele două cifre ale numărului. **1p**
Totuşi, unele numere se încadrează la mai multe cazuri şi, pentru a nu le număra de mai multe ori, facem cazurile disjuncte.
Mai întâi avem numerele de forma $\overline{23xy}$ şi cele de forma $\overline{32xy}$. Cifrele x şi y pot fi alese în câte 10 moduri, deci sunt câte 100 de numere de fiecare formă, adică 200 în total. **1p**
Apoi avem numerele de forma $\overline{x23y}$, unde x este cifră nenulă diferită de 3 (numerele care încep cu 32 au fost numărate la cazul anterior). Sunt 8 moduri de a alege cifra x şi 10 moduri de a alege cifra y, deci 80 de numere de acest tip. Analog, sunt 80 de numere de forma $\overline{x32y}$, unde x este cifră nenulă, diferită de 2. Aşadar, obţinem alte 160 de numere. **2p**
În fine, avem numerele de forma $\overline{xy23}$ şi pe cele de forma $\overline{xy32}$ pe care nu le-am numărat în cazurile anterioare.
Pentru numerele de forma $\overline{xy23}$, x poate fi oricare din cele 9 cifre nenule, iar y orice cifră diferită de 3 (numerele de forma $\overline{x323}$ au fost numărate deja). Aparent sunt 81 de noi numere. **2p**
Însă numărul 3223 a fost considerat şi la primul caz, deci nu mai trebuie considerat şi acum, astfel că sunt doar 80 de numere noi de forma $\overline{xy23}$. **2p**
Similar, sunt 80 de noi numere de forma $\overline{xy32}$.
În total, sunt $200 + 160 + 160 = 520$ de numere cu proprietatea dorită. **1p**

4. *Determinaţi cifrele a, b astfel încât mulţimea $\{\overline{abxyz2023} \mid x, y, z$ - cifre$\}$ să conţină 10 numere divizibile cu 111.*

Andrei Eckstein

Soluţie şi barem: Start **1p**
Dacă 111 divide $\overline{abxyz2023}$ şi $\overline{abx'y'z'2023}$, atunci 111 divide şi diferenţa, adică pe $\big(100(x-x')+10(y-y')+(z-z')\big)\cdot 10^4$. Cum $(111, 10^4)=1$, deducem că 111 divide $100(x-x')+10(y-y')+(z-z') = \overline{xyz}-\overline{x'y'z'}$
(convenim să acceptăm această scriere chiar şi atunci când prima cifră este 0). .. **2p**
Deducem că dacă $\overline{abx'y'z'2023}$ este cel mai mic număr de această formă divizibil cu 111, atunci următoarele vin din 111000 în 111000. ..... **2p**
Diferenţa dintre cel de-al zecelea număr şi primul este atunci 999000. Aşadar, singurul caz în care mulţimea noastră are 10 numere divizibile cu 111 este cel în care $\overline{ab0002023}$ este divizibil cu 111. Atunci celelalte elemente ale mulţimii vor fi $\overline{ab1112023}$, $\overline{ab2222023}$, ... , $\overline{ab9992023}$. **2p**
Condiţia din enunţ revine aşadar la $111 \mid \overline{ab0002023}$, adică la $111 \mid 10^7\cdot\overline{ab}+2023$. Cum $111 \mid 9999990$ şi $2023 = 18\cdot 111+25$, deducem că $111 \mid 10\cdot\overline{ab}+25$. Dar $(111, 5)=1$ implică $111 \mid 2\cdot\overline{ab}+5$. Cum $0 < 2\cdot\overline{ab}+5 < 2\cdot 100+5 = 205 < 222$, $2\cdot\overline{ab}+5$ poate fi numai 111, de unde rezultă că $a=5$, $b=3$ este singura soluţie a problemei. **3p**

UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIŞOARA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN TIMIŞ

Concursul interjudeţean de matematică Memorialul "Traian Lalescu", ediţia a 34-a, Timişoara, 25 martie 2023

Clasa a 7-a - Soluţii şi barem orientativ de corectar

1. *a) Considerăm mulţimea* $\mathcal{T} = \{k \in \mathbb{Z} | \ -1985 \leq k \leq 2023\}$. *Determinaţi numărul tuturor perechilor* $(x, y) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ *cu proprietatea că numărul* $\sqrt{x+1985} + \sqrt{2023-y}$ *este raţional.*

b) Printre perechile de la punctul a) există perechi (x, y) *pentru care* $x + y = 34$*? Dacă da, câte astfel de perechi există?*

Soluţie:

start **1p**

a) Dacă $p, q \in \mathbb{Q}$ sunt numere raţionale cu $\sqrt{p} + \sqrt{q} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{p}, \sqrt{q} \in \mathbb{Q}$:
Dacă cel puţin unul dintre numerele p şi q este nenul(cazul $p = q = 0$ este evident), atunci $a = \sqrt{p} + \sqrt{q} \in \mathbb{Q}_+^*$ şi $\sqrt{p} = \frac{a+p-q}{2a} \in \mathbb{Q}$ şi $\sqrt{q} = \frac{a+q-p}{2a} \in \mathbb{Q}$ **2p**
Rezultă că perechile căutate au proprietatea că $\sqrt{1985+x} \in \mathbb{Q}$ şi $\sqrt{2023-y} \in \mathbb{Q}$, astfel că $1985 + x$ şi $2023 - y$ sunt pătrate perfecte. **2p**
Pentru $x, y \in \mathcal{T}$ avem că $1985 + x, 2023 - y \in \mathcal{L} = \{n \in \mathbb{N} | \ 0 \leq n \leq 2023 + 1985 = 4008\}$.
Cum $63^2 = 3969 < 4008 < 4096 = 64^2$, mulţimea $\mathcal{L}$ conţine 64 de pătrate perfecte.... **1p**
Numărul de perechi $(x, y) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ care respectă cerinţa din enunţ este atunci $64^2 = 4096$.
..... **1p**

b) Condiţia din enunţ $x + y = 34$ este echivalentă cu
$(1985 + x) - (2023 - y) = 34 + 1985 - 2023$,
adică $k^2 - l^2 = -4$, unde $k^2 = 1985 + x$, iar $l^2 = 2023 - y$..... **1p**
Singura modalitate de a scrie -4 ca diferenţă de pătrate de numere naturale este
$-4 = 0^2 - 2^2$. **1p**
Prin urmare există o singură pereche, anume $(x, y) = (-1985, 2019)$ care respectă condiţia de la punctul a) şi pentru care $x + y = 34$. **1p**

