**Examenul național de bacalaureat 2023**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_pedagogic***

Sesiunea toamnă 2023
**Varianta 7**

***Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Arătați că $\sqrt{50}-5\left(\sqrt{2}-1\right)=5$.

**5p** **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+a$, unde $a$ este număr real. Arătați că $f(1)=f(2)$, pentru orice număr real $a$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x+2)=\log_3(4-x)$.

**5p** **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu $8$.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(3,a)$, $B(1,0)$ și $C(5,2)$, unde $a$ este număr real. Determinați numărul real $a$, știind că punctul $A$ este mijlocul segmentului $BC$.

**5p** **6.** Arătați că $\sin 30^\circ+\sqrt{2}\cos 45^\circ+\cos 60^\circ=2$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=3(4-x-y)+xy$.

**5p** **1.** Arătați că $3*0=3$.

**5p** **2.** Demonstrați că $x*y=(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale $x$ și $y$.

**5p** **3.** Arătați că $e=4$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

**5p** **4.** Arătați că $\frac{7}{3}$ este simetricul lui $\frac{3}{2}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”.

**5p** **5.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x*3^x=3$.

**5p** **6.** Calculați $3*4*5*...*2023$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(a)=\begin{pmatrix}a+2 & 1\\ 1 & a\end{pmatrix}$, unde $a$ este număr real.

**5p** **1.** Arătați că $\det(B(0))=-1$.

**5p** **2.** Arătați că $A\cdot A=5I_2$.

**5p** **3.** Determinați numerele reale $a$ pentru care $\det(B(a)+A)=0$.

**5p** **4.** Determinați numărul real $a$ pentru care $B(a)\cdot B(-2)=B(0)-I_2$.

**5p** **5.** Demonstrați că matricea $B(a-1)$ este inversabilă, pentru orice număr rațional $a$.

**5p** **6.** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $X\cdot B(0)=A$.

**Examenul național de bacalaureat 2023**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_pedagogic***
**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Varianta 7**

***Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$, $5\left(\sqrt{2}-1\right)=5\sqrt{2}-5$ | **3p** |
| | $5\sqrt{2}-5\sqrt{2}+5=5$ | **2p** |
| **2.** | $f(1)=a-2$, pentru orice număr real $a$ | **2p** |
| | $f(2)=a-2$, deci $f(1)=f(2)$, pentru orice număr real $a$ | **3p** |
| **3.** | $x+2=4-x$ | **2p** |
| | $x=1$, care convine | **3p** |
| **4.** | Mulțimea numerelor naturale de două cifre are $90$ de elemente, deci sunt $90$ de cazuri posibile | **2p** |
| | În mulțimea numerelor naturale de două cifre, numerele care au produsul cifrelor egal cu 8 sunt: $18$, $24$, $42$ și $81$, deci sunt $4$ cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{4}{90}=\frac{2}{45}$ | **3p** |
| **5.** | $a=\frac{0+2}{2}$ | **3p** |
| | $a=1$ | **2p** |
| **6.** | $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ | **3p** |
| | $\frac{1}{2}+\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}=2$ | **2p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $3*0=3(4-3-0)+3\cdot 0=$ | **3p** |
| | $=3\cdot 1+0=3$ | **2p** |
| **2.** | $x*y=xy-3x-3y+9+3=$ | **2p** |
| | $=x(y-3)-3(y-3)+3=(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale $x$ și $y$ | **3p** |
| **3.** | $x*4=(x-3)(4-3)+3=x$, pentru orice număr real $x$ | **2p** |
| | $4*x=(4-3)(x-3)+3=x$, pentru orice număr real $x$, deci $e=4$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$” | **3p** |
| **4.** | $\frac{7}{3}*\frac{3}{2}=\left(\frac{7}{3}-3\right)\left(\frac{3}{2}-3\right)+3=4$ | **2p** |
| | $\frac{3}{2}*\frac{7}{3}=\left(\frac{3}{2}-3\right)\left(\frac{7}{3}-3\right)+3=4$, deci $\frac{7}{3}$ este simetricul lui $\frac{3}{2}$ în raport cu legea de compoziție „$*$” | **3p** |
| **5.** | $9^x*3^x=\left(9^x-3\right)\left(3^x-3\right)+3$, pentru orice număr real $x$ | **2p** |
| | $\left(3^{2x}-3\right)\left(3^x-3\right)=0$, de unde obținem $x=\frac{1}{2}$ sau $x=1$ | **3p** |
| **6.** | $3*x=3$, pentru orice număr real $x$ | **2p** |
| | $3*4*5*...*2023=3*(4*5*...*2023)=3$ | **3p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $\det\left(B(0)\right)=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=2\cdot 0-1\cdot 1=$ | **3p** |
| | $=0-1=-1$ | **2p** |
| **2.** | $A\cdot A=\begin{pmatrix}1+4 & -2+2\\ -2+2 & 4+1\end{pmatrix}=$ | **3p** |
| | $=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=5I_2$ | **2p** |
| **3.** | $\det\left(B(a)+A\right)=\begin{vmatrix}a+1 & 3\\ 3 & a+1\end{vmatrix}=(a+1)^2-3^2$ | **3p** |
| | $a=2$ sau $a=-4$ | **2p** |
| **4.** | $B(a)\cdot B(-2)=\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 1-2a\end{pmatrix}$, pentru orice număr real $a$ | **2p** |
| | Cum $B(0)-I_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, obținem $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 1-2a\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=1$ | **3p** |
| **5.** | $\det\left(B(a-1)\right)=\begin{vmatrix}a+1 & 1\\ 1 & a-1\end{vmatrix}=a^2-2$, pentru orice număr real $a$ | **2p** |
| | Cum $a$ este număr rațional, obținem $a^2-2\neq 0$, deci matricea $B(a-1)$ este inversabilă | **3p** |
| **6.** | Inversa matricei $B(0)$ este matricea $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ | **2p** |
| | $X=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ | **3p** |