Varianta 1

KRtm

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $C_3^2 - A_3^2 + P_3$.

5p **2.** Fie punctele $A(2,-1)$ şi $B(-1,3)$. Să se determine numerele reale a şi b astfel încât $\overrightarrow{AB} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

5p **3.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 x = 2$.

5p **4.** Să se calculeze $x_1^{2008} + x_2^{2008}$, ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 + x + 1 = 0$.

5p **5.** Se consideră funcția $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$. Să se determine $f([0,1])$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 4, AC = \sqrt{7}$ şi $BC = \sqrt{3}$. Să se calculeze $\cos B$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ sunt soluțiile ecuației $x^3 + x - 2 = 0$.

5p **a)** Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

5p **b)** Să se arate că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 6$.

5p **c)** Să se calculeze valoarea determinantului d.

2. Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se verifice că $x \circ y = (x+4)(y+4) - 4$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x \circ (-4) = -4$.

5p **c)** Ştiind că operația este asociativă, să se calculeze $(-2008) \circ (-2007) \circ \cdots \circ 2007 \circ 2008$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

5p **a)** Să se calculeze derivata funcției f.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x) \le -4$ pentru orice $x < -1$.

2. Se consideră funcțiile $f_n:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ de forma $f_n(x) = e^{-x}x^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi

$g_n:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ de forma $g_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x f_n(t)dt$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$

5p **a)** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f_1(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $\lim\limits_{x \to +\infty} g_1(x) = 1$.

5p **c)** Să se demonstreze că $g_n(x) = -\dfrac{1}{n!}e^{-x}x^n + g_{n-1}(x)$ pentru orice $x \ge 0$ şi pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se afle partea reală a numărului complex $z=(1-i)^4$.

5p **2.** Să se determine ce rată anuală a dobânzii s-a aplicat la un împrumut de 100 de lei, dacă peste un an s-a returnat suma de 105 lei.

5p **3.** Să se calculeze suma soluțiilor întregi ale inecuației $x^2-5x+5\le 1$.

5p **4.** Să se determine valorile reale pozitive ale numărului x, știind că $\lg\sqrt{x}$, $\frac{3}{2}$ și $\lg x$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **5.** Să se determine suma vectorilor de poziție ai punctelor $A(4,-8)$ și $B(6,3)$.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că $AC=2$, $m(\sphericalangle BAC)=30^\circ$ și $AB=4$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $d=\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul d.

5p **b)** Să se arate că $d=\frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$.

5p **c)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $8^x+27^x+125^x-3\cdot(2\cdot 3\cdot 5)^x=0$.

2. În mulțimea numerelor reale definim operația $x\circ y=2xy-6x-6y+21$.

5p **a)** Să se verifice dacă $x\circ y=2(x-3)(y-3)+3$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Știind că operația este asociativă, utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\underbrace{x\circ x\circ\cdots\circ x}_{\text{de } n \text{ ori } x}=2^{n-1}(x-3)^n+3$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ și orice număr natural $n\ge 2$.

5p **c)** Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $x\circ x\circ x\circ x=11$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-e^{-x}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $f'(x)=2$.

5p **c)** Să se calculeze $S=g(0)+g(1)+\ldots+g(2008)$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f'(x)-f''(x)$ și f'' reprezintă derivata a doua a funcției f.

2. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ date prin $f(x)=xe^x$ și $F(x)=(x-1)e^x$.

5p **a)** Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{F(x^4)}{x-1}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_1^x \frac{f(t)f''(t)-(f'(t))^2}{f^2(t)}dt=\frac{x+1}{x}-2$ pentru orice $x>1$.

Varianta 3

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze suma primilor 20 de termeni ai şirului 1, 7, 13, 19, ...

5p **2.** Se consideră toate numerele naturale de câte trei cifre scrise cu elementele din mulțimea $\{1,2\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un astfel de număr, acesta sa fie divizibil cu 3.

5p **3.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\sqrt{2+x}=-x$.

5p **4.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Să se calculeze $f(0)+f(1)+f(2)+...+f(2008)$.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care conține punctul $A(2,-1)$ şi este perpendiculară pe dreapta $2x-y+5=0$.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că $AB=\sqrt{2}$, $m(\sphericalangle A)=30^\circ$ şi $m(\sphericalangle B)=75^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Considerăm determinantul $d=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$ sunt soluțiile ecuației $x^3+2x-3=0$.

5p **a)** Să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

5p **b)** Să se verifice că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=9$.

5p **c)** Să se calculeze valoarea determinantului d.

2. Se consideră polinoamele cu coeficienți reali $f=X^4+aX^3-28X^2+bX+96$ şi $g=X^2+2X-24$.

5p **a)** Să se determine coeficienții reali a şi b, ştiind că polinomul f este divizibil cu polinomul g.

5p **b)** Pentru $a=2$ şi $b=-8$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $16^x+2\cdot 8^x-28\cdot 4^x-8\cdot 2^x+96=0$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Să se calculeze derivata funcției f.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că $3^{\sqrt{5}}<5^{\sqrt{3}}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} e^{x+1}, & x\le -1 \\ 2+x, & x>-1 \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases} e^{x+1}, & x\le -1 \\ \dfrac{x^2}{2}+2x+\dfrac{5}{2}, & x>-1 \end{cases}$ este o primitivă a lui f.

5p **c)** Să se calculeze $\int_{-2}^{0} x f(x)dx$.

Varianta 4

KRtm

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine partea reală a numărului complex $z = 1 - i^{2008}$.

5p **2.** Să se calculeze termenul al treilea al dezvoltării binomiale $\left(1+\sqrt{5}\right)^6$.

5p **3.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, de forma $f(x) = mx^2 - 8x - 3$, unde m este un număr real nenul. Să se determine m știind că valoarea maximă a funcției f este egală cu 5.

5p **4.** Să se determine soluțiile reale ale inecuației $4^x \geq (0,25)^x$.

5p **5.** Să se determine numărul real a știind că vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + a\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} + (a-2)\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $AB = 3$ și $m(\sphericalangle C) = 30°$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n,2^n)$, $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se verifice dacă punctele O, A_1, A_2 sunt coliniare.

5p **b)** Să se determine numărul de drepte care trec prin cel puțin două dintre punctele O, A_0, A_1, A_2.

5p **c)** Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, $n\in\mathbb{N}$.

2. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ și $X(a) = I_2 + aA$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze suma $A + 2\cdot A^2 + 3\cdot A^3 + \cdots + 2008\cdot A^{2008}$, unde $A^n = \underbrace{A\cdot A\cdot \ldots \cdot A}_{de\ n\ ori}$, $n\geq 1$.

5p **b)** Să se verifice dacă $X(a)\cdot X(b) = X(a+b+ab)$, oricare ar fi numerele $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze suma $X(1) + X(2) + X(3) + \cdots + X(2008)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + e^{-x}$.

5p **a)** Să se arate că f este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și crescătoare pe $[0,+\infty)$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $f''(x) + f(-x) = 2 - x$, unde f'' este derivata a doua a funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + e^{-x}$.

5p **a)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

5p **b)** Folosind faptul că $x + e^{-x} \geq 1$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, să se demonstreze că $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \geq \frac{2}{3}$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine forma algebrică a numărului complex $z=\left(\frac{2-3i}{3+2i}\right)^4$.

5p **2.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\left\{\sqrt[3]{1},\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{3},....,\ \sqrt[3]{30}\right\}$, acesta să fie număr rațional.

5p **3.** Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+3$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=2x-1$. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $2f(x)+3g(x)=-5$.

5p **4.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2 x=\log_x 2$.

5p **5.** În reperul cartezian $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ se consideră vectorii $\vec{u}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ şi $\vec{v}=5\vec{i}-\vec{j}$. Să se determine coordonatele vectorului $5\vec{u}+3\vec{v}$.

5p **6.** Fie triunghiul dreptunghic ABC şi D, mijlocul ipotenuzei BC. Să se calculeze lungimea laturii AB ştiind că $AC=6$ şi $AD=5$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\begin{vmatrix}x^2&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=81$.

5p **b)** Pentru $a=3$, să se calculeze A^2+A^3, unde $A^2=A\cdot A$ şi $A^3=A^2\cdot A$.

5p **c)** Să se demonstreze prin metoda inducției matematice că $A^n=\begin{pmatrix}a^n&0&0\\0&1&0\\0&n&1\end{pmatrix}$,

oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$ şi $n\in\mathbb{N}^*$, unde $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot ...\cdot A}_{de\ n\ ori}$.

2. Fie mulțimea $G=\left\{a+b\sqrt{2}\,\middle|\ a^2-2b^2=1,\ a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

5p **a)** Să se verifice care dintre numerele următoare $3+2\sqrt{2}$, $3-2\sqrt{2}$ şi $1+\sqrt{2}$ aparțin mulțimii G.

5p **b)** Să se arate că înmulțirea numerelor reale este o lege de compoziție internă pe G.

5p **c)** Arătați că orice element din G este simetrizabil.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2008}-2008(x-1)-1$.

5p **a)** Să se calculeze $f(0)+f'(0)$.

5p **b)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$.

5p **c)** Să se arate că f este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x+1)^{2008}-2008x-1$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 g(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x g(t-1)\,dt}{x^{2009}}$.

5p **c)** Să se arate că $(x+1)^{2009}\geq 2009\cdot 1004x^2+2009x+1$ pentru orice $x\geq 0$.

Varianta 6

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze partea reală a numărului complex z^{2007} știind că z verifică egalitatea $z^2+z+1=0$.

5p **2.** Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+1$ și $g(x)=x+4$. Să se calculeze coordonatele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor f și g.

5p **3.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2 x+\log_4 x^2=\log_2 0,25$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea $A=\left\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},...,\sqrt{10}\right\}$, acesta să fie rațional.

5p **5.** Să se determine numărul real a dacă dreptele $2x-y+3=0$ și $ax+2y+5=0$ sunt perpendiculare.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=1$, $AC=2$ și $BC=\sqrt{5}$. Să se calculeze $\cos B$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $d=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Să se calculeze valoarea determinantului pentru $x=1$.

5p **b)** Să se arate că $d=x(x-1)$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\begin{vmatrix} \ln x & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \ln x \end{vmatrix}=\ln x$.

2. Fie mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbb{Q}, a^2-2b^2=1\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

5p **a)** Să se determine patru elemente diferite ale mulțimii M.

5p **b)** Să se arate că înmulțirea matricelor este o lege de compoziție internă pe mulțimea M.

5p **c)** Să se demonstreze că invesa oricărei matrice din M aparține tot mulțimii M.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}$, oricare ar fi $x\geq 0$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\dfrac{1}{2}\leq f(x)\leq 2$ pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 f'(x)\right)$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}$ se consideră funcțiile $I_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin $I_0(x)=1$ și $I_{n+1}(x)=\int_0^x I_n(t)\,dt$.

5p **a)** Să se calculeze $I_1(1)+I_1(2)$.

5p **b)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $I_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției I_4, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

Varianta 7

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $x_1^4 + x_2^4$ știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 2x + 2 = 0$.

5p **2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-4x$. Să se calculeze $g(-1)$ știind că g este inversa funcției f.

5p **3.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $3^{x-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}$.

5p **4.** Se depune suma de 1000 lei, cu o rată anuală a dobânzii simple de 10%. Să se calculeze după câți ani se obțin 1300 lei.

5p **5.** Se consideră punctele $A(1,a)$, $B(2,-1)$, $C(3,2)$ și $D(1,-2)$. Să se determine numărul real a știind că dreptele AB și CD sunt paralele.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 5$, $AC = 6$ și $BC = 7$. Să se calculeze $\cos A$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze matricea B^2, unde $B^2 = B\cdot B$.

5p **b)** Să se verifice că $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se arate că $C^n = 6^n\cdot I_2$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, unde $C = B^2 + A^{-1}$ și $C^n=\underbrace{C\cdot C\cdot\ldots\cdot C}_{de\ n\ ori}$.

2. Fie $f = X^3 + aX^2 + X + \hat{1}$ și $g = X + \hat{3}$ polinoame din inelul $\mathbb{Z}_5[X]$.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{Z}_5$, astfel încât polinomul f să fie divizibil cu g.

5p **b)** Pentru $a=\hat{1}$ să se arate că $f=(X+\hat{1})(X^2+\hat{1})$.

5p **c)** Pentru $a=\hat{1}$ să se rezolve în inelul $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ ecuația $f(x)=\hat{0}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^2$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f nu are asimptotă către $+\infty$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x(1+\ln x)}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^e f'(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $[1,+\infty)$.

5p **c)** Să se determine numărul real $a\in(1,e^2)$ astfel încât aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f, axa Ox, dreptele de ecuații $x=a$ și $x=e^2$ să fie egală cu $\ln\frac{3}{2}$.

Varianta 8

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine a 2008-a zecimală a numărului $0,(285714)$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Să se determine punctul care are abscisa egală cu ordonata şi aparține graficului funcției f.

5p **3.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $2^x+2^{x+3}=36$.

5p **4.** Să se calculeze ce rată anuală a dobânzii simple s-a aplicat la depunerea sumei de 1000 lei, dacă după 4 ani se încasează suma de 1100 lei.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care conține punctul $A(1,1)$ şi este paralelă cu dreapta $4x+2y+5=0$.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că $AB=6$, $AC=10$ şi $m(\sphericalangle BAC)=150^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $X=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Definim matricele $A=X\cdot Y^t$ şi $B(a)=aA+I_3$, unde $a\in\mathbb{C}$ şi Y^t este transpusa matricei Y.

5p **a)** Să se determine matricea A.

5p **b)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **c)** Să se arate că matricea $B(a)$ este inversabilă, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_5[X]$, $f=(\hat{3}a+\hat{3}b)X^2+\hat{2}X+\hat{2}a+\hat{3}b$ şi $g=\hat{2}X^2+\hat{2}X+\hat{3}a+\hat{2}b$.

5p **a)** Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}_5$, astfel încât cele două polinoame să fie egale.

5p **b)** Pentru $a=b=\hat{2}$, să se calculeze suma $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})+f(\hat{3})+f(\hat{4})$.

5p **c)** Pentru $a=b=\hat{2}$ să se rezolve în $\mathbb{Z}_5$ ecuația $f(x)=\hat{0}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\setminus\{e\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1+\ln x}{1-\ln x}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(1)+f\left(\frac{1}{e}\right)$.

5p **b)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{2}{x(1-\ln x)^2}$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}x^3\cdot f'(x)$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ date prin $f(x)=e^x$ şi $g(x)=\frac{1}{x}$.

5p **a)** Să se calculeze primitivele funcției $f+g$.

5p **b)** Să se arate că $\int_1^2 (f^2(x)+g^2(x))\,dx=\frac{e^4-e^2+1}{2}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_1^2 e^x\cdot\frac{1}{x}\,dx\le\frac{e^4-e^2+1}{4}$.