2. *Fie* γ *un cerc, iar* A *şi* B *două puncte pe cercul* γ*. Un cerc* ω *este tangent interior cercului* γ *în punctul* A*, iar* $[BC]$ *şi* $[BD]$ *sunt coarde ale cercului* γ*, tangente la cercul* ω *în punctele* U*, respectiv* V*. Arătaţi că* $\widehat{CAD} = 2 \cdot \widehat{UAV}$*.*

Soluţie:

start **1p**

Fie t_A tangenta în punctul A la cercurile γ şi ω, K şi L punctele în care semidreptele

(AU, respectiv (AV intersectează cercul γ, t_K şi t_L tangentele în punctele K, respectiv L la γ, iar M, N, P şi Q punctele în care t_A este intersectată de dreptele BC, BD, t_K, respectiv t_L. Atunci triunghiurile MAU, NAV, PAK, QAL sunt isoscele, cu $MA = MU$, $NA = NV$, $PA = PK$ şi $QA = QL$. **2p**
Rezultă că au loc congruenţele de unghiuri

$$\widehat{MUA} \equiv \widehat{MAU} = \widehat{PAK} \equiv \widehat{PKA}\,, \qquad \text{respectiv} \qquad \widehat{NVA} \equiv \widehat{NAV} = \widehat{QAL} \equiv \widehat{QLA}\,,$$

..... **2p**
astfel că $BC \parallel t_K$ şi $BD \parallel t_L$ **1p**
Rezultă că K şi L sunt mijloacele arcelor BC şi BD din cercul γ care nu conţin punctul A. **2p**
Dar atunci

$$\widehat{CAD} = \widehat{CAK} + \widehat{KAB} + \widehat{BAL} + \widehat{LAD} = 2\widehat{KAB} + 2\widehat{BAL} = 2\widehat{KAL} = 2\widehat{UAV}\,.$$

..... **2p**

3. *Pentru orice număr natural n considerăm numărul natural $a(n) = n + r(\sqrt{n})$, unde $r(x)$ înseamnă rotunjitul numărului real x la cel mai apropiat număr întreg. Determinaţi cel mai mic număr natural k, pentru care numerele $a(k), a(k+1), \ldots, a(k+2022)$ sunt 2023 de numere naturale consecutive.*

Soluţie:
start **1p**
Pentru orice număr natural n avem că

$$a(n+1) - a(n) = n + 1 + r(\sqrt{n+1}) - n - r(\sqrt{n}) = 1 + r(\sqrt{n+1}) - r(\sqrt{n})\,.$$

..... **1p**
Numerele $a(n)$ şi $a(n+1)$ sunt consecutive dacă şi numai dacă $r(\sqrt{n}) = r\sqrt{n+1})$, adică dacă şi numai dacă există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $m \le \sqrt{n} < \sqrt{n+1} < m + \frac{1}{2}$ sau $m + \frac{1}{2} \le \sqrt{n} < \sqrt{n+1} < m + 1$. **2p**
Numerele $a(k)$, $a(k+1)$, ..., $a(k+2022)$ sunt consecutive dacă şi numai dacă există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $m^2 \le k < k+2022 < m^2+m+\frac{1}{4}$ sau $m^2+m+\frac{1}{4} \le k < k+2022 < m^2+2m+1$. **1p**
Deoarece numerele k, $k+1$, ..., $k+2022$ sunt naturale, ultimele inegalităţi se transcriu $m^2 \le k < k+2022 \le m^2+m$, respectiv $m^2+m+1 \le k < k+2022 \le m^2+2m$. ... **1p**
Mulţimea $A_m = \{m^2, m^2+1, \ldots, m^2+m\}$ conţine $m+1$ numere naturale, iar mulţimea $B_m = \{m^2+m+1, m^2+m+2, \ldots, m^2+2m\}$ conţine m numere naturale. **1p**
Cel mai mic număr $m \in \mathbb{N}$ pentru care A_m conţine 2023 de numere este $m = 2022$, iar cel mai mic număr $m \in \mathbb{N}$ pentru care B_m conţine 2023 de numere naturale este $m = 2023$. **1p**
Rezultă că numărul k minim pentru care numerele naturale $a(k)$, $a(k+1)$, ..., $a(k+2022)$ sunt consecutive este $k = 2022^2$. **2p**
(Pentru acesta avem că $a(2022^2) = 2022 * 2023$, $a(2022^2+1) = 2022 * 2023 + 1$, ..., $a(2022^2+2022) = a(2022 * 2023) = 2022 * 2024$, care sunt 2023 de numere consecutive.)

4. *Fie A, B şi C trei puncte coliniare, aflate pe o dreaptă d, cu $B \in (AC)$. Perpendicularele a şi b pe dreapta d prin A, respectiv B, sunt intersectate de o dreaptă c prin C în punctele Q, respectiv R. Perpendiculara prin A pe BQ intersectează dreptele BQ în punctul L şi b în punctul T. Perpendiculara prin B pe AR intersectează dreptele AR în K şi a în S. Arătaţi că*
a) Punctele C, S şi T sunt coliniare.
b) Punctele C, K şi L sunt coliniare.

Soluţie:

start **1p**

Deoarece $a \perp d \perp b$ rezultă că $a \parallel b$, astfel că triunghiurile CAQ şi CBR sunt asemenea şi

$$\frac{BR}{AQ} = \frac{CB}{CA} = \frac{CR}{CQ}.$$

..... **1p**

Din perpendicularităţile $a \perp d \perp b$ şi $AT \perp BQ$ obţinem egalităţile de unghiuri

$$\widehat{AQB} = \widehat{QBT} = 1dr - \widehat{ATB} = \widehat{TAB},$$

astfel că $\Delta\, QAB \sim \Delta\, ABT$, de unde avem că $\frac{AQ}{AB} = \frac{AB}{BT}$, sau $AQ \cdot BT = AB^2$.
Similar,

$$\widehat{ARB} = \widehat{RAS} = 1dr - \widehat{ASB} = \widehat{ABS},$$

$\Delta\, BRA \sim \Delta\, ABS$, deci $\frac{BR}{AB} = \frac{AB}{AS}$, şi $BR \cdot AS = AB^2$.
..... **2p**

