**Examenul național de bacalaureat 2023**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info*** **Simulare**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

## SUBIECTUL I (30 de puncte)

**5p** **1.** Calculați suma primilor patru termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\in N^*}$ cu rația 2, știind că $a_3 + a_4 = 8$.

**5p** **2.** Se consideră ecuația $x^2 + 3mx - m - 2 = 0$, cu rădăcinile $x_1$, $x_2$, unde m este număr real. Determinați valoarea reală a lui m știind că $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$ .

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2x + \sqrt{16 + x^2} = 11$.

**5p** **4.** Câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu cifrele 0,1,2,3,4 și 5 ?

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(1,3)$, $B(5,-7)$ și $C(-1,-5)$. Determinați ecuația liniei mijlocii în triunghiul $ABC$, care este paralelă cu latura *BC*.

**5p** **6.** Se consideră triunghiul *ABC* cu măsura unghiului $C$ de $150°$ și latura AB = 6. Calculați raza cercului circumscris triunghiului *ABC*.

## SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

**1.** Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ m & 1 & -2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x - y + z = m \\ mx + y - 2z = 2m \end{cases}$, unde $m$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $\det(A(2)) = 1$.

**5p** **b)** Pentru $m = 2$, rezolvați sistemul de ecuații.

**5p** **c)** Pentru $m = 3$, determinați soluțiile $(x_0, y_0, z_0)$ ale sistemului de ecuații, astfel încât $x_0 + y_0 z_0 = 4$ și $x_0, y_0, z_0$ sunt numere întregi.

**2.** Pe mulțimea $\boldsymbol{R}$ se definește legea de compoziție asociativă „$*$”, $x * y = 2(x-3)(y-3) + 3$, pentru orice $x, y \in \boldsymbol{R}$.

**5p** **a)** Demonstrați că $x * y * z = 4(x-3)(y-3)(z-3) + 3$ , pentru orice $x, y, z \in \boldsymbol{R}$.

**5p** **b)** Arătați că $e = \frac{7}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$” .

**5p** **c)** Determinați numerele reale *x* astfel încât $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{de\ 2023\ ori\ x} = 3$.

## SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

**1.** Se consideră funcția $f:(0,\infty) \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x} - \ln x$.

**5p** **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0$.

**5p** **b)** Demonstrați că funcția are o singură asimptotă.

**5p** **c)** Demonstrați că $1 + x \ln x \geq x$ , pentru orice număr real $x$ strict pozitiv.

**2.** Se consideră funcțiile $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}, f(x)=e^x(\sin x+\cos x)$ și $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ g(x)=e^x\sin x$.

**5p** **a)** Verificați dacă funcția $g$ este o primitivă a funcției $f$.

**5p** **b)** Determinați primitiva funcției $g$ a cărei reprezentare grafică conține punctul O(0,0).

**5p** **c)** Arătați că orice primitivă a funcției $f$ este convexă pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

**Examenul național de bacalaureat 2023**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***
**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE** **Simulare**

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.**
**Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică**

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvari parțiale, în limitele punctajului indicat în barem**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare**

| **SUBIECTUL I** | | **(30 de puncte)** |
|---|---|---|
| **1.** | Din $a_3 + a_4 = 8$ obținem $2a_1 + 5r = 8$, de unde pentru $r = 2$ , deducem că $a_1 = -1$<br>Suma primilor patru termeni este $S_4 = 8$. | **3p**<br>**2p** |
| **2.** | Folosind relațiile lui Viète avem $x_1 + x_2 = -3m$ și $x_1x_2 = -m - 2$.<br>Cum $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1 \Rightarrow \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = 1 \Rightarrow \frac{-3m}{-m-2} = 1 \Rightarrow m = 1$. | **2p**<br>**3p** |
| **3.** | $\sqrt{16 + x^2} = 11 - 2x \Rightarrow 16 + x^2 = (11 - 2x)^2 \Rightarrow 3x^2 - 44x + 105 = 0$<br>Obținem $x = \frac{35}{3}$ care nu convine și $x = 3$, care convine. | **3p**<br>**2p** |
| **4.** | Notăm $\overline{abc}$ numerele de trei cifre distincte din ipoteză, $a$ poate lua 5 valori (oricare din cifrele 1,2,3,4,5), b poate lua 5 valori (oricare din cifrele 0,1,2,3,4,5 mai puțin valoarea luată de $a$), c poate lua 4 valori (oricare din cifrele 0,1,2,3,4,5 mai puțin valorile luate de $a$ și $b$).<br>Rezultă că numărul numerelor de trei cifre distincte este $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ | **3p**<br>**2p** |
| **5.** | Fie $M, N$ mijloacele laturilor $AB$ respectiv $AC \Rightarrow M(3,-2),\ N(0,-1)$ .<br>Ecuația liniei mijlocii este $MN$: $\frac{x-x_N}{x_M-x_N} = \frac{y-y_N}{y_M-y_N} \Rightarrow MN: x + 3y + 3 = 0$ | **2p**<br>**3p** |
| **6.** | $\frac{AB}{\sin C} = 2R$, unde $R$ este raza cercului circumscris triunghiului<br>Cum $\sin C = \frac{1}{2}$, obținem $R = 6$ | **2p**<br>**3p** |