Varianta 9

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze suma $1+5+9+13+...+101$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-mx+2$. Să se determine numărul real nenul m știind că valoarea minimă a funcției este egală cu 1.

5p **3.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2 x+\log_2(x+2)=3$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea $A=\left\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},...,\sqrt{11}\right\}$ acesta să fie irațional.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care conține punctul $A(2,-3)$ și este perpendiculară pe dreapta $x+2y+5=0$.

5p **6.** Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC știind că $AB=6$, $AC=10$ și $m(\sphericalangle A)=120^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru fiecare $a\in\mathbb{R}$, se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$ și sistemul $\begin{cases}ax+y+z=1\\x+ay+z=1\\x+y+az=1\end{cases}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei $A(a)$, $a\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine valorile parametrului real a pentru care sistemul dat este sistem Cramer.

5p **c)** Pentru $a=0$ să se rezolve sistemul.

2. Se consideră polinoamele $f=(X+1)^{2008}+(X-1)^{2008}$ și $g=X+1$. Polinomul f are forma algebrică $f=a_{2008}X^{2008}+a_{2007}X^{2007}+\cdots+a_1X+a_0$, cu $a_0,a_1,\cdots,a_{2008}\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine coeficienții a_{2008} și a_0.

5p **b)** Să se calculeze restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

5p **c)** Să se calculeze suma coeficienților polinomului f.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=e^x(ax^2+bx+c)$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ pentru $a>0$.

5p **b)** Să se verifice că $f'(0)-f(0)=b$.

5p **c)** Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(0)=0$, $f'(0)=1$ și $f''(0)=4$.

2. Se consideră integralele $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}\,dx$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se demonstreze că $I_2\le I_1$.

5p **c)** Să se demonstreze că $I_{n+2}+I_n=\frac{1}{n+1}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine al nouălea termen al unei progresii geometrice, știind că rația este egală cu $\frac{1}{3}$ și primul termen este 243.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. Să se se determine soluțiile reale ale ecuației $f(x+1)+f(x-1)=6$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{2-x}=0$.

5p **4.** Să se determine $x>0$, știind că al treilea termen al dezvoltării $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ este egal cu 120.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-1), B(-2,1)$ și $C(4,-1)$. Să se determine ecuația înălțimii din A în triunghiul ABC.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC având aria egală cu 15. Să se calculeze $\sin A$ știind că $AB=6$ și $AC=10$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Notăm $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ n\ ori}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Să se arate că $A^2+A^3=O_2$.

5p **c)** Să se calculeze suma $A+2\cdot A^2+\cdots+2008\cdot A^{2008}$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{C}[X]$, $f=(X+i)^{10}+(X-i)^{10}$ și $g=X^2+1$.

5p **a)** Să se descompună polinomul g în produs de factori ireductibili în $\mathbb{C}[X]$.

5p **b)** Să se demonstreze că polinomul f nu este divizibil cu polinomul g.

5p **c)** Să se arate că, dacă $z\in\mathbb{C}$ este o rădăcină a polinomului f, atunci $|z+i|=|z-i|$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2-x, & x\geq 1\\ -x^2+x, & x<1\end{cases}$.

5p **a)** Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=1$.

5p **b)** Să se calculeze $f'(0)+f'(2)$.

5p **c)** Să se rezolve în intervalul $[e,+\infty)$ ecuația $f(\ln x)=6$.

2. Se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin $f_0(x)=e^x$ și $f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)dt$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se verifice că $f_1(x)-f_2(x)=x$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 x f_0(x)\,dx$.

5p **c)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că

$f_{n+1}(x)=e^x-1-\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}-\ldots\frac{x^n}{n!}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$ și pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Varianta 11

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $C_5^4 + A_5^4 - P_5$.

5p **2.** Să se calculeze suma $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}$.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$. Să se determine numerele reale a şi b ştiind că $f(1-x)+f(2x)=x+3$, pentru $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **4.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_3\sqrt[3]{3^x}=\log_2\left(\sqrt{2}\right)^{x^2}$.

5p **5.** În reperul cartezian $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, să se determine vectorul de poziție al centrului de greutate al triunghiului ABC ştiind că $A(1,2), B(-1,1), C(3,3)$.

5p **6.** Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC ştiind că $BC=8$ şi $m(\sphericalangle A)=45^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $X=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a & 9\\ 1 & a\end{pmatrix}$ cu $a,x,y\in\mathbb{R}$ şi $B=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $X\cdot A=B$, atunci $(a^2-9)x=0$.

5p **b)** Să se determine valorile reale ale numărului a pentru care determinantul matricei A este nenul.

5p **c)** Să se determine trei soluții distincte ale sistemului de ecuații $\begin{cases}3x+y=0\\ 9x+3y=0\end{cases}$.

2. Fie mulțimea $M=\left\{A(a)=\begin{pmatrix}a & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\\ a & 0 & a\end{pmatrix}\middle|\ a\in\mathbb{C}\right\}$.

5p **a)** Să se verifice dacă $A(a)\cdot A(b)=A(2ab)$ oricare ar fi numerele complexe a şi b.

5p **b)** Să se arate că $A\left(\frac{1}{2}\right)$ este element neutru față de operația de înmulțire a matricelor pe M.

5p **c)** Să se determine simetricul elementului $A(1)\in M$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor pe mulțimea M.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}$.

5p **a)** Să se determine ecuațiile asimptotelor funcției f.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 f'(x)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+x$.

5p **a)** Să se verifice că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{\ln^2 x}{2}+\ln x+\frac{x^2}{2}$ este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^e\left(f(x)-\frac{\ln x}{x}\right)dx$.

5p **c)** Să se determine rația progresiei aritmetice având termenul general $I_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}(f(x)-x)\,dx$, $n\geq 1$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră mulțimile $A=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ x^2-9\le 0\right\}$ şi $B=\left\{x\in\mathbb{N}\ \middle|\ 2x-7<0\right\}$. Să se determine mulțimea $A\cap B$.

5p **2.** Să se determine ecuația dreptei care conține punctele $A(2,3)$ şi $B(-3,-2)$.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-25$. Să se calculeze $f(-2008)\cdot f(-2007)\cdot\ldots\cdot f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(2007)\cdot f(2008)$.

5p **4.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $3^{2\log_9 x}=\sqrt{x^2}$.

5p **5.** Să se rezolve ecuația $C_{3-x}^{x-2}=1$, $x\in\mathbb{N}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC de arie egală cu 6, cu $AB=3$ şi $BC=8$. Să se calculeze $\sin B$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Pentru orice $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se notează $X\cdot X=X^2$. Să se calculeze suma A^2+B^2.

5p **b)** Să se verifice că $A=I_3+B$.

5p **c)** Să se demonstreze prin metoda inducției matematice că $A^n=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n+1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$ oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$,

unde $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ n\ ori}$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe se defineşte legea de compoziție $x\circ y=xy+i(x+y)-1-i$.

5p **a)** Să se calculeze $(1-i)\circ i$.

5p **b)** Să se verifice dacă $x\circ y=(x+i)(y+i)-i$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{C}$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x\circ x\circ x=x$, ştiind că legea de compoziție „$\circ$” este asociativă.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x-2\ln x$.

5p **a)** Să se rezolve inecuația $f'(x)\le -1$, unde $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\sqrt{2}-\ln 2\ge\ln\frac{e^2}{4}$.

2. Se consideră funcțiile $f_m:[0,1]\to\mathbb{R}$ definite prin $f_m(x)=m^2x^2+(m^2-m+1)x+1$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int f_1(x)\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 e^x f_0(x)\,dx$.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $\int_0^1 f_m(x)\,dx=\frac{3}{2}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine partea reală a numărului complex $z=\dfrac{1+3i}{i-3}$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-3x+1$ şi $g(x)=x-1$. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $f(x)=-g(x)$.

5p **3.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_{x+1}\left(x^2-4x+4\right)=2$.

5p **4.** Să se arate utilizând binomul lui Newton că numărul $\left(1+\sqrt{5}\right)^n+\left(1-\sqrt{5}\right)^n$ este întreg, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5p **5.** Să se calculeze aria triunghiului echilateral ABC ştiind că $A(-1,1)$ şi $B(3,-2)$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC de arie egală cu 7. Să se calculeze lungimea laturii AB ştiind că $AC=2$ şi că $m(\sphericalangle A)=30^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $D(a)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 9\\ 1 & a & a^2\end{vmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Să se calculeze valoarea determinantului $D(9)$.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $D(x)=0$.

5p **c)** Să se demonstreze că pentru orice număr real $x>1$ avem $D\left(3^x\right)>0$.

2. Se consideră mulțimea $M=[k,\infty)\subset\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{R}$ şi legea de compoziție $x*y=xy-k(x+y)+k^2+k$, oricare ar fi $x,y\in M$.

5p **a)** Să se demonstreze că pentru orice $x,y\in M$ rezultă că $x*y\in M$.

5p **b)** Să se determine $k\in\mathbb{R}$ astfel încât $2*3=2$.

5p **c)** Pentru $k=2$, să se rezolve ecuația $x*x=6$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$.

5p **a)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ a graficului funcției f.

5p **b)** Să se demonstreze că $1\le f(x)\le\dfrac{2}{\sqrt{e}}$ pentru orice $x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(f(x)-\dfrac{1}{x}\right)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\cos x$.

5p **a)** Să se determine primitiva $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f, având proprietatea $F(0)=1$.

5p **b)** Să se determine $x\in[0,\pi]$ astfel încât $\int_0^x f(t)\sin t\,dt=\dfrac{1}{2}$.

5p **c)** Să se arate că $a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^2 x\,dx-2a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\dfrac{\cos x}{x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\dfrac{1}{x^2}dx\ge 0$ pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine forma algebrică a numărului complex $z=\frac{1}{i^{2007}}+\frac{1}{i^{2008}}+\frac{1}{i^{2009}}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-11x+30$. Să se calculeze $f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(10)$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $2^{x+3}-2^x=28$.

5p **4.** Să se determine termenul al şaptelea al dezvoltării binomului $\left(x+\sqrt[3]{x}\right)^{10}$.

5p **5.** În reperul cartezian $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ se consideră vectorii $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{OB}=5\vec{i}-\vec{j}$. Să se calculeze lungimea segmentului AB.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC ştiind că $AB=2$, $BC=4$ şi $m(\sphericalangle B)=60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}5&0\\0&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze A^2+A^3, unde $A^2=A\cdot A$ şi $A^3=A^2\cdot A$.

5p **b)** Să se demonstreze prin metoda inducției matematice că $A^n=\begin{pmatrix}5^n&0\\0&1\end{pmatrix}$, pentru orice număr natural $n\geq 2$, ştiind că $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ n\ ori}$.

5p **c)** Să se determine matricea $B=A+A^2+\cdots+A^{2008}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+mX^2+n$, unde $m,n\in\mathbb{R}$..

5p **a)** Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ ştiind că polinomul f admite rădăcina $x_1=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile polinomului să verifice relația $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0$.

5p **c)** Pentru $m=-1$ şi $n=1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ a graficului funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $f'(e)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $x^e\leq e^x$ pentru orice $x>0$.

2. Se consideră funcția $f:[-4,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{16-x^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^4 f^2(x)\,dx$.

5p **b)** Să se verifice că $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\frac{x}{f(x)}dx=0$.

5p **c)** Să se demonstreze că $0\leq\int_{-4}^{4}f(x)dx\leq 32$.

Varianta 15

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze numărul submulțimilor mulțimii $\{1,2,...,9\}$, care au un număr par nenul de elemente.

5p **2.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $125^x = \frac{1}{5}$.

5p **3.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+5x+m+6$. Să se determine valorile numărului real m știind că $f(x)\geq 0$, pentru $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **4.** Să se calculeze valoarea produsului $i\cdot i^3\cdot i^5\cdot\ldots\cdot i^{59}$, unde $i^2=-1$.

5p **5.** Să se calculeze $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$, știind că A, B și C sunt vârfurile unui triunghi.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC, știind că $AB=5$, $AC=4$ și $m(\sphericalangle A)=60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se verifice că $AB=BA$.

5p **b)** Să se calculeze A^2+B^2, unde $A^2=A\cdot A$ și $B^2=B\cdot B$.

5p **c)** Să se arate că $C^n=5^n\cdot I_2$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ unde $C=A+B$ și $C^n=\underbrace{C\cdot C\cdot\ldots\cdot C}_{de\ n\ ori}$.

2. Se consideră polinoamele cu coeficienți raționali $f=X^4+aX^3+bX^2-5X+6$ și $g=X^3+X-2$.

5p **a)** Să se determine $a,b\in\mathbb{Q}$, astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g.

5p **b)** Pentru $a=-3$ și $b=1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x}-3^{2x+1}+3^x-5+6\cdot 3^{-x}=0$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ date prin $f_0(x)=e^{-x}-1$ și $f_{n+1}(x)=f_n'(x)$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ a graficului funcției f_0.

5p **b)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $f_0(x)-f_1(x)=2e^{-x}-x^2$.

5p **c)** Să se arate că $f_n(x)=(-1)^{n-1}f_1(x)$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și pentru orice $x\in\mathbb{R}$, utilizând metoda inducției matematice.

2. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=e^{-x}\sin x$ și $F(x)=-\frac{1}{2}e^{-x}\sin x-\frac{1}{2}e^{-x}\cos x$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cdot f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_0^1 f(x)dx\leq 1-\frac{1}{e}$.

Varianta 16

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $C_8^3 - C_5^2 - C_8^5 + C_5^3$.

5p **2.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2(x+5) = 3$.

5p **3.** Să se determine o ecuație de gradul al II-lea ale cărei soluții x_1 și x_2 verifică simultan relațiile $x_1 + x_2 = 1$ și $x_1^3 + x_2^3 = 7$.

5p **4.** Să se determine numărul complex z care verifică egalitatea $z + 2\bar{z} = 3 + i$.

5p **5.** Să se determine coordonatele punctului C știind că el este simetricul punctului $A(5,4)$ față de punctul $B(-2,1)$.

5p **6.** Să se calculeze lungimea înălțimii din A în triunghiul ABC știind că $AB = \sqrt{5} - \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ și $BC = 4$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} mx + y + z = m^2 - 3 \\ 5x - 2y + z = -2 \\ (m+1)x + 2y + 3z = -2 \end{cases}$, unde m este un parametru real.

5p **a)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$, știind că $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ m+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12$.

5p **b)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită soluția $(1,2,-3)$.

5p **c)** Pentru $m = -1$ să se rezolve sistemul de ecuații.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 9X^2 - X + 9$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

5p **a)** Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 1$.

5p **b)** Să se verifice că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 18$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f(3^x) = 0$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ x^2 + x + a, & x \geq 0 \end{cases}$ unde $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0 = 0$.