Atunci $AQ \cdot BT = BR \cdot AS$, astfel că $\frac{AS}{BT} = \frac{AQ}{BR} = \frac{AC}{BC}$. **1p**

Rezultă că triunghiurile dreptunghice SAC şi RBC sunt asemenea, astfel că $\widehat{ACS} = \widehat{BCR}$ şi punctele C, R, S sunt coliniare. **1p**

b) Fie $M \in a \cap CL$ şi $N \in b \cap CK$. Cu teorema lui Menelaos în triunghiurile $\Delta\, ABQ$ intersectat de transversala MLC, respectiv Δ, RBA intersectat de transversala KNC avem

$$\frac{AM}{MQ} \cdot \frac{QL}{LB} \cdot \frac{BC}{CA} = 1, \quad \text{respectiv} \quad \frac{BN}{NR} \cdot \frac{RK}{KA} \cdot \frac{AC}{CB} = 1,$$

..... **1p**

astfel că

$$\frac{AM}{MQ} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BL}{QL} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AB^2}{AQ^2} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AB^2 \cdot BT^2}{BR^2 \cdot AS^2} =$$

$$= \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AB^2}{BR^2} \cdot \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AK}{RK} = \frac{BN}{NR}$$

..... **1p**

Rezultă că $\frac{AM}{AQ} = \frac{BN}{BR}$, astfel că $\frac{AM}{BN} = \frac{AQ}{BR} = \frac{AC}{BC}$ şi triunghiurile dreptunghice $\Delta\, CAM$ şi $\Delta\, CBN$ sunt asemenea. Atunci $\widehat{LCA} = \widehat{MCA} = \widehat{NCB} = \widehat{KCA}$ şi rezultă că punctele C, K şi L sunt coliniare. **2p**

Notă: Orice abordare corectă se punctează corespunzător gradului de rezolvare a problemei.

Universitatea de Vest din Timişoara
Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Inspectoratul Şcolar Judeţean Timiş

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul "Traian Lalescu"
Ediţia a XXXIV-a, Timişoara, 25 martie 2023

Soluţii şi barem orientativ de corectare la clasa a VIII-a

1. *Fie numerele reale x şi y ce verifică egalitatea*

$$[\sqrt{2023}-x]+[x-y]+[y-\sqrt{2023}]=0,$$

unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a.

1. *Să se arate că x şi y sunt numere iraţionale.*
2. *Să se arate că există numerele întregi b şi c astfel încât $x^2+bx+c=0$.*

Soluţie şi barem: Start **1p**
$\{\sqrt{2023}-x\}+\{x-y\}+\{y-\sqrt{2023}\}=0$, unde $\{\cdot\}$ este partea fracţionară **2p**
$x=\sqrt{2023}+k$ şi $y=\sqrt{2023}+q$, $k,q\in\mathbb{Z}$. **2p**
Se demonstrează că $\sqrt{2023}$ este iraţional. **1.5p**
Se demonstrează că x şi y sunt iraţionale. **1p**
Se demonstrează că $x^2-2kx+k^2-2023=0$. **2.5p**

2. *Să se determine mulţimea $A=\{a\geq 0\,|\,$ există $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $[x]^2-a[x]+4=0\}$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x. Pentru $a\in A\cap\mathbb{N}$ să se rezolve ecuaţia $[x]^2-a[x]+4=0$.*

Soluţie şi barem: Start **1p**
Se demonstrează că $A\subseteq\{\frac{n^2+4}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}^*\}$ **2.5p**
Se demonstrează că $\{\frac{n^2+4}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}^*\}\subseteq A$; dacă $a=\frac{n^2+4}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, atunci n este o soluţie a ecuaţiei $[x]^2-a[x]+4=0$ **2.5p**
Se demonstrează că $A\cap\mathbb{N}=\{4,5\}$ **1p**
Se demonstrează că pentru $a=4$ soluţiile sunt $x\in[2,3)$ **1p**
Se demonstrează că pentru $a=5$ soluţiile sunt $x\in[1,2)\cup[4,5)$ **2p**

3. *Fie mulţimea*

$$M:=\{n\in\mathbb{N}^*\,|\,\text{există } x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{N}^* \text{ astfel încât } x_1^2+\cdots+x_n^2=2023\}.$$

1. *Să se arate că mulţimea M este nevidă şi finită.*
2. *Să se arate că cel mai mic element al lui M este 4.*

Soluţie şi barem: Start **1p**
Se demonstrează că $2023 \in M$. **1p**
Se demonstrează că dacă $n \in M$, atunci $n \leq 2023$. **1p**
Se arată că 2023 nu este pătrat perfect şi se deduce că $1 \notin M$. **1p**
Se arată că dacă $x_1, x_2 \in \mathbb{N}^*$, atunci $x_1^2 + x_2^2$ are restul împărţirii prin 4 în mulţimea $\{0, 1, 2\}$. Restul împărţirii prin 4 a lui 2023 este 3. Se deduce că $2 \notin M$. **1.5p**
Se arată că dacă $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}^*$ şi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2023$, atunci x_1, x_2 şi x_3 sunt impare ... **1p**
Dacă $x_1 = 2y_1 + 1$, $x_2 = 2y_2 + 1$, $x_3 = 2y_3 + 1$ şi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2023$, atunci $y_1(y_1 + 1) + y_2(y_2 + 1) + y_3(y_3 + 1) = 505$. Se ajunge la o contradicţie şi se obţine $3 \notin M$ **1.5p**
$2023 = 1^2 + 2^2 + 13^2 + 43^2$ sau $2023 = 17^2 + 17^2 + 17^2 + 34^2$. Se deduce că $4 \in M$ **2p**

4. (*i*) *Fie planul α, punctul A în planul α, dreapta Δ ce nu este perpendiculară pe planul α şi Δ_α proiecţia ortogonală a dreptei Δ pe planul α. Să se arate că $d(A, \Delta_\alpha) \leq d(A, \Delta)$.*
(*ii*) *Fie $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*$ şi punctele A_1, A_2 din spaţiu. Să se arate că $A_1A_2 \leq r_1 + r_2$ dacă şi numai dacă pentru orice punct P din spaţiu există dreapta Δ_P ce conţine punctul P şi $d(A_1, \Delta_P) \leq r_1$ şi $d(A_2, \Delta_P) \leq r_2$.*