| **SUBIECTUL al II-lea** | | **(30 de puncte)** |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$<br>$= 2 - 6 + 4 - 6 - 1 + 8 = 1$ | **2p**<br>**3p** |
| **b)** | Deoarece $\det(A(2)) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat, se rezolvă cu regula Cramer.<br>Calculăm $\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -2,\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -2,$<br>Obținem mulțimea soluțiilor sistemului de ecuații $S = \{(1,-2,-2)\}$ | **1p**<br>**3p**<br>**1p** |
| **c)** | Pentru m $= 3$, sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sistemului sunt de forma $\left(\frac{9+\alpha}{5}, \frac{3+7\alpha}{5}, \alpha\right)$ unde $\alpha$ este un număr întreg.<br>Cum $x_0 + y_0z_0 = 4 \Leftrightarrow \frac{9+\alpha}{5} + \frac{3+7\alpha}{5}\alpha = 4 \Leftrightarrow 7\alpha^2 + 4\alpha - 11 = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \left\{1, -\frac{11}{7}\right\}$.<br>Cum $-\frac{11}{7} \notin \boldsymbol{Z}$, soluția cu componente întreagi a sistemului care verifică relația este $(2,2,1)$. | **3p**<br>**2p** |
| **2.a)** | Utilizând asociativitatea obținem că $x * y * z = (x * y) * z = [2(x-3)(y-3)+3] * z =$<br>$= 2[2(x-3)(y-3)+3-3](z-3)+3 = 4(x-3)(y-3)(z-3)+3$ pentru orice $x, y, z \in \boldsymbol{R}$. | **2p**<br>**3p** |
| **b)** | Calculăm $x * \left(\frac{7}{2}\right) = 2(x-3)\left(\frac{7}{2}-3\right)+3 = 2(x-3)\left(\frac{1}{2}\right)+3 = x-3+3 = x$ pentru orice $x \in G$.<br>Tot prin calcul, $\left(\frac{7}{2}\right) * x = x$ pentru orice $x \in G$, deci $e = \frac{7}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$” | **3p**<br>**2p** |
| **c)** | Deducem din inducția matematică că $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{de\ 2023\ ori\ x} = 2^{2022}(x-3)^{2023} + 3$.<br>Ecuația dată este echivalentă cu $(x-3)^{2023} = 0$ de unde obținem $x$=3 | **3p**<br>**2p** |

| **SUBIECTUL al III-lea** | | **(30 de puncte)** |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=\frac{1-x}{x^2}, x\in \boldsymbol{R}$<br>$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0$ | **3p**<br>**2p** |
| **b)** | Calculăm $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ și deducem că $f$ nu are asimptotă orizontală, apoi calculăm $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=$<br>$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1-x\ln x}{x^2}=0$ și deducem că $f$ nu are asimptotă oblică.<br>Calculăm $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=1-\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1+x\ln x}{x}=-\infty \Rightarrow$ dreapta $x=0$ este unica asimptotă a funcției $f$ | **3p**<br><br>**2p** |
| **c)** | $f'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in(0,1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0,1]$<br>$f'(x)\leq 0$ pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,+\infty)$, deci $f(x)\leq f(1)=0\Rightarrow$ $f(x)\leq 0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$<br>Deci $1-\frac{1}{x}-\ln x\leq 0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$ de unde obținem că $1+x\ln x\geq x$ , pentru orice număr real $x$ strict pozitiv. | **3p**<br><br>**2p** |
| **2.a)** | $g'(x)=(e^x\sin x)'=(e^x)'\sin x+e^x(\sin x)'=e^x(\sin x+\cos x)$<br>$\Rightarrow g'(x)=f(x)$ pentru orice număr real $x$, deci $g$ este o primitivă a funcției $f$ . | **3p**<br>**2p** |
| **b)** | Calculăm primitivele funcției $g$: $\int e^x\sin x\ dx=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C$<br>Notăm cu G: $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ primitiva lui $g$ a cărei reprezentare grafică conține punctul O(0,0) $\Rightarrow$ $\frac{e^0(sin0-cos0)}{2}+C=0\Rightarrow C=\frac{1}{2}$. Deci $G(x)=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+\frac{1}{2}$. | **3p**<br>**2p** |
| **c)** | Fie $F$ o primitivă oarecare a lui $f\ \Rightarrow F'(x)=f(x)$ pentru orice număr real $x\Rightarrow F''(x)=f'(x)=$ $=2e^x\cos x$ pentru orice număr real $x$.<br>Dacă $x\epsilon\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\cos x\geq 0,\ e^x>0$ deci $F''(x)\geq 0\ \forall x\epsilon\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, de unde obținem că $F$ este convexă pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. | **3p**<br>**2p** |