5p **b)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă -1.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)+1}{x^2 + x}$.

2. Se consideră integralele $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{4 + x^2} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se demonstreze că $4I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se arate că $0 \leq \int_0^1 \dfrac{x^n}{4 + x^2} dx \leq \dfrac{1}{4(n+1)}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\sin 135°$.

5p **2.** Să se calculeze conjugatul numărului complex $z=(1-i)^3$.

5p **3.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $3^{2\log_3 x}=4$.

5p **4.** Să se determine numărul natural n știind că $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=128$.

5p **5.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$. Să se determine $f([0,2])$.

5p **6.** Se consideră triunghiul echilateral ABC înscris într-un cerc de centru O. Să se calculeze $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n,2n+1)$, $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se determine ecuația dreptei A_1A_2.

5p **b)** Să se calculeze aria triunghiului OA_1A_2.

5p **c)** Să se arate că punctele $A_n(n,2n+1)$, $n\in\mathbb{N}$ sunt coliniare.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-3b^2=1\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

5p **a)** Să se verifice că $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\in G$ și $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\notin G$.

5p **b)** Să se arate că pentru orice două matrice $A,B\in G$ are loc egalitatea $A\cdot B=B\cdot A$.

5p **c)** Să se demonstreze că inversa oricărei matrice din G aparține mulțimii G.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$.

5p **a)** Să se determine ecuația asimptotei verticale a graficului funcției f.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este descrescătoare pe $(0,2]$.

5p **c)** Să se arate că $2e^{\sqrt{3}}\le 3e^{\sqrt{2}}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\ln x-x$.

5p **a)** Să se calculeze $\displaystyle\int_1^2 (x-f(x)+\ln x)^2\,dx$.

5p **b)** Să se demonstreze că orice primitivă F a funcției f este concavă pe intervalul $(1,+\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h:[1,e]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)+x$, axa Ox și dreptele $x=1$ și $x=e$.

Varianta 18

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\dfrac{\log_2 3}{\log_2 \sqrt{3}}$.

5p **2.** Să se calculeze probabilitatea ca un element al mulțimii $\{0,1,2,3,4,5\}$ să verifice inegalitatea $n!<50$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\sqrt{x}-\dfrac{14}{\sqrt{x}}=5$.

5p **4.** Să se demonstreze că pentru orice a real, ecuația de gradul al doilea $(1+\cos a)x^2-(2\sin a)x+1-\cos a=0$ admite soluții reale egale.

5p **5** Știind că $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}$, să se determine numerele reale α, β pentru care $3\vec{u}-5\vec{v}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}$.

5p **6.** Raza cercului circumscris triunghiului ABC este $\dfrac{3}{2}$, iar $BC=3$. Să se calculeze $\sin A$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{A=\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \middle|\ a,b\in\mathbb{Z},\ a^2=1\right\}$.

5p **a)** Să se verifice dacă matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și respectiv $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparțin mulțimii G.

5p **b)** Să se determine matricea $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}=aI_2+bB$, $\forall a,b\in\mathbb{Z}$.

5p **c)** Să se demonstreze că inversa oricărei matrice din G este tot o matrice din G.

2. Se consideră polinomul cu coeficienți raționali $f=X^3+aX^2-5X+14$ și suma $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$, $n\in\mathbb{N}^*$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **a)** Să se determine numărul rațional a astfel încât polinomul f să admită rădăcina $x_1=2$.

5p **b)** Pentru $a=-4$ să se rezolve ecuația $f(x)=0$.

5p **c)** Pentru $a=-4$ să se demonstreze egalitatea $S_3+42=4S_2+5S_1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)^2+(x-1)^2$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=4x$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{e^x}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(-\frac{1}{3}\right)+f\left(-\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)\geq 12$

2. Se consideră funcțiile $I_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin $I_0(x)=e^x$ și $I_{n+1}(x)=\int_0^x I_n(t)dt$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se calculeze $I_1(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{I_2(x)}{x+1}$.

5p **c)** Utilizând metoda inducției matematice, să se demonstreze că $I_n(x)=e^x-1-\dfrac{x}{1!}-\dfrac{x^2}{2!}-\ldots-\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$ și pentru orice $n\geq 2$.

Varianta 19

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\frac{1}{\log_2 24}+\frac{1}{\log_3 24}+\frac{1}{\log_4 24}$.

5p **2.** Să se calculeze $\cos 135^\circ$.

5p **3.** Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{x-5}+\sqrt{1-x}=2$.

5p **4.** Să se determine numărul natural n, știind că $\frac{(n-3)!}{(n-5)!}=6$.

5p **5.** Să se determine numărul real a știind că vectorii $\vec{u}=-\vec{i}+2\vec{j}$ și $\vec{v}=(4-a)\vec{i}+a\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+6x-5$. Să se calculeze $f([0,5])$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A_n\left(\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ \log_3 9^n\right)$ și $B_n(-n,2n)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $A_n=B_n$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **b)** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele A_1 și A_2.

5p **c)** Să se demonstreze că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, punctul A_n aparține dreptei A_1A_2.

2. În mulțimea $\mathbb{C}[X]$ se consideră polinoamele $f=X^9+X^8+\ldots+X+1$, cu rădăcinile $x_1,x_2,\cdots,x_9\in\mathbb{C}$ și $g=X^2+X+1$, cu rădăcinile $y_1,y_2\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se arate că $y_1^3=y_2^3=1$.

5p **b)** Să se arate că polinomul f divide polinomul $X^{10}-1$.

5p **c)** Să se calculeze $x_1^{10}+x_2^{10}+\ldots+x_9^{10}$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5p **b)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$.

5p **c)** Să se demonstreze că $0<f(x)\le\frac{1}{2e}$ pentru orice $x\in\left[\sqrt{e},+\infty\right)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^2\left(f(x)+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$.

5p **b)** Să se arate că primitivele funcției f sunt funcții monotone.

5p **c)** Să se verifice că $\int_1^2 f'(x)f(x)dx=-\frac{22}{81}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\log_7 \frac{1}{6}+\log_7 \frac{1}{5}+\log_7 5+\log_7 6$.

5p **2.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\sqrt{x^2-1}+x=2$.

5p **3.** Să se determine o ecuație de gradul al II-lea ale cărei soluții x_1 și x_2 verifică simultan relațiile $x_1+x_2=2$ și $x_1^2+x_2^2=2$.

5p **4.** Să se determine x natural astfel încât $C_x^1+C_x^2=C_6^2$.

5p **5.** Să se determine valorile numărului real a știind că distanța dintre punctele $A(3,a)$ și $B(-1,2)$ este egală cu 5.

5p **6.** Să se determine numărul real x pentru care x, $x+7$ și $x+8$ sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n+2,3n-2)$, $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se scrie ecuația dreptei determinate de punctele A_1 și A_2.

5p **b)** Să se calculeze aria triunghiului OA_0A_1.

5p **c)** Să se demonstreze că pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$, punctele A_1, A_2 și A_n sunt coliniare.

2. Se consideră polinoamele $f=\hat{3}X^5+\hat{3}X^3+\hat{3}X+\hat{4}\in\mathbb{Z}_5[X]$ și $g=\hat{3}X^3+\hat{3}X^2+\hat{2}X+\hat{3}\in\mathbb{Z}_5[X]$.

5p **a)** Să se calculeze $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})+f(\hat{3})+f(\hat{4})$.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{Z}_5$ ecuația $f(x)=\hat{0}$.

5p **c)** Să se determine câtul împărțirii polinomului f la polinomul g.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x+2}$.

5p **a)** Să se verifice că $f(0)+f'(0)=\frac{3}{4}$.

5p **b)** Știind că derivata a doua a funcției f este pozitivă, să se demonstreze că $f'(x)\leq\frac{2e}{9}$, pentru orice $x\in[0,1]$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\frac{3}{e}\leq\frac{1}{f(x)}\leq 2$, $\forall x\in[0,1]$.

2. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=e^{-x}$ și $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

5p **a)** Să se arate că $F(x)=-f(x)+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=F(x)-f(x)$ este concavă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x tf(t^2)dt$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\sqrt{5^{4\log_5 2}}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația $f(x)=x^2$.

5p **3.** Să se determine mulțimea valorilor reale ale x pentru care $-4\le 3x+2\le 4$.

5p **4.** Să se determine soluțiile inecuației $C_7^{x-2}\ge C_7^x$, $x\in\mathbb{N}$.

5p **5.** Să se determine numărul real a știind că vectorii $\vec{u}=2a\vec{i}+3\vec{j}$ și $\vec{v}=\vec{i}-5\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că $AB=\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $AC=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ și $BC=\sqrt{10}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&3&4\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și funcția $f:\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(X)=X^2-3X+I_3$, unde $X^2=X\cdot X$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(I_3+B)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $f(A)=I_3+B$.

5p **c)** Utilizând metoda inducției matematice să se arate că $\left(f(A)\right)^n=I_3+nB+\frac{n(n-1)}{2}B^2$, oricare ar fi numărul natural $n\ge 1$, unde $\left(f(A)\right)^n=\underbrace{f(A)\cdot f(A)\cdot\ldots\cdot f(A)}_{de\ n\ ori}$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziție $x*y=x+y-3$ și $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$.

5p **a)** Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $x\circ x=x*x$.

5p **b)** Să se determine numărul întreg a cu proprietatea că $x\circ a=3$, oricare ar fi numărul întreg x.

5p **c)** Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases}x*(y+1)=4\\(x-y)\circ 1=5\end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\frac{ax^2+bx+2}{x-1}$ unde $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine a și b astfel încât graficul funcției să admită ca asimptotă la $+\infty$ dreapta de ecuație $y=x+2$.

5p **b)** Să se demonstreze că pentru $a=b=1$ funcția f admite două puncte de extrem.

5p **c)** Pentru $a=b=1$ să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=-1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3^x+3^{-x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=3^{-x}$.

5p **c)** Să se arate că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $(-\infty,0]$ și convexă pe $[0,+\infty)$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul real x știind că $x-3,\ 4,\ x+3$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-8x+7$. Să se calculeze distanța dintre punctele determinate de intersecția graficului funcției f cu axa Ox.

5p **3.** Să se demonstreze că $E=\sqrt{\left(\sqrt{2}-2\right)^2}+\sqrt{\left(3+\sqrt{2}\right)^2}$ este număr natural.

5p **4.** Să se determine câte numere de câte trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{0,1,2,3,4\}$.

5p **5.** Se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(-1,2)$. Să se calculeze coordonatele punctului C știind că $3\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

5p **6.** Să se calculeze $\sin A$, în triunghiul ABC, știind că $AB=4$, $BC=2$ și $m(\widehat{C})=60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A(k)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \omega^k & \omega^{2k}\\ 1 & \omega^{2k} & \omega^k\end{pmatrix}$, unde ω este o soluție a ecuației $x^2+x+1=0$, $k\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze suma elementelor matricei $A(1)$.

5p **b)** Să se arate că determinantul matricei $A(1)$ este egal cu $-6\omega-3$.

5p **c)** Să se determine matricea $A(1)+A(2)+A(3)$.

2. Se consideră polinomul cu coeficienții reali $f=mX^3+11X^2+7X+m$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $g=2X+3$.

5p **b)** Pentru $m=6$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

5p **c)** Pentru $m=6$ să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului f.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-e\ln x$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Să se arate că $f(x)\geq 0$ pentru orice $x>0$ și să se deducă inegalitatea $e^x\geq x^e$ pentru orice $x>0$.

2. Se consideră funcția $f:[4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_{2007}^{2008}\left(f(x+1)-f(x)\right)dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_4^x f(t)dt$.

5p **c)** Să se determine $a>4$ astfel încât aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=4$ și $x=a$ să fie egală cu $\ln 4$.

Varianta 23

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\sin 120^\circ$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+5$ şi dreapta de ecuație $y=-4$. Să se determine numărul punctelor de intersecție ale dreptei cu graficul funcției f.

5p **3.** Să se determine soluțiile reale ale inecuației $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)\geq 0$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca o submulțime a mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$ să aibă un număr impar de elemente.

5p **5.** În reperul cartezian $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ se consideră vectorii $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}-\vec{j}$ şi $\overrightarrow{OB}=\vec{i}+2\vec{j}$. Să se determine vectorul de poziție al mijlocului segmentului AB.

5p **6.** Să se determine numărul întreg x care verifică inegalitățile $3\leq\frac{2x-1}{2}\leq 4$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(7,4)$, $B(a,a)$ şi $C(3,-2)$ unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine a real astfel încât aria triunghiului ABC să fie egală cu 15.

5p **b)** Pentru $a=-2$ să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele B şi C.

5p **c)** Să se determine numărul real a pentru care orice punct $M(x,-2)$, cu $x\in\mathbb{R}$ este coliniar cu punctele B şi C.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+(1-2a)X^2-2X-2$ având coeficienții reali şi rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=-2$.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$, astfel încât polinomul să fie divizibil cu $X-\sqrt{2}$.

5p **c)** Pentru $a=1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f_0,f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin $f_0(x)=\left(x^2+x\right)e^x$ şi $f_n(x)=f_{n-1}'(x)$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_0(x)-f_0(0)}{x}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $f_n(x)=\left(x^2+(2n+1)x+n^2\right)e^x$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi pentru orice $x\in\mathbb{R}$, utilizând metoda inducției matematice.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{f_3'(x)}{f_3(x)}-1\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de forma $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

5p **a)** Să se rezolve ecuația $\int_0^x\frac{t^2+1}{e^t}f(t)dt=2$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}\int_0^x f(t)dt$.

5p **c)** Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $[0,+\infty)$ şi descrescătoare pe $(-\infty,0]$.

Varianta 24

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine primul termen şi raţia unei progresii aritmetice, ştiind că al şaptelea termen este 19 şi al treilea termen este 7.

5p **2.** Să se demonstreze că ecuaţia $x^2-2x\cos 1^\circ+1=0$ nu admite soluţii reale.

5p **3.** Să se calculeze probabilitatea ca alegând un termen al dezvoltării $\left(2+\sqrt{3}\right)^8$ acesta să fie raţional.

5p **4.** Să se ordoneze crescător numerele $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$, 64 şi $\sqrt[3]{128}$.

5p **5.** Fie ABC un triunghi echilateral înscris într-un cerc de centru O. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AO}$.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că $AB=\sqrt{3}$, $AC=3$ şi $m\left(\widehat{A}\right)=120^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x-2y+3z=-3 \\ 2x+y+z=4 \\ mx-y+4z=1 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât soluţia sistemului să fie $(2,1,-1)$.

5p **b)** Să se rezolve ecuaţia $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ m & -1 & 4 \end{vmatrix}=m^2-3m$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Pentru $m=-5$ să se rezolve sistemul de ecuaţii.