Observaţie*: Dacă A este punct din spaţiu şi Δ dreaptă atunci numărul $d(A, \Delta)$ este distanţa de la punctul A la dreapta Δ.*

Soluţie şi barem: Start **1p**
(*i*) Se discută cazurile $\Delta \subset \alpha$ ori $A \in \Delta_\alpha$ **0.5p**
Dacă $B = \text{pr}_{\Delta_\alpha} A$ şi $C = \text{pr}_{\Delta} B$ se arată că $d(A, \Delta_\alpha) = AB \leq AC = d(A, \Delta)$ **2p**
(*ii*) Fie B pe segmentul A_1A_2 astfel încât $\frac{A_1B}{A_2B} = \frac{r_1}{r_2}$.
Dacă $A_1A_2 \leq r_1 + r_2$, atunci $A_1B \leq r_1$ şi $A_2B \leq r_2$. Prin punctul P din spaţiu construim dreapta $\Delta_P := PB$. Avem $d(A_1, \Delta_P) \leq A_1B \leq r_1$ şi $d(A_2, \Delta_P) \leq A_2B \leq r_2$. **2.5p**
Presupunem că pentru orice punct din spaţiu P există dreapta Δ_P ce conţine punctul P şi $d(A_1, \Delta_P) \leq r_1$ şi $d(A_2, \Delta_P) \leq r_2$.
Cazul $A_1 = A_2$. **0.5p**
Cazul $A_1 \neq A_2$. În planul perpendicular pe dreapta A_1A_2 ce trece prin punctul B luăm un punct P astfel încât $PB > r_1$ şi $PB > r_2$. Fie Δ_P o dreaptă ce trece prin P şi pentru care avem $d(A_1, \Delta_P) \leq r_1$ şi $d(A_2, \Delta_P) \leq r_2$. Notăm cu Δ proiecţia ortogonală a lui Δ_P pe planul PA_1A_2.
Folosind (*i*) se arată că Δ este o dreaptă, $d(A_1, \Delta) \leq r_1$, $d(A_2, \Delta) \leq r_2$ şi Δ nu este paralelă cu dreapta A_1A_2. ..... **1p**
Fie Q punctul de intersecţie al dreptelor Δ şi A_1A_2.
Cazul Q este pe semidreapta $[BA_2$. Se arată că $A_1B \leq r_1$. Din $\mathcal{A}(A_1PQ) = \mathcal{A}(A_1PB) + \mathcal{A}(QPB)$ se deduce că $\frac{A_1B}{r_1} = \frac{d(A_1,\Delta)}{r_1}\sqrt{1 + \frac{BQ^2}{PB^2}} - \frac{BQ}{r_1} \leq \sqrt{1 + \frac{BQ^2}{r_1^2}} - \frac{BQ}{r_1} \leq 1$. Avem $A_1A_2 = A_1B + A_2B = A_1B\frac{r_1+r_2}{r_1} \leq r_1 + r_2$.
Cazul Q este pe semidreapta $[BA_1$. Se arată analog că $A_2B \leq r_2$ şi $A_1A_2 \leq r_1 + r_2$. **2.5p**

UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIŞOARA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN TIMIŞ

Concursul interjudeţean de matematică Memorialul "Traian Lalescu", ediţia a 34-a, Timişoara, 25 martie 2023

Clasa a 9-a - Soluţii şi barem orientativ de corectare

1. *a) Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ şi $u, v \in \mathbb{Z}$ astfel încât $au + bv = 1$. Arătaţi că pentru orice numere naturale $r \in \{0, 1, \ldots, a-1\}$ şi $s \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$, numărul $n = asu + brv$ dă la împărţirea cu a restul r, iar la împărţirea cu b restul s.*
b) Determinaţi ultimele 4 cifre ale numărului 2503^{2023}.

Soluţie:

start **1p**

a) Deoarece $bv = \mathcal{M}a + 1$, rezultă că $brv = \mathcal{M}a + r$, astfel că $n = asu + brv = \mathcal{M}a + r$. Analog, $au = \mathcal{M}b + 1$, $asu = \mathcal{M}b + s$ şi $n = asu + brv = \mathcal{M}b + s$. **2p**

b) Vom determina resturile numărului 2503^{2023} la împărţirea prin 2^4 şi prin 5^4. Deoarece $(2503, 2) = 1 = (2503, 5)$, cum $\varphi(2^4) = 8$ şi $\varphi(5^4) = 125$, folosind teorema lui Euler avem

$$2503^{2023} = 2503^{\mathcal{M}8+7} \equiv 2503^7 = (16 \cdot 126 + 7)^7 \equiv 7^7 = (7^2)^3 \cdot 7 \equiv 1 \cdot 7 \equiv 7 \pmod{2^4},$$

..... **2p**

respectiv

$$2503^{2023} = (4 \cdot 5^4 + 3)^{2023} \equiv 3^{2023} = 3^{16 \cdot 125 + 23} \equiv 3^{23} = (3^6)^3 \cdot 3^5 \equiv$$

$$\equiv 104^3 \cdot 243 \equiv 4864 \cdot 243 \equiv (-150 + 14) \cdot (250 - 7) \equiv 150 \cdot 7 + 250 \cdot 14 - 98 \equiv 77 \pmod{5^4}.$$

..... **2p**

Deoarece $5^4 = 625 = 624 + 1 = 39 \cdot 2^4 + 1$, numărul $n = (-39) \cdot 2^4 \cdot 77 + 1 \cdot 5^4 \cdot 7 = -77 \cdot 624 + 7 \cdot 625 = 7 - 70 \cdot 624 = -43673$ dă la împărţirea prin 2^4 şi prin 5^4 resturile 7, respectiv 77, la fel ca 2503^{2023}. **1p**

Rezultă că $2503^{2023} \equiv n \equiv 5 \cdot 10^4 + n = 6327 \pmod{10^4}$, adică ultimele patru cifre ale numărului 2503^{2023} sunt 6327. ..... **2p**

2.

it Fie A, B, C, D şi P cinci puncte, oricare trei dintre ele necoliniare, iar G_1, G_2, G_3 şi G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor PAB, PBC, PCD, respectiv PDA. Determinaţi,

în funcţie de $a = AC$ şi $b = BD$, suma $G_1G_3^2 + G_2G_4^2$.

