Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Simulare - Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1.** O progresie aritmetică cu rația 5 are suma primilor trei termeni egală cu 126. Determinați primul termen al progresiei.

5p **2.** Se consideră funcția $f: R \to R,\ f(x) = -3x^2 + (m+1)x + 5$. Determinați valoarea parametrului real *m*, știind că vârful parabolei asociate funcției *f* are abscisa egală cu -1.

5p **3.** Rezolvați în **R** ecuația $log_3(2x+1) - log_3(2x-1) = -1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii A=$\{21, 22, 23, \ldots, 29, 30\}$, acesta să fie număr prim.

5p **5.** În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele A(2,4), B(6,8) și C(8,2). Calculați distanța de la C la mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Calculați $(cos\,120^0 + cos\,60^0) \cdot (sin\,135^0 - sin\,45^0)$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Se consideră matricea A(x)=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde *x* este număr real.

5p **a)** Arătați că det (A(0))=1.

5p **b)** Arătați că A(x)+A(y)=2A$\left(\frac{x+y}{2}\right)$, pentru orice numere reale *x* și *y*.

5p **c)** Determinați numărul real *x* pentru care A$(x^2+1) \cdot A(x)$=A(x^2+x+1).

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție:
$x * y = xy - 6x - 6y + 42, \forall x, y \in R$.

5p **a)** Demonstrați că $a * C_4^2 = C_4^2 * a = C_4^2, \forall a \in R$.

5p **b)** Demonstrați că legea $*$ este asociativă.

5p **c)** Calculați $1 * 2 * 3 * \ldots\ldots * 2023$.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Fie funcția $f: (1, +\infty) \to R$, f(x)=$\frac{ax+2}{x-1}$, unde aϵ***R***

5p **a)** Determinați valoarea numărului real *a*, știind că graficul funcției *f* admite dreapta de ecuație *y* = 2 ca asimptotă orizontală la $+\infty$.

5p **b)** Pentru *a* =2, demonstrați că funcția *f* este strict descrescătoare.

5p **c)** Pentru *a* =2, demonstrați că $f(3\sqrt{2}) < f(2\sqrt{3})$.

2. Fie funcția $f: [1,2] \to R,\ f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2+1}}$.

5p **a)** Demonstrați că funcția $F: [1,2] \to R,\ F(x) = ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ este o primitivă a funcției *f*.

5p **b)** Arătați că orice primitivă a funcției *f* este monotonă.

5p **c)** Calculați $\int f^2(x)\,dx$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

• Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

• Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

• Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$S_3 = 3a_1 + 15$ $3a_1 + 15 = 126, a_1 = 37$	**3p** **2p**
2.	$x_V = -\frac{b}{2a}, \frac{m+1}{6} = -1$ $m + 1 = -6$, m= -7	**3p** **2p**
3.	$\begin{cases} 2x+1>0 \\ 2x-1>0 \end{cases}$, $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, $log_3\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) = -1$ $\frac{2x+1}{2x-1} = \frac{1}{3}$, $x = -1 \notin \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, în concluzie ecuația nu are soluție în R	**3p** **2p**
4.	card A=10 Numere prime:23, 29 ⇒2 cazuri favorabile $P = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	**3p** **2p**
5.	Fie M, mijlocul segmentului AB. Coordonatele punctului M (4, 6) d(C, M)=$\sqrt{(8-4)^2+(6-2)^2}$=$\sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$	**2p** **3p**
6.	$\cos 120^0 = -\cos 60^0$ sau $\sin 135^0 = \sin 45^0$ $(\cos 120^0 + \cos 60^0) \cdot (\sin 135° - \sin 45^0)$=0	**2p** **3p**

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1. a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	**2p**

	det A(0)=$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A(y)=\begin{pmatrix}1&0&y\\0&1&0\\3y&0&1\end{pmatrix}$ $2A\left(\frac{x+y}{2}\right)=\begin{pmatrix}2&0&x+y\\0&2&0\\3x+3y&0&2\end{pmatrix}$ $A(x)+A(y)=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\3x&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&y\\0&1&0\\3y&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&x+y\\0&2&0\\3x+3y&0&2\end{pmatrix}=2A\left(\frac{x+y}{2}\right)$	**2p** **3p**
c)	$A(x^2+1)=\begin{pmatrix}1&0&x^2+1\\0&1&0\\3(x^2+1)&0&1\end{pmatrix}$ $A(x^2+x+1)=\begin{pmatrix}1&0&x^2+x+1\\0&1&0\\3(x^2+x+1)&0&1\end{pmatrix}$ $A(x^2+1)\cdot A(x)=\begin{pmatrix}1&0&x^2+1\\0&1&0\\3x^2+3&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\3x&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x^3+3x+1&0&x^2+x+1\\0&1&0\\3x^2+3x+3&0&3x^3+3x+1\end{pmatrix}$ $3x^3+3x+1=1$, $x(x^2+1)=0$, $x_1=0, x_{2,3}\notin R$	**3p** **2p**
2. a)	$C_4^2=6$ $a*C_4^2=a*6=a6-6a-36+42=6=C_4^2$ $C_4^2*a=6*a=6a-36-6a+42=6=C_4^2$. Finalizare.	**3p** **2p**
b)	$(x*y)*z=x*(y*z)$, $\forall x,y,z\in R$ $(x*y)*z=(xy-6x-6y+42)*z==xyz-6xz-6yz-6xy+36z+36x+36y-210.$ $x*(y*z)=x*(yz-6y-6z+42)=xyz-6xy-6xz-6yz+36x+36y+36z-210$. Finalizare.	**3p** **2p**
c)	Din a) rezultă că a$*6=6*a=6, \forall a\in R$ Din b) rezultă că legea " $*$ " este asociativă $1*2*3*\ldots\ldots*2023=(1*2*\ldots\ldots5)*$ $*6*(7*8*\ldots\ldots*2023)=6*(7*8*\ldots\ldots*2023)=6.$	**2p** **3p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1 **a)**	Din y=2 ca asimptotă orizontală la +∞ pentru graficul funcției f deduce că $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ Calculează $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax+2}{x-1}$=a ⇒ a=2	**2p** **3p**
b)	Calculează $f'(x)=\frac{-4}{(x-1)^2}$, $\forall x\in(1,+\infty)$	**2p**

	Motivează că $\frac{-4}{(x-1)^2}<0$, $\forall x \in (1,\infty)$ de unde se obține că f este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$	**3p**
c)	Din b) rezultă că funcția f este strict descrescătoare. $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$ $f(3\sqrt{2}) < f(2\sqrt{3})$.	**3p** **2p**
2. **a)**	F este derivabilă pe $[1,2]$ și $F'(x) = \frac{\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)'}{\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot x-\sqrt{x^2+1}+1}{x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} =$ $= \frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2+1}}$	**3p** **2p**
b)	Fie F: $[1,2] \to R$, o primitivă a funcției f $\Rightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in [1,2]$ $f(x) = \frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2+1}} > 0 \ \forall x \in [1,2] \Rightarrow F'(x) > 0 \ \forall x \in [1,2]$ $\Rightarrow$ F este monoton crescătoare pe $[1,2]$	**2p** **3p**
c)	$\int f^2(x)\,dx = \int \frac{1}{x^2\cdot(x^2+1)}dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{x^2(x^2+1)}dx =$ $\int \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int \frac{1}{x^2}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = -\frac{1}{x} - arctg\,x + C$	**2p** **3p**