2. Se consideră polinoamele $f=mX^3-(13+6i)X^2+(6+13i)X-mi$ şi $g=6X^2-13X+6$, $f,\ g\in\mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{C}$ astfel încât polinomul f să admită rădăcina $x_1=i$.

5p **b)** Pentru $m=6$ să se demonstreze că polinomul g divide polinomul f.

5p **c)** Pentru $m=6$ să se determine rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\frac{x^4}{4}-\ln x$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem ale funcţiei f.

5p **c)** Să se demonstreze că $\ln\sqrt{x}\le\frac{x^2-1}{4}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\ge 1}$ definit prin $I_n=\int_0^1 x^n e^x dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se arate că $(n+1)I_n+I_{n+1}=e$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se demonstreze că $I_n\le e-1$ pentru orice $n\ge 1$.

Varianta 25

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\lg\left(\sqrt[3]{\sqrt{10}}\cdot\sqrt{10}\right)$.

5p **2.** În reperul cartezian $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ se consideră punctele $A(-1,3), B(-2,0)$ şi $C(0,3)$. Să se determine vectorul de poziție al centrului de greutate al triunghiului ABC.

5p **3.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\sqrt{7-x}=x-1$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca alegând un termen al dezvoltării $\left(1+i\sqrt{3}\right)^6$ acesta să fie real.

5p **5.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale pozitive inecuația $x+\frac{1}{x}\le 2$.

5p **6.** Să se demonstreze că în orice triunghi dreptunghic ABC de arie S şi ipotenuză egală cu a este adevărată identitatea $a^2\sin B\sin C=2S$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+az=1 \\ x+4y+a^2z=1 \end{cases}$ şi matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A(4))$.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$ să se rezolve sistemul.

2. Fie polinomul $f_a=X^3+aX^2+(a-1)X-2$ având coeficienții reali.

5p **a)** Să se determine valoarile reale ale lui a astfel încât $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile complexe ale lui f_a.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f_0(x)+f_1(x)+f_2(x)=0$.

5p **c)** Să se demonstreze că ecuația $f_1(f_1(x))=0$ nu are soluții raționale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=e^x-x$.

5p **a)** Să se scrie ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **b)** Să se demonstreze că $f(x)\ge 1$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\frac{e^{n+1}-1}{e-1}\ge\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$ (folosind eventual punctul **b**).

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de forma $f(x)=x^3+mx^2+nx+p$ unde $m,n,p\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $m=0,n=-3,p=2$, să se calculeze $\int_2^3\frac{f(x)}{f'(x)}dx$.

5p **b)** Să se determine $m,n,p\in\mathbb{R}$ ştiind că $f'(-1)=f'(1)=0$ şi că $\int_{-1}^{1}f(x)dx=4$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4}\int_0^x f(t)dt$.

Varianta 26

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_3 = 5$ şi $a_6 = 11$. Să se calculeze a_9.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2 + x$. Să se calculeze $f(1) + f(2) + ... + f(20)$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $4^{x+2} = 2^{x^2+5}$.

5p **4.** Să se rezolve ecuația $C_{n+2}^{n+1} = 2, n \in \mathbb{N}$.

5p **5.** Să se determine numărul real m pentru care vectorii $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ şi $\vec{w} = -\vec{i} + m\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Să se calculeze $\cos 0° + \cos 1° + \cos 2° + ... + \cos 180°$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se calculeze A^2, unde $A^2 = A \cdot A$.

5p **b)** Să se verifice că $A^2 = aI_2 + bA$, unde $A^2 = A \cdot A$.

5p **c)** Dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ cu $AX = XA$, să se arate că există $m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $X = mI_2 + nA$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 - X - 1$, unde $a \in \mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se determine a ştiind că $x = 1$ este rădăcină a polinomului f.

5p **b)** Pentru $a = 1$ să se determine rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ ale polinomului f.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x) = e^x - x - 1$.

5p **a)** Să se calculeze derivata funcției f.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Să se arate că $e^{2008} - 1 \geq 1004 \cdot 2009 \cdot (e - 1)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x) = xe^x$.

5p **a)** Să se determine $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx$.

5p **b)** Să se arate că $\int_0^1 f''(x)\,dx = 2e - 1$, unde f'' este derivata a doua a funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x}\,dx$.

Varianta 27

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul elementelor mulțimii $A=\{x\in\mathbb{N}\mid |2x-1|\le 1\}$.

5p **2.** Se consideră ecuația $x^2+4x+5=0$ cu soluțiile x_1 și x_2. Să se calculeze $x_1^2+x_2^2$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\sqrt{x^2-3}=1$.

5p **4.** Să se calculeze $C_4^0-C_4^1+C_4^2-C_4^3+C_4^4$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(5,6)$ și $C(-1,1)$. Să se determine ecuația medianei duse din vârful C în triunghiul ABC.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului MNP dacă $MN=6$, $NP=4$ și $m(\sphericalangle MNP)=30^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se verifice că $AB-2B=O_2$.

5p **c)** Să se determine matricele $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică egalitatea $AXB=O_2$.

2. Se consideră mulțimea $H=\left\{a+bX+cX^2 \mid a,b,c\in\mathbb{Z}_2\right\}$ și polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_2[X]$, $f=X^2+\hat{1}$ și $g=X+\hat{1}$.

5p **a)** Să se verifice că $g^2=f$.

5p **b)** Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $f+g$ la polinomul f.

5p **c)** Să se determine numărul elementelor mulțimii H.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(1)+f(e)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este crescătoare pe intervalul $(0,e]$.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ dată prin $g(x)=f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{1004}+2008^x$.

5p **a)** Să se determine $\int f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă a funcției f este o funcție crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1 xf\left(x^2\right)dx$.

Varianta 28

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine partea reală a numărului complex $z=\dfrac{2-i}{1+i}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+...+f(30)$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\log_2(2x+5)=\log_2(x^2+3x+3)$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca alegând unul dintre numerele C_4^2, C_5^2 și C_4^3 acesta să fie divizibil cu 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(1,5)$ și $C(4,2)$. Să se calculeze distanța de la punctul A la dreapta BC.

5p **6.** Se consideră vectorii $\vec{v}=4\vec{i}-\vec{j}$ și $\vec{w}=2\vec{i}+3\vec{j}$. Să se determine un vector coliniar cu $2\vec{v}+\vec{w}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $M=\left\{aI_2+bV \,\middle|\, a,b\in\mathbb{R}\right\}$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $V=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că $I_2\in M$.

5p **b)** Să se determine matricele inversabile din M în raport cu operația de înmulțire din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Dacă $A,B\in M$ să se arate că $AB\in M$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{C}$ se consideră legea de compoziție $z_1*z_2=z_1z_2-i(z_1+z_2)+i-1$.

5p **a)** Să se demonstreze că $z_1*z_2=(z_1-i)(z_2-i)+i$, oricare ar fi $z_1,z_2\in\mathbb{C}$.

5p **b)** Să se arate că legea de compoziție „$*$” admite elementul neutru $e=i+1$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{C}$ ecuația $z*z=z$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e}\cdot e^x-1, & x\le 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$.

5p **a)** Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=1$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se arate că funcția f este concavă pe $(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ date prin $f(x)=2x+\dfrac{1}{x^2+1}$ și $g(x)=x^2+\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția g este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 f(x)\cdot e^{g(x)}\,dx=e^{1+\frac{\pi}{4}}-1$.

Varianta 29

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numerele reale a şi b pentru care $\frac{1+i}{2-i}=a+bi$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$ cu inversa $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Să se calculeze $g(2)+g(-1)$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\log_3(x^2-1)=1$.

5p **4.** Să se calculeze $C_5^2-A_4^2+6$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,-1)$ şi $B(1,1)$. Să se determine numerele reale m şi n pentru care punctele A şi B se află pe dreapta de ecuație $x+my+n=0$.

5p **6.** Să se calculeze $\sin(-10^\circ)\cdot\sin(-9^\circ)\cdot\ldots\cdot\sin 9^\circ\cdot\sin 10^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ notăm cu A^t transpusa matricei A.

5p **a)** Să se calculeze $I_2+I_2^t$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se demonstreze că pentru orice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $m\in\mathbb{R}$ avem $(mA)^t=mA^t$.

5p **c)** Să se determine matricele $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A+A^t=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{C}$ se consideră legea de compoziție $z_1*z_2=(z_1-i)(z_2-i)+i$.

5p **a)** Să se calculeze $(1-i)*(1+i)$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea de compoziție „$*$”este asociativă.

5p **c)** Utilizând metoda inducției matematice să se demonstreze că $\underbrace{z*z*\ldots*z}_{\text{de } n \text{ ori}}=(z-i)^n+i$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$.

5p **a)** Să se arate că $f(1)-f'(1)=1$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem ale funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că pentru orice număr natural nenul n are loc inegalitatea $n(n-1)\geq 2\ln(n!)$.

2. Se consideră integralele $I=\int_0^1\frac{e^x}{x+1}dx$ şi $J=\int_0^1\frac{xe^x}{x+1}dx$.

5p **a)** Să se verifice că $I+J=e-1$.

5p **b)** Utilizând inegalitatea $e^x\geq x+1$, adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$, să se arate că $J\geq\frac{1}{2}$.

5p **c)** Folosind metoda integrării prin părți să se demonstreze că $I=\frac{e-2}{2}+\int_0^1\frac{e^x}{(x+1)^2}dx$.

Varianta 30

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze suma $i+i^2+i^3+...+i^{2008}$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ cu inversa $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Să se calculeze $g(5)$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\sqrt{2x+3}=x$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$, acesta să verifice inegalitatea $\log_2 x\le 1$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1:-2x-my+3=0$ și $d_2:mx+y-5=0$. Să se determine numerele reale m pentru care dreptele d_1 și d_2 sunt paralele.

5p **6.** Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}x+ay+a^2z=a\\x+by+b^2z=b\\x+cy+c^2z=c\end{cases}$, unde a,b,c sunt numere reale, distincte două câte două.

5p **a)** Să se rezolve sistemul pentru $a=0$, $b=1$ și $c=2$.

5p **b)** Să se verifice că $\det A=(a-b)(b-c)(c-a)$, unde A este matricea asociată sistemului.

5p **c)** Să se demonstreze că soluția sistemului nu depinde de numerele reale a, b și c.

2. Se consideră matricea $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix}2a&-a\\2a&-a\end{pmatrix}\middle|\ a\in\mathbb{R}\right\}$. Pentru $A\in M$ se notează $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ n\ ori}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că dacă $A,B\in M$, atunci $AB\in M$.

5p **b)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $A^n=a^{n-1}\cdot A$, oricare ar fi $A\in M$ și $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se rezolve în M ecuația $A+A^2+\ldots+A^{2008}=\begin{pmatrix}2^{2010}-4&2-2^{2009}\\2^{2010}-4&2-2^{2009}\end{pmatrix}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+e^x$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $f'(x)-f''(x)+f(x)=e^x+3$.

2. Pentru orice număr natural n se consideră integralele $I_n=\int_0^1 x(1+x)^n\,dx$.

5p **a)** Să se verifice că $I_0+I_1=\frac{4}{3}$.

5p **b)** Utilizând faptul că $(1+x)^n\le(1+x)^{n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$ și $x\in[0,1]$, să se arate că $I_{2008}\ge I_{2007}$.

5p **c)** Folosind eventual identitatea $x(1+x)^n=(1+x)^{n+1}-(1+x)^n$, adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}$ și $x\in\mathbb{R}$, să se arate că $I_n=\dfrac{n\cdot 2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$.

Varianta 31

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1=1$ şi $a_5=13$. Să se calculeze a_{2008}.

5p **2.** Se consideră ecuația $x^2+mx+2=0$ cu soluțiile x_1 şi x_2. Să se determine valorile reale ale lui m pentru care $x_1^2+x_2^2=5$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $2^{x^2-x}=4$.

5p **4.** Să se determine al treilea termen al dezvoltării binomului $(2x-1)^8$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-1)$, $B(2,3)$ şi $C(3,1)$. Să se determine distanța de la punctul A la dreapta BC.

5p **6.** Să se determine numărul real m astfel încât vectorii $\vec{v}=(m+1)\vec{i}+m\vec{j}$ şi $\vec{w}=2\vec{i}+3\vec{j}$ să fie coliniari.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $M=\left\{A(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \middle|\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$ şi matricea $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det A(1,1)$.

5p **b)** Să se demonstreze că dacă $A,B\in M$ atunci $A+B\in M$.

5p **c)** Să se arate că $\det\left(I_2-A(0,b)\right)\neq 0$, oricare ar fi $b\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră inelul polinoamelor $\mathbb{Z}_3[X]$.

5p **a)** Pentru $g\in\mathbb{Z}_3[X]$, $g=\left(X-\hat{1}\right)^2\left(X-\hat{2}\right)$, să se calculeze $g\left(\hat{0}\right)+g\left(\hat{1}\right)+g\left(\hat{2}\right)$.

5p **b)** Dacă $f\in\mathbb{Z}_3[X]$, $f=X^3+\hat{2}X$, să se arate că $f(x)=\hat{0}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}_3$.

5p **c)** Să se determine toate polinoamele $h\in\mathbb{Z}_3[X]$, având gradul egal cu 3, pentru care $h\left(\hat{0}\right)=h\left(\hat{1}\right)=h\left(\hat{2}\right)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\ln x$.

5p **a)** Să se arate că $f'(x)=x(2\ln x+1)$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se studieze existența asimptotei verticale la graficul funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x)\geq -\frac{1}{2e}$, pentru orice $x>0$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=1+\ln x$ şi $g(x)=x\ln x$.

5p **a)** Să se arate că g este o primitivă a funcției f, care se anulează în $x=1$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^e f(x)\cdot g(x)\,dx$.

5p **c)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=1$ şi $x=e$.

Varianta 32

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numerele reale a şi b pentru care $\frac{2-3i}{3+2i}=a+bi$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$. Să se calculeze $f(2)+f\left(2^2\right)+\ldots+f\left(2^7\right)$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\sqrt{x+1}=x-1$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element n al mulțimii $\{1,2,3,4\}$, acesta să verifice inegalitatea $n!\geq n^2$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1:2x-y-2=0$ şi $d_2:x+3y-8=0$. Să se calculeze distanța de la punctul $O(0,0)$ la punctul de intersecție a celor 2 drepte.

5p **6.** Să se calculeze $\frac{\cos 0^\circ+\cos 30^\circ+\cos 60^\circ+\cos 90^\circ}{\cos 120^\circ+\cos 150^\circ+\cos 180^\circ}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Notăm $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ n\ ori}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se verifice că $A^2-3A=O_2$.