Soluţie:

start **1p**

Fie K, L, M şi N mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ şi $[DA]$. Atunci $G_1 \in (PK)$, $G_2 \in (PL)$, $G_3 \in (PM)$ şi $G_4 \in (PM)$, cu

$$\frac{PG_1}{PK} = \frac{PG_2}{PL} = \frac{PG_3}{PM} = \frac{PG_4}{PN} = \frac{2}{3}\,.$$

..... **2p**

În triunghiurile ABC, BCD, CDA, DAB avem că $KL \parallel AC \parallel MN$, $LM \parallel BD \parallel NK$, $KL = MN = \frac{1}{2} \cdot AC$ şi $LM = NK = \frac{1}{2} \cdot BD$. **2p**

Rezultă că $KLMN$ este paralelogram, ... **1p**

şi $\frac{G_1G_3}{KM} = \frac{G_2G_4}{LN} = \frac{2}{3}$. **1p**

Cu teorema paralelogramului avem că $KM^2 + LN^2 = KL^2 + LM^2 + MN^2 + NK^2 = 2\left(\frac{1}{2} \cdot AC\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2} \cdot BD\right)^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. **1p**

Obţinem atunci că $G_1G_3^2 + G_2G_4^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 (KM^2 + LN^2) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = \frac{2}{9}(a^2 + b^2)$. **2p**

3. *Fie $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ şi $(c_n)_{n\geq 1}$ trei şiruri de numere reale care au proprietăţile:*
i) şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(\frac{c_n}{b_n})_{n\geq 1}$ sunt crescătoare,
ii) $b_n > 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă există un număr natural nenul n pentru care are loc egalitatea $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 0$, arătaţi că $\sum_{k=1}^{n} a_k c_k \geq 0$.

Soluţie:

start **1p**

Notăm $[1, n]_{\mathbb{N}} = [1, n] \cap \mathbb{N}$ şi pentru fiecare $k \in [1, n]_{\mathbb{N}}$ fie $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i b_i$, respectiv $S_0 = 0$. Conform enunţului avem că $S_n = 0$. Dacă ar exista un $k < n$ cu $S_k > 0$, atunci cel puţin un termen al sumei $\sum_{i=1}^{k} a_i b_i$ ar fi pozitiv. Dacă $i \in [1, k]_{\mathbb{N}}$ cu $a_i b_i > 0$, rezultă că $a_i > 0$ şi cum şirul $(a_m)_m \geq 1$ este crescător, ar rezulta că $a_j > 0$ pentru orice $j \geq i$, astfel că şirul S_j este crescător începând de la termenul cu indicele i. Rezultă că $0 = S_n > S_k > 0$, ceea ce este absurd. Prin urmare, $S_k \leq 0$ pentru orice $k \in [1, n]_{\mathbb{N}}$. **4p**

Cu formula de sumare a lui Abel avem atunci

$$\sum_{k=1}^{n} a_k c_k = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \cdot \frac{c_k}{b_k} = \sum_{k=1}^{n} (S_k - S_{k-1}) \frac{c_k}{b_k} = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \right) + S_n \frac{c_n}{b_n} \geq 0\,.$$

deoarece toţi termenii sumei sunt nenegativi. **5p**

4. Fie ABC un triunghi oarecare, cu cercul circumscris $\omega = \mathcal{C}(O, R)$, şi centrul I al cercului său înscris. Considerăm, de asemenea, mijloacele M, N şi P ale arcelor BC, CA, AB ale cercului ω, care nu conţin vârfurile A, B, respectiv C. Arătaţi că

a)
$$IM + IN + IP > \frac{1}{2}(BC + CA + AB)\,.$$

b)
$$IM^2 + IN^2 + IP^2 \geq 3R^2\,.$$

Soluţie:

start **1p**

a) Fie I_a centrul cercului $a-$exînscris triunghiului ABC. Deoarece (BI şi (CI sunt bisectoare interioare, iar (BI_a şi (CI_a bisectoare exterioare, rezultă că $\widehat{IBI_a} = \widehat{ICI_a} = 1dr$ şi patrulaterul IBI_aC este inscriptibil, înscris într-un cerc cu centrul în mijlocul segmentului $[II_a]$, care este în acelaşi timp la intersecţia mediatoarei segmentului $[BC]$ cu bisectoarea (AI. Acest punct este exact mijlocul M al arcului BC..... **2p**

Rezultă că $IM = BM = CM$, de unde $2IM = BM + CM > BC$. Analog, $2IN > CA$ şi $2IP > AB$. Prin adunarea acestor inegalităţi se obţine inegalitatea cerută..... **2p**

b) Deoarece $IM = BM = 2R\sin\left(\frac{A}{2}\right)$, avem că

$$IM^2 = 4R^2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = 2R^2(1-\cos(A)) = 2R^2\left(1 - \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}\right) =$$

$$= \frac{R^2}{bc}(a^2 - (b-c)^2) = \frac{R^2}{abc}(a^3 - a(b-c)^2)\,,$$

..... **2p**

astfel că

$$IM^2 + IN^2 + IP^2 = \frac{R^2}{abc}(a^3+b^3+c^3 - ab^2 - ac^2 - ba^2 - bc^2 - ca^2 - cb^2 + 6abc)\,.$$

..... **1p**

Conform inegalităţii lui Schur,

$$a^3+b^3+c^3 - ab^2 - ac^2 - ba^2 - bc^2 - ca^2 - cb^2 + 3abc =$$

$$= a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b) \geq 0\,,$$

..... **1p**

astfel că

$$IM^2 + IN^2 + IP^2 \geq \frac{R^2}{abc}\cdot 3abc = 3R^2.$$

..... **1p**

Notă: Orice abordare corectă se punctează corespunzător gradului de rezolvare a problemei.

Universitatea de Vest din Timişoara
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Inspectoratul Şcolar Judeţean Timiş

Concursul Interjudeţean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu" Ediţia a XXXIV-a, Timişoara, 25 martie 2023

Soluţii şi barem orientativ de corectare la clasa a 10-a

1. (a) Fie $a > 0$. Arătaţi că ecuaţia $a^x = x^a$ are cel mult două soluţii pozitive.
(b) Fie $a > 0$. Rezolvaţi în $(0, \infty)$ ecuaţia $x^{a^x} = a^{a^a}$.