5p **b)** Utilizând metoda inducției matematice să se arate că $A^n=3^{n-1}A$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Dacă $B=I_2+A+A^2+\ldots+A^n$, să se arate că $\det B=\frac{3^{n+1}-1}{2}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f=4X^4+4mX^3+\left(m^2+7\right)X+4mX+4$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că $x=1$ este rădăcină a polinomului f.

5p **b)** Să se demonstreze că $f(x)=x^2\left[4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4m\left(x+\frac{1}{x}\right)+m^2-1\right]$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}^*$ şi $m\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Pentru $m=-5$ să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $f(x)=0$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{1}{e^x}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(0)+f'(0)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este concavă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că panta tangentei în orice punct la graficul funcției f este mai mare decât 1.

2. Se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ definite prin $f_n(x)=1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

5p **b)** Să se determine volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției f_1.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 (x+1)f_{2008}(x)\,dx=\frac{2011}{2010}$.

Varianta 33

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_2 = 4$ şi $a_3 = 6$. Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai progresiei.

5p **2.** Să se determine funcția de gradul al doilea al cărei grafic trece prin punctele $A(0,1)$, $B(1,3)$ şi $C(-1,1)$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $3^{2x-1} = 3^{5-x}$.

5p **4.** Să se calculeze $P_4 - P_3 + A_5^2$.

5p **5.** Se consideră punctul $A(2,3)$. Să se determine numărul real m pentru care punctul A se află pe dreapta $d: 2x - y + m = 0$.

5p **6.** În triunghiul MNP se cunosc $MN = 4$, $NP = 6$ şi $m(\sphericalangle MNP) = 45^\circ$. Să se calculeze aria triunghiului MNP.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c \in \mathbb{Z} \right\}$.

5p **a)** Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, să se verifice că $AB \neq BA$.

5p **b)** Să se demonstreze că dacă $A, B \in M$, atunci $AB \in M$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $X \in M$ şi $AX = XA$ pentru orice $A \in M$, atunci există $p \in \mathbb{Z}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f = \left(X^2 - 3X + 1\right)^2 - a^2$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Dacă $a = 0$ să se determine rădăcinile polinomului f.

5p **b)** Să se verifice că $f = \left(X^2 - 3X + 1 + a\right)\left(X^2 - 3X + 1 - a\right)$.

5p **c)** Să se determine valorile lui a pentru care polinomul f are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \dfrac{2e^x}{x + e^x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x) = \dfrac{2e^x(1-x)}{\left(x + e^x\right)^2}$, pentru orice $x \in [0,+\infty)$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se arate că $-1 \leq f(x) \leq \dfrac{1-e}{1+e}$, oricare ar fi $x \geq 0$.

2. Pentru orice număr natural nenul n se consideră integralele $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Utilizând eventual inegalitatea $\dfrac{x^n}{2} \leq \dfrac{x^n}{x+1} \leq x^n$, adevărată pentru orice $x \in [0,1]$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, să se demonstreze că $\dfrac{1}{2} \leq 2009 \cdot I_{2008} \leq 1$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se rezolve ecuația $z^2+2iz+3=0$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$. Să se calculeze $f(0)+f(1)+f(2)+...+f(10)$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\log_2(x^2-4)=\log_2(x^2-3x+2)$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca alegând unul din numerele P_3, A_3^1 și C_4^3, acesta să fie divizibil cu 3.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{v}=3\vec{i}+4\vec{j}$ și $\vec{w}=-\vec{i}+m\vec{j}$. Să se determine numărul real m pentru care avem relația $\vec{v}+\vec{w}=2\vec{i}+\vec{j}$.

5p **6.** Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{6}-\cos^2\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix}a & c & e\\ b & d & f\end{pmatrix}\middle|\, a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}^*\right\}$ și matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 6 & 4\end{pmatrix}$. Notăm cu X^t transpusa matricei X.

5p **a)** Să se calculeze $det\left(A^t\cdot A\right)$.

5p **b)** Să se demonstreze că, pentru orice matrice $X=\begin{pmatrix}a & c & e\\ b & d & f\end{pmatrix}$ din M, are loc egalitatea $det\left(X\cdot X^t\right)=\begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a & e\\ b & f\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}c & e\\ d & f\end{vmatrix}^2$.

5p **c)** Să se demonstreze că, pentru orice matrice $X=\begin{pmatrix}a & c & e\\ b & d & f\end{pmatrix}$ din M cu $det\left(X\cdot X^t\right)=0$, are loc relația $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$.

2. Se consideră legea de compoziție pe $\mathbb{Z}$ definită prin $x\circ y=xy-x-y+2$.

5p **a)** Să se arate că legea "$\circ$" este asociativă.

5p **b)** Să se arate că $x\circ y\in(1,+\infty)$, oricare ar fi $x,y\in(1,+\infty)$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{Z}$ cu proprietatea că $x\circ a=a$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x\cdot\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Să se calculeze $f(0)+f(1)$.

5p **b)** Să se determine $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f' este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcțiile $f,\ g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ date prin $f(x)=x^2+x\ln x$ și $g(x)=2x+\ln x+1$.

5p **a)** Să se arate că f este o primitivă a funcției g.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^e f(x)g(x)\,dx$.

5p **c)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

Varianta 35

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră mulțimile $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-3x+2\le 0\}$ și $B=\{x\in\mathbb{R}\mid 3x-1\ge x-3\}$. Să se determine mulțimea $A\cap B$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+\ldots+f(10)$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $5^{x^2-x}=5^{5x-5}$.

5p **4.** După două scumpiri succesive cu 10%, respectiv 20% prețul unui produs este de 660 lei. Să se determine prețul inițial al produsului.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(1,2)$ și $C(-1,0)$. Să se calculeze aria triunghiului ABC.

5p **6.** În triunghiul MNP se cunosc $MN=3$, $MP=5$ și $m(\sphericalangle M)=60^\circ$. Să se calculeze lungimea laturii NP.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definită prin $f(A)=A+A^t$, unde A^t este transpusa matricei A.

5p **a)** Să se calculeze $f(I_2)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $(A+B)^t=A^t+B^t$, oricare ar fi $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se determine matricele $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $f(A)=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

2. Se consideră ecuația $x^4-ax^3-ax+1=0$ cu soluțiile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine a astfel încât $x_1+x_2+x_3+x_4=1$.

5p **b)** Să se rezolve ecuația pentru $a=1$.

5p **c)** Să se determine valorile întregi ale lui a pentru care ecuația admite cel puțin o soluție număr întreg.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să e demonstreze că pentru orice $x\in(0,2]$ este adevărată inegalitatea $\sqrt{x}\cdot f'(x)\le f(x)$.

2. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ date prin $f(x)=e^x+3x^2+2$ și $F(x)=e^x+x^3+2x-1$.

5p **a)** Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\cdot F(x)\,dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_0^1 \left(xf(x)+F(x)\right)dx=F(1)$.

Varianta 36

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numerele reale a şi b pentru care $(2-3i)\cdot(2+i)=a+bi$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5-x$. Să se calculeze $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(10)$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\log_3(2x^2-x-1)=\log_3(2x+1)$.

5p **4.** În dezvoltarea $(3x-1)^n$ suma coeficienților binomiali este 64. Să se determine termenul al patrulea al dezvoltării.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(m,5)$ şi $C(2,m)$. Să se determine numerele reale m pentru care punctele A, B şi C sunt coliniare.

5p **6.** Un triunghi dreptunghic are ipotenuza de lungime 6 şi măsura unui unghi de 30°. Să se calculeze aria triunghiului.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}\middle|\,a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ şi matricele $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că $B^2=3B$, unde $B^2=B\cdot B$.

5p **b)** Să se arate că $mI_3+nB\in G$, oricare ar fi $m,n\in\mathbb{Z}$.

5p **c)** Să se arate că dacă $A\in G$ şi $A^2=O_3$, atunci $A=O_3$, unde $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinoamele $f=X^4-6X^2+1\in\mathbb{R}[X]$ şi $g=X^4-\hat{6}X^2+\hat{1}\in\mathbb{Z}_7[X]$.

5p **a)** Să se demonstreze că f nu are rădăcini întregi.

5p **b)** Să se descompună f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

5p **c)** Să se descompună g în produs de factori ireductibili în $\mathbb{Z}_7[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\left(x^2-3x-3\right)e^x$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)-f(x)=(2x-3)e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se arate că tangenta la graficul funcției f dusă în punctul $x_0=-2$ este paralelă cu axa Ox.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată prin $f(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ e^x+1, & x\geq 0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f admite primitive.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_0^1 xf\left(x^2\right)dx=\frac{e}{2}$.

Varianta 37

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze numărul complex i^{2008}, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2-x$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+\ldots+f(20)$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\sqrt{x^2-x-2}=x-2$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $\{3,4,5,6\}$, acesta să verifice inegalitatea $C_n^2\geq 10$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}$ și $\vec{w}=m\vec{i}+3\vec{j}$. Să se determine numărul real m pentru care vectorii $\vec{v}+\vec{w}$ și $\vec{v}-\vec{w}$ sunt coliniari.

5p **6.** Să se calculeze $\cos^2\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $F=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine numerele a,b și c astfel încât $A+F=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&2&5\\0&0&2\end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se determine inversa matricei F.

5p **c)** Utilizând metoda inducției matematice să se demonstreze că $F^n=\begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, unde $F^n=\underbrace{F\cdot F\cdot\ldots\cdot F}_{de\ n\ ori}$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x*y=2xy-x-y+1$.

5p **a)** Să se arate că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **b)** Să se arate că $x*y=xy+(1-x)(1-y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x*(1-x)*x*(1-x)=0$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\frac{x-\ln x}{x+\ln x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f(1)+f(e)=\frac{2e}{1+e}$.

5p **b)** Să se arate că $f'(x)=\frac{2(\ln x-1)}{(x+\ln x)^2}$, oricare ar fi $x\in[1,+\infty)$.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției $g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $g(x)=\frac{f'(x)}{(f(x)+1)^2}$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=\ln(x^2+1)$ și $g(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.

5p **a)** Să se arate că $\int_0^1 f'(x)\,dx=\ln 2$.

5p **b)** Să se demonstreze că orice primitivă a funcției g diferă de funcția f printr-o constantă.

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^2 \frac{g(x)}{f^2(x)}\,dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ în care $b_2 = 6$ şi $b_3 = 18$. Să se calculeze b_5.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+2$. Să se determine numerele reale m pentru care minimul funcției f este egal cu $-\frac{1}{4}$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $3^{2x-5}=3^{x^2-8}$.

5p **4.** Să se rezolve ecuația $C_x^2 = 21$, $x\in\mathbb{N}$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{v}=(m+1)\vec{i}+(m-3)\vec{j}$ şi $\vec{w}=3\vec{i}+\vec{j}$. Să se determine numărul real m pentru care vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{w}$ sunt coliniari.

5p **6.** În triunghiul ABC se cunosc $AB=AC=6$ şi $BC=6\sqrt{3}$. Să se calculeze $\cos B$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+3y+2z=b \\ x-2y+az=5 \\ x+y+4z=4 \end{cases}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.

5p **b)** Pentru $a=-1$ şi $b=2$ să se rezolve sistemul.

5p **c)** Să se determine numărul real b, dacă (x_0,y_0,z_0) este soluție a sistemului cu $x_0+y_0+z_0=4$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ definită prin $f(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & 2x^2+2x \\ 0 & 1 & 4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(0)+f(1)$.

5p **b)** Să se arate că $f(x)\cdot f(-x)=I_3$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$, unde $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(0)+f'(0)$.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Ştiind că $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ este funcția definită prin $g(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$, să se determine $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)+g\left(x^2\right)+g\left(x^3\right)+\ldots+g\left(x^{2008}\right)+x^{2010}}{x^{2009}}$.

2. Se consideră integralele $I_n=\int_e^{e^2} x\ln^n x\,dx$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se calculeze I_0.

5p **b)** Să se arate că $I_n\leq I_{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

5p **c)** Utilizând metoda integrării prin părți să se demonstreze că are loc relația $I_n=\frac{e^2\left(e^2\cdot 2^n-1\right)}{2}-\frac{n}{2}I_{n-1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Varianta 39

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine partea reală a numărului complex $z=\dfrac{3+i}{2-i}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-2x$. Să se calculeze $f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(10)$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\sqrt{5-x^2}=2$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{0,1,2,3,4\}$. Să se determine câte numere formate din 2 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii A.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$, $B(1,1)$, $C(3,-1)$. Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului ABC.

5p **6.** Să se calculeze aria unui triunghi dreptunghic care are un unghi de măsură 60° şi ipotenuza de lungime 8.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\middle|\, a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ şi matricea $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $I_2\in M$.

5p **b)** Dacă $A,B\in M$ să se arate că $A+B\in M$.

5p **c)** Să se demonstreze că $det(AB-BA)\geq 0$, oricare ar fi $A,B\in M$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x*y=-xy+2x+2y-2$.

5p **a)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $(1-x)*(1+x)=2$.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*a=a*x=a$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Ştiind că legea „$*$” este asociativă, să se calculeze $\dfrac{2008}{1}*\dfrac{2008}{2}*\ldots*\dfrac{2008}{2008}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-x+1$.

5p **a)** Să se calculeze $f(1)+f'(e)$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem ale funcției f.

5p **c)** Să se rezolve în $(0,+\infty)$ ecuația $f\left(x^{2008}\right)+f\left(\dfrac{1}{x^{2008}}\right)=0$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată prin $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\geq 1 \\ -x+1, & x<1 \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că $\int_0^2 f(x)\,dx=1$.

5p **b)** Să se determine $a\in(0,1)$ astfel încât $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=1$.

5p **c)** Utilizând faptul că $e^x\geq 1$ pentru orice $x\geq 0$ să se calculeze $\int_0^1 xf\left(e^x\right)dx$.

Varianta 40

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numerele reale a şi b pentru care $(7-i)\cdot(2+i)=a+bi$.

5p **2.** Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+y-2=0 \\ x^2-2x+y=0 \end{cases}$.

5p **3.** Să se rezolve ecuaţia $\log_5(9-x^2)=1$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element n al mulţimii $A=\{1,2,3,4\}$, acesta să verifice inegalitatea $n!<5$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=-2\vec{i}-n\vec{j}$ şi $\vec{v}=(m-1)\vec{i}+\vec{j}$. Să se determine numerele reale m şi n astfel încât $\overrightarrow{2u}+\vec{v}=-5\vec{i}+\vec{j}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC în care $AB=8, AC=4$ şi $m(\sphericalangle A)=45°$. Să se calculeze aria triunghiului.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+4y+4z=15 \\ 3x+(a+4)y+5z=22 \\ 3x+2y+(3-a)z=16 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=1$ să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.

5p **b)** Pentru $a=0$ să se calculeze inversa matricei asociate sistemului.