Soluţie şi barem: Start **1p**
(a) Pentru $a = 1$ ecuaţia are soluţia $x = 1$.
Pentru $a \neq 1$ logaritmăm în ecuaţie; rezultă $x = a \log_a x$. **1p**
Pentru $a > 1$ funcţia $a \log_a x$ este strict concavă; pentru $a < 1$ această funcţie este strict convexă. **1p**
Rezultă că ecuaţia $x = a \log_a x$ are cel mult două soluţii. **2p**

Argumentul de convexitate se poate face alternativ ridicând ecuaţia din enunţ la puterea $\frac{1}{a}$, pentru funcţia strict convexă sau strict concavă $\left(a^{\frac{1}{a}}\right)^x$.

(b) Pentru $a = 1$ ecuaţia are soluţia $x = 1$. Pentru $a \neq 1$ logaritmăm în ecuaţie; rezultă $a^x \log_a x = a^a$. **1p**
Rezultă că avem $\log_a x > 0$. Pentru $a > 1$ funcţiile a^x şi $\log_a x$ au valori pozitive şi sunt ambele strict crescătoare; pentru $a < 1$ funcţiile a^x şi $\log_a x$ au valori pozitive şi sunt ambele strict descrescătoare. **2p**
Funcţia $a^x \log_a x$ este deci strict monotonă, deci ecuaţia din enunţ are cel mult o soluţie. Se observă că $x = a$ este (unica) soluţie. **2p**

2. Fie $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Arătaţi că

$$\max_{z \in D} |z^3 - z + 2| = \sqrt{13}.$$

Soluţie şi barem: Start **1p**

$$\left|z^3 - z + 2\right|^2 = \left(z^3 - z + 2\right)\left(\bar{z}^3 - \bar{z} + 2\right) = 6 + 2\left(z^3 + \bar{z}^3\right) - \left(z^2 + \bar{z}^2\right) - 2(z + \bar{z})$$

. . . . . **3p**

Notăm $z+\bar{z}=t\in[-2,2]$; se obţine

$$\left|z^3-z+2\right|^2=2\left(t^3-3t\right)-\left(t^2-2\right)-2t+6=2t^3-t^2-8t+8.$$

. . . . . **2p**

Dar

$$\left(2t^3-t^2-8t+8\right)-13=(t+1)^2(2t-5)\leq 0,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $t=-1$, deci pentru $z^2+z+1=0$. . . . . **3p+1p**

3. Se consideră triunghiurile echilaterale la fel orientate $\triangle OAB, \triangle OCD$, $\triangle OEF$ astfel încât punctele A, C, E şi respectiv B, D, F nu sunt coliniare. Arătaţi că triunghiul $\triangle ACE$ este echilateral dacă şi numai dacă triunghiul $\triangle BDF$ este echilateral.

Soluţie şi barem: Start **1p**

Se utilizează (cu sau fără demonstraţie) următoarele leme:

Lema 1. Triunghiul $\triangle ABC$ de afixe a, b, c este echilateral pozitiv orientat dacă şi numai dacă $a+b\varepsilon+c\varepsilon^2=0$. Triunghiul $\triangle ABC$ de afixe a, b, c este echilateral negativ orientat dacă şi numai dacă $a+b\varepsilon^2+c\varepsilon=0$.

Lema 2. Triunghiul $\triangle ABC$ de afixe a, b, c este echilateral dacă şi numai dacă $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$,

unde $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$. **3p**

În ipoteza că triunghiurile din enunţ sunt, de exemplu, pozitiv orientate, şi alegând originea în punctul O se obţine din Lema 1 că

$$a+b\varepsilon=0;\ c+d\varepsilon=0;\ e+f\varepsilon=0.$$

. . . . . **3p**

Conform Lemei 2, triunghiul $\triangle ACE$ este echilateral dacă şi numai dacă $a^2+c^2+e^2=ac+ce+ea$, echivalent cu $b^2+d^2+f^2=bd+df+fb$, care are loc dacă şi numai dacă triunghiul $\triangle BDF$ este echilateral. **3p**

4. Determinaţi funcţiile $w:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ care au proprietatea că pentru orice pătrat $A_1A_2A_3A_4$ situat în plan având afixele vârfurilor notate respectiv cu z_1, z_2, z_3, z_4 are loc egalitatea

$$w(z_1)+w(z_2)+w(z_3)+w(z_4)=w\left(\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right).$$

Soluţie şi barem: Start **1p**
Pentru un punct arbitrar Z de afix $z \in \mathbb{C}$ construim "reţeaua" de pătrate din figură. **3p**
Aplicând succesiv ipoteza rezultă

$$w(a) + w(e) + w(z) + w(h) = w(m);$$
$$w(b) + w(e) + w(z) + w(f) = w(n);$$
$$w(c) + w(g) + w(z) + w(f) = w(p);$$
$$w(d) + w(h) + w(z) + w(g) = w(q).$$

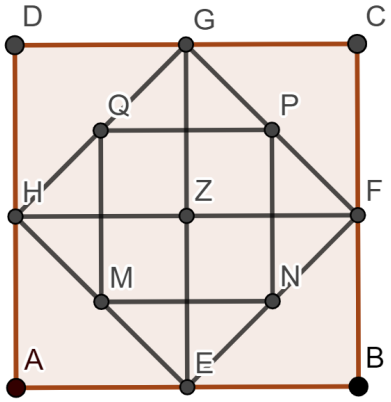
..... **2p**
Însumând aceste egalităţi şi ţinând cont că avem de asemenea

$$w(e) + w(f) + w(g) + w(h) = w(z);$$
$$w(m) + w(n) + w(p) + w(q) = w(z);$$
$$w(a) + w(b) + w(c) + w(d) = w(z)$$

..... **3p**
rezultă

$$w(z) + 2w(z) + 4w(z) = w(z),$$

deci $w(z) = 0$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$. **1p**



Problema 4

Universitatea de Vest din Timişoara
Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Inspectoratul Şcolar Judeţean Timiş

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul "Traian Lalescu"
Ediţia a XXXIV-a, Timişoara, 25 martie 2023

Soluţii şi barem orientativ de corectare la clasa a XI-a

1. *Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $\Sigma(A) = \Sigma(A^2) = 2$, unde pentru orice matrice $X = (x_{ij})_{1\leq i,j\leq 2} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\Sigma(X) := x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22}$. Calculaţi $\Sigma(A^{2023})$.*
Soluţie şi barem: Start **1p**