5p **c)** Să se determine soluţia (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care $y_0+z_0=3$.

2. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se consideră legile de compoziţie $x\perp y=x+y+1$, $x\circ y=ax+by-1$, cu $a,b\in\mathbb{Z}$ şi funcţia $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ definită prin $f(x)=x+2$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x\perp(-1)=(-1)\perp x=x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}$.

5p **b)** Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}$ pentru care legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă.

5p **c)** Dacă $a=b=1$ să se arate că funcţia f este morfism între grupurile $(\mathbb{Z},\perp)$ şi $(\mathbb{Z},\circ)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2008}-\dfrac{1}{x^{2008}}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{2008\left(x^{4016}+1\right)}{x^{2009}}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$.

5p **c)** Să se rezolve în intervalul $(0,+\infty)$ inecuaţia $f(x)\le f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2. Se consideră funcţiile $f,F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$ şi $F(x)=x-\ln x$.

5p **a)** Să se arate că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^2 F(x)\cdot f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei F, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e$.

Varianta 41

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numerele reale a şi b pentru care $(2-3i)\cdot(4+i)=a+bi$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2008x-2007$ cu inversa $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Să se calculeze $g(2009)$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $9^x-4\cdot 3^x+3=0$.

5p **4.** Să se calculeze al patrulea termen al dezvoltării binomului $(2-x)^6$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,2)$ şi $N(2,1)$. Să se determine ecuația dreptei MN.

5p **6.** Să se calculeze $tg^2 30^\circ + ctg^2 45^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=3 \\ x-y+2z=a \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.

5p **b)** Pentru $a=0$ să se rezolve sistemul.

5p **c)** Să se determine valorile lui $a\in\mathbb{R}$ astfel încât soluția sistemului să verifice relația $x=y+z$.

2. În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi submulțimea $G=\left\{X^n \,\middle|\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$, unde $X^n=\underbrace{X\cdot X\cdot\ldots\cdot X}_{de\ n\ ori}$.

5p **a)** Să se verifice că $X^3=I_3$.

5p **b)** Să se determine numărul de elemente ale mulțimii G.

5p **c)** Să se calculeze $\det\left(I_3+X+X^2+X^3+\ldots+X^{2009}\right)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

5p **a)** Să se verifice că $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=-1$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x)+f\left(x^{2008}\right)\geq 4$, oricare ar fi $x>1$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{x}$ şi $g(x)=\dfrac{1}{4}\cdot\ln x$.

5p **a)** Să se arate că $\int_1^4 f(x)dx=\ln 4+2$.

5p **b)** Utilizând metoda integrării prin părți să se demonstreze că $\int_1^4 g(x)dx=\ln 4-\dfrac{3}{4}$.

5p **c)** Să se arate că există un punct $x_0\in(1,4)$ astfel încât $g(x_0)<f(x_0)$.

Varianta 42

KRtm

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_2=5$ şi $a_5=2$. Să se calculeze a_7.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3$. Să se rezolve inecuația $f(x)\leq 12$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $4^x-6\cdot 2^x+8=0$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{0,1,2,3,4\}$. Să se determine câte numere formate din 3 cifre distincte se pot forma cu elementele din mulțimea A.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-1)$, $B(1,1)$ şi $C(0,-2)$. Să se calculeze distanța de la punctul A la dreapta BC.

5p **6.** Să se calculeze $\cos 0^\circ+\cos 10^\circ+\cos 20^\circ+\ldots+\cos 180^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că $A^2=2I_2$, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\det(A-xI_2)=0$.

5p **c)** Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $AX=XA$.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{a+b\sqrt{2}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-2b^2=1\right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $3+2\sqrt{2}\in G$.

5p **b)** Să se demonstreze că operația de înmulțire a numerelor reale este lege de compoziție internă pe G.

5p **c)** Să se arate că mulțimea G este infinită.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2008}+2008^x$.

5p **a)** Să se determine $f'(x)$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Utilizând faptul că $e^7<2008<e^8$ să se arate că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}$ aparține intervalului $(49,64)$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x\left(x^2+1\right)}$ şi $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $\int_1^e g(x)\,dx=1$.

5p **b)** Folosind identitatea $f(x)=g(x)-\dfrac{x}{x^2+1}$ adevărată pentru orice $x>0$, să se calculeze $\int_1^e f(x)\,dx$.

5p **c)** Utilizând inegalitatea $f(x)\leq\dfrac{1}{2x^2}$, adevărată pentru orice $x\in[1,e]$, să se arate că $\ln\dfrac{e^2+1}{2}\geq\dfrac{e+1}{e}$.

Varianta 43

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze partea reală a numărului complex $z=\frac{5}{2-i}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+5$. Să se calculeze $f(2)+f\left(2^2\right)+...+f\left(2^5\right)$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $2^{2x^2+3x-2}=8$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element n al mulțimii $\{2,3,4,5\}$, acesta să verifice inegalitatea $n^2+n>n!$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-1)$ și $B(-2,a)$, $a\in\mathbb{R}$. Să se determine numărul real a astfel încât dreapta AB să treacă prin punctul $O(0,0)$.

5p **6.** Să se calculeze $\cos x$, știind că $\sin x=\frac{3}{5}$ și $x\in\left(0^\circ,90^\circ\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & a & d\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}\middle|\,a,b.c.d\in\mathbb{R}\right\}$ și matricea $O_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $O_3\in M$.

5p **b)** Să se demonstreze că produsul a două matrice din M este o matrice din M.

5p **c)** Dacă $A\in M$ cu $\det A=0$, să se demonstreze că $A^3=O_3$, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-X^3+aX^2+bX+c$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=c=1$ și $b=-1$ să se determine câtul și restul împărțirii lui f la X^2+1.

5p **b)** Să se determine numerele a, b, c știind că restul împărțirii polinomului f la X^2+1 este X, iar restul împărțirii lui f la $X-1$ este -1.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $a\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$, atunci f are cel puțin o rădăcină în mulțimea $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **b)** Să se arate că $f'(x)=\frac{2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ avem $\frac{2}{3}\le f(x)+f\left(x^2\right)\le 4$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x-\frac{1}{x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^e f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Să se demonstreze că volumele corpurilor obținute prin rotația, în jurul axei Ox, a graficelor funcțiilor $g,h:[1,e]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ și $h(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ sunt egale.

Varianta 44

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_2 = 5$ şi $r = 3$. Să se calculeze a_8.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + 2008$ cu inversa $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Să se calculeze $g(2009)$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\log_5(2x+1) = 1$.

5p **4.** Să se calculeze numărul submulțimilor cu 2 elemente ale unei mulțimi care are 6 elemente.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u} = -6\vec{i} + 3\vec{j}$ şi $\vec{v} = m\vec{i} - \vec{j}$. Să se determine numărul real m pentru care vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari.

5p **6.** Să se calculeze expresia valoarea expresiei $E = \dfrac{\sin 15^\circ + \sin 45^\circ + \sin 75^\circ}{\sin 105^\circ + \sin 135^\circ + \sin 165^\circ}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi notăm cu A^t transpusa matricei A.

5p **a)** Să se calculeze $A \cdot A^t$.

5p **b)** Dacă suma elementelor matricei $A \cdot A^t$ este egală cu 0, să se demonstreze că $\det A = 0$.

5p **c)** Să se determine matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ştiind că $AX = X^t A$ oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + 2X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

5p **a)** Să se determine $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

5p **b)** Să se determine rădăcinile polinomului f dacă $a = -1$, $b = -2$ şi $c = 0$.

5p **c)** Dacă rădăcinile polinomului f sunt în progresie aritmetică, să se demonstreze că $b = a - 1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + e^x$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(0) = 1$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $f(-x) - f'(-x) \leq -1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$.

5p **a)** Să se verifice că $\int_0^1 f(x)\,dx = e - \dfrac{3}{2}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

5p **c)** Să se arate că dacă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, atunci $\int_e^{e^2} \dfrac{f(\ln x)}{x}\,dx = F(2) - F(1)$.

Varianta 45

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine forma algebrică a conjugatului numărului complex $z=\dfrac{7-i}{1+i}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-4$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+\ldots+f(10)$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\log_3(10-x)=2$.

5p **4.** Să se rezolve ecuația $A_n^2=12$, $n\in\mathbb{N}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(5,2)$ şi $C(3,-1)$. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

5p **6.** Să se determine numărul real m pentru care vectorii $\vec{u}=(m-1)\vec{i}+2\vec{j}$ şi $\vec{v}=3\vec{i}+6\vec{j}$ sunt coliniari.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Notăm $A^2=A\cdot A$.

5p **a)** Să se calculeze A^2.

5p **b)** Să se verifice că $A^2=(a+d)A-(ad-bc)I_2$.

5p **c)** Dacă $a+d\neq 0$ şi $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $A^2M=MA^2$, să se demonstreze că $AM=MA$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2+aX+b$ cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine x_1, x_2, x_3 dacă $a=1$ şi $b=0$.

5p **b)** Dacă $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2$, să se arate că $a=1$.

5p **c)** Să se determine numerele reale a şi b ştiind că $f=(X-x_1^2)(X-x_2^2)(X-x_3^2)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$ şi $g(x)=xe^x$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=g(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției g.

5p **c)** Dacă $I\subset\mathbb{R}$ este un interval, să se demonstreze că funcția g este crescătoare pe I dacă şi numai dacă funcția f este convexă pe I.

2. Se consideră funcțiile $f, g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ şi $g(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

5p **a)** Să se arate că $f'(x)=g(x)$ pentru orice $x\geq 1$.

5p **b)** Să se calculeze $\displaystyle\int_1^e f(x)\,g(x)\,dx$.

5p **c)** Să se rezolve în $[1,+\infty)$ ecuația $\displaystyle\int_1^a f(x)\,dx=2$.

Varianta 46

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ în care $b_1=1$ şi $b_2=3$. Să se calculeze b_4.

5p **2.** Se consideră ecuația $x^2-x+m=0$ cu soluțiile x_1 şi x_2. Să se determine numărul real m pentru care $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=1$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x-2}=0$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element n al mulțimii $\{1,2,3,4\}$ acesta să verifice inegalitatea $3^n>n^3$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,-1)$ şi $B(3,1)$. Să se determine coordonatele simetricului punctului A față de punctul B.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului MNP ştiind că $MN=10$, $NP=4$ şi $m(\sphericalangle MNP)=60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi mulțimea $G=\left\{M(x,y)\,\middle|\,M(x,y)=xI_2+yA,\ x,y\in\mathbb{R}\right\}$. Notăm $M^n=\underbrace{M\cdot M\cdot\ldots\cdot M}_{\text{de } n \text{ ori}}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se verifice $A^2=O_2$.

5p **b)** Să se determine matricele inversabile din G.

5p **c)** Utilizând metoda inducției matematice să se demonstreze că $M^n(x,1)=M\left(x^n,nx^{n-1}\right)$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

2. În mulțimea $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f=X^3+X^2+\frac{1}{3}X+p$, pentru care toate rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$ au aceeaşi parte reală.

5p **a)** Să se calculeze $x_1+x_2+x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.

5p **b)** Să se determine partea reală a rădăcinilor polinomului f.

5p **c)** Să se determine numărul real p şi să se rezolve ecuația $f(x)=0$ în mulțimea $\mathbb{C}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$ şi $g(x)=xe^x$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=g(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției g.

5p **c)** Dacă $I\subset\mathbb{R}$ este un interval, să se demonstreze că funcția g este crescătoare pe I dacă şi numai dacă funcția f este convexă pe I.

2. Se consideră funcțiile $f,\ g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ date de $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ şi $g(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

5p **a)** Să se arate că $f'(x)=g(x)$ pentru orice $x\geq 1$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^e f(x)\cdot g(x)\,dx$.

5p **c)** Să se rezolve în $[1,+\infty)$ ecuația $\int_1^a f(x)\,dx=2$.

Varianta 47

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1=7$ şi $a_7=37$. Să se calculeze suma primilor zece termeni ai progresiei.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=7-2x$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+...+f(20)$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $2^{\sqrt{x-1}}=4$.

5p **4.** Să se calculeze $C_7^5-C_6^5-C_6^4$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=m\vec{i}+5\vec{j}$ şi $\vec{v}=-\vec{i}+m\vec{j}$. Să se determine numărul real m pentru care $\vec{u}-2\vec{v}=4\vec{i}+\vec{j}$.

5p **6.** Să se calculeze aria unui triunghi echilateral care are lungimea înălțimii egală cu $3\sqrt{3}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine matricea A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se demonstreze că $A^3=4A^2-5A+2I_3$, unde $A^3=A^2\cdot A$.

5p **c)** Să se determine numerele reale m,n,p astfel încât $A^{-1}=mA^2+nA+pI_3$, unde A^{-1} este inversa matricei A.

2. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2\\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{2}\\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-2\end{cases}$.

5p **a)** Să se calculeze $x_1x_2x_3$.

5p **b)** Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$, dacă ecuația $x^3+ax^2+bx+c=0$ are soluțiile x_1,x_2,x_3.

5p **c)** Să se determine soluțiile sistemului.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2\ln x$.

5p **a)** Să se calculeze $f(1)-f'(e)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este descrescătoare pe $[1,2]$.

5p **c)** Folosind faptul că $1\leq x\leq x^2\leq 2$, oricare ar fi $x\in\left[1,\sqrt{2}\right]$, să se demonstreze inegalitatea $x^2-x\leq 2\ln x$, pentru orice $x\in\left[1,\sqrt{2}\right]$.

2. Se consideră integralele $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ şi $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$.

5p **a)** Să se arate că $I+J=\frac{\pi}{2}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $J=I=\frac{\pi}{4}$.

5p **c)** Utilizând inegalitatea $\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}\geq a+b$ adevărată pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$, să se arate că $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x+\cos x}dx\geq\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Varianta 48

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1=3$ şi $a_3=7$. Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai progresiei.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+1$. Să se determine numerele reale m pentru care punctul $A(m,-1)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\log_5(2x+3)=2$.

5p **4.** Să se calculeze numărul submulțimilor cu 3 elemente ale unei mulțimi cu 5 elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(1,2)$ şi $C(2,-1)$. Să se calculeze distanța de la punctul C la dreapta AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC în care $AB=8$, $AC=8$ şi $m(A)=30^\circ$. Să se calculeze aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $X=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Notăm $X^n=\underbrace{X\cdot X\cdot\ldots\cdot X}_{de\ n\ ori}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se demonstreze că matricea X este inversabilă.

5p **b)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $X^n=\begin{pmatrix}1&na&nb+\frac{n(n-1)}{2}ac\\0&1&nc\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se determine numărul real r astfel încât $X^3=3X^2+rX+I_3$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{C}$ se consideră legea de compoziție $z_1*z_2=z_1z_2+i(z_1+z_2)-1-i$.