Utilizând teorema Cayley-Hamilton obţine $\Sigma(A^2) - t\Sigma(A) + 2d = 0$, unde $t = tr(A)$ şi $d = \det(A)$ **3p**

Din $\Sigma(A) = \Sigma(A^2) = 2$ şi $\Sigma(A^2) - t\Sigma(A) + 2d = 0$ deduce $t - d = 1$ **1p**

Din $A^3 = tA^2 - dA$ obţine $\Sigma(A^3) = t\Sigma(A^2) - d\Sigma(A)$ şi astfel $\Sigma(A^3) = 2(t - d) = 2$. **2p**

Deduce şi arată prin inducţie că $\Sigma(A^n) = 2,\ \forall n \geq 1$ şi astfel $\Sigma(A^{2023}) = 2$. **3p**

2. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \neq B$, astfel încât $A^{2024} = B^{2024}$ şi $A^{2023}B = B^{2023}A$. Calculaţi $\det(A^{2023} + B^{2023})$.*
Soluţie şi barem: Start **1p**

Observă că $(A^{2023} + B^{2023})(A - B) = A^{2024} - A^{2023}B + B^{2023}A - B^{2024} = O_n$ **3p**

Presupunând că $\det(A^{2023} + B^{2023}) \neq 0$, există $C = (A^{2023} + B^{2023})^{-1}$ **1p**

Din relaţia $(A^{2023} + B^{2023})(A - B) = O_n$ obţine $C(A^{2023} + B^{2023})(A - B) = O_n$ şi astfel $A - B = O_n$ **3p**

Cum $A \neq B$, presupunerea făcută este falsă şi concluzionează că $\det(A^{2023} + B^{2023}) = 0$ **2p**

3. *Fie $f : [a, b] \to [c, d]$ o funcţie astfel încât pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 1} \subset [a, b]$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y$ avem că $y = f(x)$. Arătaţi că funcţia f este continuă.*

Soluţie şi barem: Start **1p**

Consideră $x \in [a, b]$ şi $(x_n)_{n\geq 1} \subset [a, b]$ un şir convergent cu limita x. Cum şirul $(f(x_n))_{n\geq 1} \subset [c, d]$ este mărginit, acesta va avea subşiruri convergente. **1p**

Consideră $(f(x_{k_n}))_{n\geq 1} \subset [c,d]$ un astfel de subşir convergent şi notează cu $y \in [c,d]$ limita sa. Din $(x_n)_{n\geq 1}$ convergent către x, deduce că şi $(x_{k_n})_{n\geq 1}$ este convergent, având limita tot x. **2p**

Cum $(x_{k_n})_{n\geq 1} \subset [a,b]$ este convergent cu limita x şi $(f(x_{k_n}))_{n\geq 1} \subset [c,d]$ este convergent, cu limita y, deduce din ipoteză că $y = f(x)$. **2p**

Observă că toate subşirurile convergente ale şirului $(f(x_n))_{n\geq 1}$ au aceeaşi limita, $f(x)$, şi astfel întreg şirul $(f(x_n))_{n\geq 1}$ este convergent cu limita $f(x)$. **2p**

Deduce astfel că pentru orice şir convergent $(x_n)_{n\geq 1} \subset [a,b]$ cu limita x, şirul $(f(x_n))_{n\geq 1} \subset [c,d]$ este convergent cu limita $f(x)$ şi astfel f este continuă în x. **1p**

Cum $x \in [a,b]$ a fost arbitrar ales, deduce că f este continuă pe $[a,b]$. **1p**

4. *Calculaţi limita*

$$\lim_{n\to\infty} \{n! \cdot e\},$$

unde $\{a\}$ *reprezintă partea fracţionară a numărului real* a.
Soluţie şi barem: Start **1p**

Notând $E_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots \frac{1}{n!},\ \forall n \geq 1$, obţine pentru orice $m, n \geq 1$
$E_{m+n} - E_n = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(n+k)!} \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{(n+2)^k} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1-\frac{1}{(n+2)^m}}{1-\frac{1}{n+2}} < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}$ **1p**

Pentru $n \geq 1$ arbitrar fixat şi $m \to \infty$, din inegalitatea $E_{m+n} - E_n < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}$ deduce
$e - E_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}$ **1p**

Cum $\frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n \cdot n!},\ \forall n \geq 1$, obţine $e - E_n < \frac{1}{n \cdot n!},\ \forall n \geq 1$ **1p**

Deduce existenţa unui şir $(c_n)_{n\geq 1} \subset (0,1)$ astfel încât $e = E_n + \frac{c_n}{n \cdot n!},\ \forall n \geq 1$ **2p**

Observă că $n!E_n \in \mathbb{N}$ şi astfel $[n! \cdot e] = [n!E_n + \frac{c_n}{n}] = n!E_n,\ \forall n \geq 1$ **2p**

Pentru $n \geq 1$ obţine $\{n! \cdot e\} = n! \cdot e - [n! \cdot e] = n! \cdot e - n! \cdot E_n = n!(e - E_n) = n! \cdot \frac{c_n}{n \cdot n!} = \frac{c_n}{n}$ ... **1p**

Cum $0 < \frac{c_n}{n} < \frac{1}{n},\ \forall n \geq 1$ concluzionează că $\lim_{n\to\infty} \{n! \cdot e\} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{n} = 0$. **1p**

Universitatea de Vest din Timişoara
Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Inspectoratul Şcolar Judeţean Timiş

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul "Traian Lalescu"
Ediţia a XXXIV-a, Timişoara, 25 martie 2023

Soluţii şi barem orientativ de corectare la clasa a XII-a

1. *Fie $(G,\cdot)$ un grup, cu elementul unitate $e \in G$, având $2n$ elemente ($n \in \mathbb{N}^*$). Pentru două submulţimi nevide $A, B \subseteq G$ vom nota $AB = \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}$. Dacă submulţimea $H = \{e\} \cup \{g \in G : g^2 \neq e\}$ are exact n elemente, arătaţi că:*

i) n este un număr natural impar;

ii) $(G \setminus H)(G \setminus H) \subseteq H$;

iii) $H(G \setminus H) \subseteq G \setminus H$ şi $(G \setminus H)H \subseteq G \setminus H$;

iv) H este subgrup abelian.