5p **a)** Să se verifice că $z_1*z_2=(z_1+i)(z_2+i)-i$, oricare ar fi $z_1,z_2\in\mathbb{C}$.

5p **b)** Să se rezolve ecuația $\underbrace{z*z*\ldots*z}_{de\ n\ ori}=-i$, cu $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, ştiind că legea „$*$” este asociativă.

5p **c)** Să se demonstreze că $z_1*z_2\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$, oricare ar fi $z_1,z_2\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}$.

5p **a)** Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

5p **b)** Să se arate că $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

2. Se consideră integralele $I_n=\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^n(x^2+1)}dx$, unde $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se verifice că $I_0=\dfrac{\pi}{12}$.

5p **b)** Utilizând identitatea $\dfrac{1}{x(x^2+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}$ adevărată pentru orice $x\neq 0$, să se determine I_1.

5p **c)** Să se arate că $I_n+I_{n-2}=\dfrac{1}{n-1}\left(1-\dfrac{1}{(\sqrt{3})^{n-1}}\right)$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

Varianta 49

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze suma $1+11+21+31+...+111$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+4$. Să se determine valorile numărului real m pentru care punctul $A(m,4)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $2^{x^2+x+1}=8$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element n al mulțimii $\{1,2,3,4\}$ acesta să verifice inegalitatea $2^n<n!$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(m^2,m)$ şi dreapta de ecuație $d:x+y+m=0$. Să se determine valorile reale ale lui m pentru care punctul A se află pe dreapta d.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului MNP dacă $MN=NP=6$ şi $m(\sphericalangle MNP)=120^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele de forma $M_a=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(M_1+M_2)$.

5p **b)** Să se calculeze M_a^2, unde $M_a^2=M_a\cdot M_a$.

5p **c)** Să se determine matricele $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $M_aX=XM_a$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$.

5p **a)** Să se calculeze $x*0$ şi $x*(-x)$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea „$*$” este asociativă.

5p **c)** Dacă $x_0\in\mathbb{Q}$ şi $x_n=x_0*x_{n-1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, să se arate că $x_{511}\in\mathbb{Q}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)\ln x$.

5p **a)** Să se calculeze $f(2)+f(e)$.

5p **b)** Să se determine $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

5p **c)** Să se arate că funcția f' este crescătoare pe $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}+\ln x$ şi $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}+2}{2x}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este o primitivă a funcției g.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^4 f(x)\cdot g(x)\,dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_1^4 g(x)\cdot f''(x)\,dx=-1$, unde f'' este derivata a doua a funcției f.

Varianta 50

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine forma algebrică a conjugatului numărului complex $z=\dfrac{7+4i}{2-i}$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2-x$. Să se calculeze $f(g(2))-g(f(2))$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $3^{1-x}=9$.

5p **4.** Să se calculeze al patrulea termen al dezvoltării binomului $(3x-1)^6$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=-\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\vec{v}=m\vec{i}+\vec{j}$. Să se determine valorile parametrului real m pentru care $\vec{u}=3\vec{v}$.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul unui triunghi echilateral care are aria egală cu $\sqrt{3}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}\middle|\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ şi matricea $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $I_2\in M$.

5p **b)** Dacă $A,B\in M$ să se arate că $A+B\in M$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\det(AB-BA)\le 0$, oricare ar fi $A,B\in M$.

2. Se consideră ecuația $z^3+(1-4i)z^2-(4+4i)z+m=0$, unde $i^2=-1$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{C}$ pentru care $z=0$ este soluție a ecuației date.

5p **b)** Pentru $m=-4$ să se rezolve ecuația, ştiind că admite şi soluții reale.

5p **c)** Dacă $m=bi$ şi $b\in(-\infty,-1)$, să se demonstreze că ecuația dată nu are nicio soluție reală.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 1+\sqrt{x}, & x\ge 0 \\ e^x, & x<0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=0$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$ şi $g(x)=x$.

5p **a)** Să se verifice că $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx=e-1$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_0^1 f\left(x^n\right)\cdot g^{2n-1}(x)\,dx=\dfrac{e-1}{2n}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

Varianta 51

KRtm

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul real x ştiind că numerele $x+1$, $2x-3$ şi $x-3$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** După o reducere cu 10% un produs costă 99 lei. Să se determine preţul produsului înainte de reducere.

5p **3.** Să se determine lungimile laturilor triunghiului ABC ştiind că $m(\sphericalangle A)=90^\circ$, $m(\sphericalangle C)=45^\circ$ şi $BC\sqrt{2}-AB=10$.

5p **4.** Să se determine funcţia de gradul al II-lea al cărei grafic conţine punctele $A(1;3)$, $B(0;5)$ şi $C(-1;11)$.

5p **5.** Să se rezolve ecuaţia $3^x\cdot 2^x-3^x-2^x+1=0$.

5p **6.** Pe laturile AB şi BC ale triunghiului ABC se consideră punctele D, respectiv M astfel încât $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}$. Să se exprime vectorul $\overrightarrow{DM}$ în funcţie de $\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{BC}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $H(a)=\begin{pmatrix}1 & \ln a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$, unde $a>0$.

5p **a)** Să se arate că $H(a)\cdot H(b)=H(a\cdot b),\ \forall a,b>0$.

5p **b)** Să se calculeze inversa matricei $H(e)$, unde e este baza logaritmului natural.

5p **c)** Să se calculeze determinantul matricei $H(1)+H(2)+H(3)+\ldots+H(2008)$.

2. Se consideră mulţimea $G=(2,\infty)$ şi legea $x\circ y=xy-2(x+y)+6,\ \forall x,y\in G$.

5p **a)** Să se arate că $x\circ y=(x-2)(y-2)+2,\ \forall x,y\in G$.

5p **b)** Să se demonstreze că „$\circ$” este lege de compoziţie pe G.

5p **c)** Ştiind că legea „$\circ$” este asociativă, să se demonstreze utilizând metoda inducţiei matematice că:

$$\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de } n \text{ ori}}=(x-2)^n+2,\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2,\forall x\in G.$$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\leq 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$.

5p **a)** Să se studieze continuitatea funcţiei f în punctul $x_0=1$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

5p **c)** Să se determine soluţiile ecuaţiei $f'(x)+f'(\frac{x}{2})+f'(\frac{x}{3})+\ldots+f'(\frac{x}{10})=\frac{1}{10}$, unde $x\in(10,\infty)$.

2. Se consideră funcţiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^e+e\cdot x$ şi $F(x)=e^x+\frac{x^{e+1}}{e+1}+e\cdot\frac{x^2}{2}+1$.

5p **a)** Să se arate că funcţia F este o primitivă funcţiei f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeţei plane mărginite de graficul funcţiei $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\frac{f(x)-x^e-ex}{e^x+1}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

Varianta 52

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se stabilească semnul numărului $\log_2 3-1$.

5p **2.** Să se determine coordonatele punctului de intersecție a dreptelor de ecuații $2x+y-4=0$ și $x+y-3=0$.

5p **3.** Să se determine termenul al treilea al dezvoltării $\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)^{10}$, unde x și y sunt numere reale pozitive.

5p **4.** Să se calculeze lungimea laturii AC a triunghiului ABC știind că $BC=\sqrt{2}$, $m(\sphericalangle BAC)=30^\circ$ și $m(\sphericalangle ABC)=45^\circ$.

5p **5.** Să se determine valorile reale ale numărului m pentru care ecuația $m^2(x-1)=x-3m+2$ are o infinitate de soluții.

5p **6.** Să se rezolve ecuația $\sqrt[3]{x^3+4x^2+6x+3}=x+1$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$. Notăm $A^n=\underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ n\ ori}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se demonstreze că $A^2=3A$.

5p **b)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $A^n=3^{n-1}A,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se demonstreze că matricea $A+A^2+\ldots+A^{2007}-A^{2008}$ are toate elementele negative.

2. Se consideră mulțimea $G=(0,\infty)\setminus\{1\}$ și operația $x\circ y=x^{3\ln y},\ \forall x,y\in G$.

5p **a)** Să se determine mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $x\circ e=1$, unde e este baza logaritmului natural.

5p **b)** Să se demonstreze că operația „$\circ$” este lege de compoziție pe G.

5p **c)** Să se arate că operația „$\circ$” este asociativă pe mulțimea G.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}ax-6, & x<4\\ \sqrt{x}, & x\geq 4\end{cases}$, unde a este parametru real.

5p **a)** Să se determine valoarea reală a lui a, astfel încât funcția f să aibă limită în punctul $x_0=4$.

5p **b)** Pentru $a=2$ să se calculeze $f'(0)+f'(2)-6f'(9)$.

5p **c)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(9,3)$.

2. Pentru oricare $n\in\mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=1$ și $f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)\,dt$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se determine soluțiile ecuației $f_1(x)+f_2(x)=0$, unde $x\in[0,\infty)$.

5p **b)** Utilizând metoda inducției matematice să se demonstreze că $f_n(x)=\frac{x^n}{n!}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f_n este crescătoare pentru orice $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$.

Varianta 53

KRtm

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze numărul de termeni raționali ai dezvoltării $\left(2+\sqrt{3}\right)^{100}$.

5p **2.** Să se verifice egalitatea $\lg\frac{1}{2}+\lg\frac{2}{3}+...+\lg\frac{2007}{2008}=-\lg 2008$.

5p **3.** Să se calculeze cosinusul unghiului A, în triunghiul ABC, ştiind că $AB=3$, $AC=5$ şi $BC=6$.

5p **4.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $(m-3)x^2-(m-3)x+m-3>0$, pentru orice x real.

5p **5.** Într-un reper cartezian se consideră punctele $A(0;a)$, $B(-1;2)$ şi $C(4;5)$, unde a este un număr real. Să se determine valorile lui a pentru care triunghiul ABC este dreptunghic în A.

5p **6.** Să se rezolve ecuația $\left(\frac{4}{3}\right)^{1-x}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{x}}=\frac{9}{16}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ şi $A_n(n,n+2)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se scrie ecuația dreptei A_0A_1.

5p **b)** Să se arate că punctele A_0, A_1, A_n, $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ sunt coliniare.

5p **c)** Să se arate că aria triunghiului OA_nA_{n+1} nu depinde de numărul natural n.

2. În inelul $\mathbb{C}[X]$ se consideră polinomul $f=(X+i)^4+(X-i)^4$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(0)+f(i)$.

5p **b)** Considerând forma algebrică a polinomului $f=a_4X^4+a_3X^3+a_2X^2+a_1X+a_0$, să se determine coeficienții a_4, a_3 şi a_2.

5p **c)** Să se calculeze suma $S=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

SUBIECTUL III (30p)

5p **1. a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-2x^2+x}$.

5p **b)** Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-6x^2+18x+12$.

5p **c)** Să se determine semnul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(x^2-1\right)\ln x$

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leq 0\\ \frac{1}{x+1}-\sin x, & x>0\end{cases}$

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se determine numărul real negativ a astfel încât volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $h:[a,0]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)$ să fie egal cu $\frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine partea reală a numărului complex $\frac{1-3i}{2+i}$.

5p **2.** Să se determine inversa funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-3$.

5p **3.** Să se determine valorile reale ale parametrului m știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2+(m-1)x+3=0$ verifică egalitatea $x_1=3x_2$.

5p **4.** Să se determine lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic dacă raportul lor este $\frac{3}{4}$ și ipotenuza are lungimea 20.

5p **5.** Să se verifice egalitatea $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}=4C_{2n-1}^{n}-C_{2n+1}^{n}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **6.** Se consideră pătratul $ABCD$. Punctele M și N sunt, respectiv, mijloacele laturilor BC și DC. Să se exprime vectorul $\overrightarrow{BD}$ în funcție de $\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{AN}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}x-2y+3z=-3\\2x+y+z=4\\mx-y+4z=1\end{cases}$, unde m este un parametru real și A matricea sistemului.

5p **a)** Să se arate că pentru orice m real tripletul $(0,3,1)$ este soluție a sistemului.

5p **b)** Să se determine valorile parametrului real m pentru care sistemul admite soluție unică.

5p **c)** Pentru $m\neq 3$, să se rezolve sistemul.

2. Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x*y=2xy-6x-6y+21$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că $x*y=2(x-3)(y-3)+3$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $5^x*5^x=11$.

5p **c)** Știind că legea „$*$” este asociativă, să se demonstreze prin metoda inducției matematice că $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{de\ n\ ori}=2^{n-1}(x-3)^n+3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},n\geq 2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(e)+f'\left(\frac{1}{e}\right)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este convexă pe $(0,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)$.

2. Se consideră funcțiile $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=m^2x^2+mx+1$, unde $m\in\mathbb{R}^*$.

5p **a)** Să se demonstreze că primitivele funcțiilor f_m sunt funcții crescătoare, pentru orice $m\in\mathbb{R}^*$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 \left(f_1(x)-x^2-1\right)e^x\,dx$.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}^*$ pentru care aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f_m, axa Ox și dreptele $x=0$, $x=1$ are valoare minimă.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze numărul $\sin 60^\circ \cdot \cos 150^\circ + \cos 135^\circ + \sin 45^\circ$.

5p **2.** Să se determine $m \in \mathbb{R}^*$, ştiind că graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-x+1$ nu intersectează axa Ox.

5p **3.** Să se determine domeniul maxim de definiție $D \subset \mathbb{R}$ al funcției $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2-6}$.

5p **4.** Să se rezolve ecuația $C_{x+5}^{x} = 19C_{x+3}^{x}$, $x \in \mathbb{N}$.

5p **5.** Să se arate că valoarea expresiei $E(x)=x^3-3x+5$ pentru $x=\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$ este număr natural.

5p **6.** Să se determine valorile parametrului real a ştiind că punctul de intersecție a dreptelor de ecuații $x-y-5=0$ şi $2x-y-2=0$ aparține dreptei de ecuație $(1+2a)x-(1-a)y+2=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea matricelor pătratice $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

Notăm $A^n = \underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ n\ ori},\ n\in\mathbb{N}^*$

5p **a)** Să se arate că $A^2+A^3+A^4=3A$.

5p **b)** Să se determine matricele $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $X=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}$, astfel încât $\det(X+A)=2$.

5p **c)** Ştiind că $A^n=A,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, să se demonstreze că $A+2A^2+\ldots+nA^n=\frac{n(n+1)}{2}A,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+mX+1$, $m\in\mathbb{R}$ şi $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$ rădăcinile sale.

Definim $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$, pentru $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $S_3+S_2+mS_1+3=0$.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $S_3=-4$.

5p **c)** Să se arate că pentru orice $m\in\mathbb{Z}$ număr par polinomul f nu are rădăcini raționale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3^x+1, & x\le 1\\ ax+2, & x>1\end{cases}$.

5p **a)** Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ a funcției f.