Soluţie şi barem: Start **1p**

i) Observăm că, pentru un element $h \in G$, $h \in H \setminus \{e\}$ dacă și numai dacă $h^{-1} \in H \setminus \{e\}$. Cum $H \setminus \{e\}$ se poate partiționa în submulțimi de forma $\{h, h^{-1}\}$ și $h \neq h^{-1}$, deducem că $n-1 = 2k$ cu $k \in \mathbb{N}$, adică n este un număr natural impar **2p**

ii) Dacă, prin absurd, există $a, b, c \in G \setminus H$ astfel încât $ab = c$, atunci a, b, c sunt distincte două câte două și $ba = c$. Deducem că $\{e, a, b, c\}$ este un subgrup al lui G, format din 4 elemente. Astfel, conform teoremei lui Lagrange, $4 \mid 2n$, rezultat imposibil întrucât n este un număr natural impar **2p**

iii) Fiind dat $g \in G \setminus H$, funcțiile $G \setminus H \ni x \mapsto xg \in H$ și $G \setminus H \ni x \mapsto gx \in H$ sunt funcții injective între două mulțimi având același număr de elemente n. În consecință, ele sunt și surjective, adică, pentru orice element $h \in H$ fixat, ecuațiile $h = xg$ și $h = gx$ au soluție unică $x \in G \setminus H$. Concluzionăm că $hg = x \in G \setminus H$, respectiv $gh = x \in G \setminus H$ **2p**

iv) Fie $h_1, h_2 \in H$ și $g, g_1, g_2 \in G \setminus H$ astfel încât $h_1 = g_1 g$ și $h_2 = g_2 g$. Atunci

$$h_1 h_2 = (g_1 g g_2) g = (g_2 g g_1)^{-1} g = (g_2 g g_1) g = h_2 h_1.$$

În final, folosind subpunctele ii) și iii), observăm că $h_1 h_2 \in H$ ..... **3p**.

2. *Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea că există $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, astfel încât $x^n = x$ pentru orice $x \in A$.*

i) Arătaţi că dacă $a \in A$ şi $a^2 = 0$ atunci $a = 0$ ($0 \in A$ notează elementul nul al inelului).

ii) Arătaţi că $xy^{n-1} = y^{n-1}x$, pentru orice $x, y \in A$.

Soluţie şi barem: Start **1p**

i) Fie $a \in A$ cu $a^2 = 0$. Atunci $a = a^n = a^{n-2}a^2 = 0$ **2p**

ii) Fie $x, y \in A$ şi să notăm $a = y^{n-1}$.

Avem că $a^2 = y^{2n-2} = y^n y^{n-2} = yy^{n-2} = y^{n-1} = a$ **2p**

Dar

$$\begin{aligned}(ax - axa)^2 &= (ax - axa)(ax - axa) = axax - axaxa - axa^2x + axa^2xa = \\ &= axax - axaxa - axax + axaxa = 0\end{aligned}$$

şi analog $(xa - axa)^2 = 0$ **4p**

Conform (i) rezultă că $ax - axa = xa - axa = 0$ şi deci $ax = xa$. **1p**

3. *Fie $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie descrescătoare cu proprietatea că există $M > 0$ astfel încât $\int_0^x f(t)\,dt \leq M$, pentru orice $x > 0$. Arătaţi că $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$. Rămâne adevărată concluzia dacă se înlocuieşte ipoteza de "monotonie descrescătoare" a funcţiei f cu cea de "integrabilitate Riemann pe orice interval $[0, x]$"? Justificaţi răspunsul..*

Soluţie şi barem: Start **1p**

Presupunem, prin reducere la absurd, că $\lim_{x\to\infty} xf(x)$ sau nu există sau există dar nu este nulă. Există atunci $\varepsilon_0 > 0$ şi un şir strict crescător $(x_n)_{n\geq 1} \subset [0, \infty)$ cu proprietatea că $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, iar $x_n f(x_n) \geq \varepsilon_0$, $n \geq 1$. **3p**

Putem extrage un subşir $(y_n)_{n\geq 1} \subset (x_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $y_{n+1} \geq 2y_n$, $n \geq 1$. **1p**

Deoarece funcţia f este descrescătoare vom avea:

$$M \geq \int_0^{y_n} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(x)\,dx \geq \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) f(y_k) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} y_k f(y_k) \geq \frac{n\varepsilon_0}{2},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ (unde $y_0 = 0$). *Contradicţie* **3p**

Considerăm funcţia $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \ x \in [0, \infty) \setminus \mathbb{N} \\ 1 & , \ x \in \mathbb{N} \end{cases}$. Avem că nu există $\lim_{x\to\infty} xf(x)$ deşi f este integrabilă Riemann pe orice interval $[0, x]$ şi $\int_0^x f(t)\,dt = 1 - e^{-x} \leq 1$, pentru orice $x \in [0, \infty)$. **2p**

4. Să se determine funcţiile polinomiale $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de grad cel mult doi, astfel încât egalitatea

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(3x^2 - 2x^3)dx = \int_0^1 g(x) f(3x^2 - 2x^3)dx$$

să aibă loc pentru orice funcţie continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Soluţie şi barem: Start **1p**

Reprezentăm g sub forma $g(x) = ax^2 + bx + c,\ x \in \mathbb{R}$, unde a, b, c sunt constante reale. Înlocuind, pe rând, $f(x) = 1, x, x^2,\ x \in \mathbb{R}$ în relația din enunț, obținem un sistem liniar de trei ecuații cu necunoscutele a, b, c. Găsim, în urma rezolvării sistemului, soluțiile $a = b = 0$ și $c = 2$ **3p**

Cu $g \equiv 2$ facem schimbarea de variabilă $3 - 2x = 4\cos^2\theta$ de la $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ la $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Formula integrală devine:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 3\theta)\sin(2\theta)d\theta = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\cos^2 3\theta)\sin(2\theta)d\theta$$

..... **3p**

Despărțim integrala din membrul stâng în suma a trei integrale, pe intervalele $[0, \frac{\pi}{6}], [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ și $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$. În prima și ultima integrală facem schimbările de variabile $\varphi = \frac{\pi}{3} - \theta$, respectiv $\varphi = \frac{2\pi}{3} - \theta$. Deducem , după efectuarea calculelor, că membrul stâng are aceeași valoare cu membrul drept

..... **3p**