5p **b)** Să se determine valoarea parametrului real a astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0=1$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left(f(x)-1\right)\cdot x\right)$.

2. Se consideră funcția $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

5p **a)** Să se determine funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ astfel încât funcția F să fie o primitivă pentru funcția f.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția F este descrescătoare pe $[0,+\infty)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\frac{1}{6}\le\int_0^1 F(x)\,dx\le\frac{1}{2}$.

Varianta 56

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $36^{\log_6 2}$ este natural.

5p **2.** Să se rezolve ecuația $\frac{(n+2)!}{n!}=56,\ n\in\mathbb{N}$.

5p **3.** Să se determine inversa funcției $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_5 x$.

5p **4.** Să se calculeze lungimile laturilor AB şi AC ale triunghiului ABC ştiind că $AB+AC=6+6\sqrt{2}$, $m(\sphericalangle C)=30^\circ$ şi că $m(\sphericalangle B)=45^\circ$.

5p **5.** Să se determine valorile reale ale lui m ştiind că soluțiile x_1 şi x_2 ale ecuației $x^2+(m-1)x+3=0$ verifică inegalitatea $x_1^2+x_2^2<10$.

5p **6.** Să se determine distanța dintre dreptele de ecuații $4x-6y-2=0$ şi $2x-3y+5=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ submulțimea $H=\left\{A=\begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z}\end{pmatrix}\middle|\ z,w\in\mathbb{C}\right\}$, unde $\overline{z}$ este conjugatul numărului complex z.

5p **a)** Să se demonstreze că pentru $A,B\in H$ avem $A+B\in H$.

5p **b)** Să se arate că dacă $A\in H$ atunci avem $-A\in H$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $A\in H$ şi A are determinantul nul, atunci $A=O_2$.

2. Se consideră polinoamele $f=X^4+X^3+X^2+X+1,\ g=X^3+X^2+X+1,\ f,g\in\mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Să se demonstreze că $f=X\cdot g+1$.

5p **b)** Să se calculeze $g(-1)$ şi apoi să se determine rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$ ale polinomului g.

5p **c)** Ştiind că $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului g, să se arate că $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)=3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-1$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f''(x)}$.

5p **b)** Să se determine punctul de minim al funcției f.

5p **c)** Utilizând faptul că $e^x\geq x+1$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$, să se demonstreze inegalitatea $\frac{e^{n+1}-e}{e-1}\geq\frac{n\cdot(n+3)}{2}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{x+1}$, $g(x)=f''(x)$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^2\left(f(x)-x^2+x-1\right)dx$.

5p **b)** Să se determine primitiva funcției g a cărei asimptotă spre $+\infty$ este dreapta de ecuație $y=2x$.

5p **c)** Să se determine numărul real pozitiv a astfel încât aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=a$ să fie egală cu $2a-\frac{3}{4}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine valorile reale ale parametrului m astfel încât graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+9$ să intersecteze axa Ox într-un singur punct.

5p **2.** Să se determine în câte moduri se poate alcătui un cuvânt format din trei litere distincte ale unui alfabet de şapte litere.

5p **3.** Să se determine numerele reale x şi y ştiind că numerele $z_1=-3+ix^2y$ şi $z_2=x^2+y+4i$ sunt complex conjugate.

5p **4.** Să se rezolve ecuația $\log_2\left(1+\log_{\frac{1}{9}}x-\log_9 x\right)=1$.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC cu $A(4;0)$ şi $B(0;2)$. Să se determine coordonatele vârfului C ştiind că acesta aparține dreptei de ecuație $x-y-2=0$ şi că triunghiul ABC este isoscel cu baza AB.

5p **6.** Să se calculeze lungimile laturilor AB şi AC ale triunghiului ABC ştiind că $AB+AC=3+\sqrt{3}$, $BC=\sqrt{6}$ şi că $m(\sphericalangle A)=60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}1+5x & -2x\\ 10x & 1-4x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}.$.

5p **a)** Să se arate că $A(x)\cdot A(y)=A(xy+x+y), \forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se verifice dacă $\left(A(x)\right)^2=A\left((x+1)^2-1\right),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $\left(A(1)\right)^n=A\left(2^n-1\right), \forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Fie $G=\left\{a+b\sqrt{3}\,\middle|\, a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-3b^2=1\right\}$.

5p **a)** Să se verifice dacă 0 şi 1 aparțin mulțimii G.

5p **b)** Să se demonstreze că pentru orice $x,y\in G$ avem $x\cdot y\in G$.

5p **c)** Să se arate că dacă $x\in G$, atunci $\frac{1}{x}\in G$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-ex-1$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ a funcției f.

5p **c)** Să se determine coordonatele punctului de intersecție dintre tangenta la graficul funcției f în punctul $O(0,0)$ şi dreapta de ecuație $x=1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^3, & x<0\\ x\cos x, & x\geq 0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-1}^{\pi} f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $\int_a^b f(x)\,dx=\int_b^c f(x)\,dx$, unde a,b,c sunt numere reale şi funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, atunci numerele $F(a), F(b), F(c)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Varianta 58

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\left(x_1^2+1\right)^{2008}+\left(x_2^2+1\right)^{2008}$ unde x_1 şi x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2+x+1=0$.

5p **2.** Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ al cărei grafic în reperul cartezian xOy este dreapta AB, unde $A(2;7)$ şi $B(-1;-2)$.

5p **3.** Să se determine suma depusă la o bancă, pe termen de un an, cu o dobândă de 40%, dacă dobânda obținută a fost de 480 lei.

5p **4.** Să se determine valorile reale ale lui x pentru care expresia $E(x)=\arcsin\dfrac{3x-1}{x-2}$ este definită.

5p **5.** Să se determine ecuația înălțimii din B a triunghiului ABC ştiind că vârfurile acestuia sunt $A(0;4)$, $B(-2;0)$ şi $C(3;0)$.

5p **6.** Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC ştiind că $m(\sphericalangle A)=90^\circ$, $m(\sphericalangle B)=30^\circ$ şi $AB=4\sqrt{3}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}2x-5y+4z=0\\-3x+y+z=-1\\2x-z=a\end{cases}$, $a\in\mathbb{Z}$ şi notăm cu A matricea sistemului.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Pentru $a\in\mathbb{Z}$ fixat să se rezolve sistemul.

5p **c)** Să se determine cea mai mică valoare a lui $a\in\mathbb{Z}$ pentru care soluția sistemului este formată din trei numere naturale.

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție asociativă $x\circ y=x+y+1$.

5p **a)** Să se calculeze $2007\circ 2008$.

5p **b)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $x\circ x^2\le 3$.

5p **c)** Fie mulțimea $A=\left\{n\in\mathbb{N}^*\,\middle|\, n\ge 2 \text{ şi } C_n^0\circ C_n^1\circ C_n^2=n+6\right\}$. Să se determine numărul elementelor mulțimii A.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$.

5p **a)** Să se rezolve în $(0,+\infty)$ ecuația $f'(x)-2f''(x)=0$.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că $\sqrt{x}\ge\ln\sqrt{x}+1$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

5p **2. a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x\left(t^2+t+1\right)dt}{x^3+1}$.

5p **b)** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$. Să se determine primitiva $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f, care are ca asimptotă dreapta de ecuație $y=1$.

5p **c)** Să se determine numărul real pozitiv a ştiind că volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2$ este egal cu 5π.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine valorile reale ale numărului x ştiind că numerele $5-x;\ x+7$ şi $3x+11$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Să se calculeze TVA –ul pentru un produs ştiind că preţul de vânzare al produsului este de 238 lei (procentul TVA-ului este de 19%).

5p **3.** Să se determine lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic ştiind că suma acestora este 23 şi ipotenuza are lungimea 17.

5p **4.** În reperul cartezian $(O,\vec{i},\vec{j})$ vectorii de poziţie ai punctelor A şi B sunt $\overrightarrow{r_A}=-4\vec{i}+8\vec{j}$ respectiv $\overrightarrow{r_B}=4\vec{i}+12\vec{j}$. Să se determine vectorul de poziţie al mijlocului segmentului AB.

5p **5.** Să se demonstreze că funcţia $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ este injectivă.

5p **6.** Să se determine valorile numărului real a astfel încât expresia $E(x)=\log_a(ax^2-x+a)$ să fie definită pentru orice x real.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $O_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Să se verifice că $A^3+A^2+A=O_3$, ştiind că $A^3=A\cdot A\cdot A$ şi $A^2=A\cdot A$.

5p **c)** Să se calculeze inversa matricei I_3+A.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3-pX^2+qX-r$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(0)-f(1)$.

5p **b)** Să se calculeze expresia $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$ în funcţie de p,q,r.

5p **c)** Să se arate că polinomul $g=X^3+X^2+X-1$ nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele către $+\infty$ şi $-\infty$ ale funcţiei f.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$.

5p **c)** Să se arate că funcţia f este convexă pe intervalul $(1,+\infty)$ şi concavă pe intervalul $(-\infty,1)$.

2. Pentru orice număr natural nenul n se consideră funcţiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^ne^x$ şi integralele $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se demonstreze că $I_n<e$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\dfrac{I_n+nI_{n-1}+I_{n-2}+(n-2)I_{n-3}}{2}=e$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}, n\geq 4$.

Varianta 60

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine semnul numărului $\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$.

5p **2.** Să se calculeze lungimea laturii AC a triunghiului ABC ştiind că $AB=10$, $BC=15$ şi $m(\sphericalangle B)=120^\circ$.

5p **3.** Să se determine valorile reale ale numărului m ştiind că valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2mx+3m$ este egală cu 2.

5p **4.** Să se calculeze $C_{2008}^2-C_{2007}^2-C_{2007}^1$.

5p **5.** Să se determine domeniul maxim de definiție D al funcției $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lg(2x-3)$.

5p **6.** Să se determine coordonatele punctului M care aparține dreptei de ecuație $x+y-1=0$ şi este egal depărtat de punctele $A(1;-1)$ şi $B(5;-3)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&3\\1&0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi mulțimea $C(A)=\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\,|\,XA=AX\}$.

5p **a)** Să se determine $a,b\in\mathbb{C}$, astfel încât $A\cdot\begin{pmatrix}0&a\\b&0\end{pmatrix}=I_2$.

5p **b)** Să se arate că $A^{2008}=3^{1004}I_2$.

5p **c)** Să se arate că dacă $X\in C(A)$, atunci există $a,b\in\mathbb{C}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}$.

2. Se consideră mulțimea $G=(-1,1)$ şi legea de compoziție $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$, $\forall x,y\in G$.

5p **a)** Să se arate că $\forall x,y\in G$ avem $x*y\in G$.

5p **b)** Să se verifice egalitatea $x*y=\dfrac{(x+1)(y+1)-(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)+(x-1)(y-1)}$, $\forall x,y\in G$.

5p **c)** Să se rezolve în G ecuația $x*x=\dfrac{4}{5}$.

SUBIECTUL III (30p)

5p **1. a)** Să se studieze continuitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<1\\ 2x-1, & x\geq 1\end{cases}$ în punctul $x_0=1$.

5p **b)** Să se determine coordonatele punctelor de extrem ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-15x^2+24x-1$.

5p **c)** Să se determine numărul real pozitiv a astfel încât $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=32$.

2. Se consideră funcțiile $f_n:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\ldots+\dfrac{1}{x+n}$, unde $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^2\left(f_1(x)-f_0(x)\right)dx$.

5p **b)** Pentru $n\in\mathbb{N}$ să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f_n, axa Ox şi dreptele $x=1$, $x=2$.

5p **c)** Dacă F este o primitivă a funcției f_1, să se arate că funcția $G:[1,2]\to\mathbb{R}$, definită prin $G(x)=F(x)-\dfrac{5}{6}x$ este crescătoare.

Varianta 61

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se demonstreze că numărul $\frac{8!}{3!\cdot 5!}-\frac{9!}{2!\cdot 7!}$ este natural.

5p **2.** Să se determine numărul real a ştiind că în paralelogramul $ABCD$ de centru O are loc egalitatea $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AO}$.

5p **3.** Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că $AB=AC=10$ şi $m(\sphericalangle B)=30^\circ$.

5p **4.** Să se demonstreze că funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}\setminus\{3\}$, $f(x)=\frac{3x+2}{x-1}$ este surjectivă.

5p **5.** Să se determine valorile reale nenule ale lui m pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-(m+1)x+1$ este tangent axei Ox.

5p **6.** Să se determine numerele complexe z ştiind că $2z^2-(\bar{z})^2-5z+\bar{z}=-4$, unde $\bar{z}$ este conjugatul numărului z.

SUBIECTUL II (30p)

1. În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi submulțimea $G=\{X(a)\,|\,a\in\mathbb{R}\text{ şi }X(a)=I_2+aA\}$.

5p **a)** Să se verifice dacă I_2 şi O_2 aparțin mulțimii G.

5p **b)** Să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+5ab),\forall a,b\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că pentru $a\neq-\frac{1}{5}$ inversa matricei $X(a)$ este matricea $X\left(\frac{-a}{1+5a}\right)$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_5[X]$, $f=\hat{3}X^3+\hat{4}X^2+\hat{3}X+\hat{2}$, $g=X^2+\hat{2}X$.

5p **a)** Să se calculeze $f(\hat{1})\cdot g(\hat{1})$.

5p **b)** Să se determine câtul şi restul împărțirii polinomului f la g.

5p **c)** Să se determine numărul rădăcinilor din $\mathbb{Z}_5$ ale polinomului f.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x-x\ln 2$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem ale funcției f.

5p **c)** Utilizând faptul că $f\left(\frac{1}{3}\right)\le f\left(\frac{1}{2}\right)$ să se demonstreze $\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\ge\frac{\ln 2}{6}$.

5p **2. a)** Să se determine primitiva funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ pentru care dreapta de ecuație $y=3$ este asimptotă spre $-\infty$.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\cos x$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^2\frac{x^2-1}{(x^2+x+1)\cdot x}\,dx$.

Varianta 62

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze lungimea înălțimii din B a triunghiului ABC știind că $BC=20$ și $m(\sphericalangle C)=45^\circ$.

5p **2.** Să se determine numerele reale m știind că valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+2x-m+3$ este egală cu 10.

5p **3.** Să se determine numerele reale x și y știind că numărul complex $x+i(x^2+y^2)+y-4-8i$ este egal cu zero.

5p **4.** Să se determine valorile reale ale numărului a știind că distanța de la punctul $A(2;1)$ la dreapta de ecuație $x-y+a=0$ este egală cu $\sqrt{2}$.

5p **5.** Să se rezolve inecuația $2A_n^2\geq nA_{n-1}^3$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **6.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\sqrt{2-\sqrt{x^2}}=1$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}x+y+3z=0\\2x-y+mz=0\\4x+y+5z=0\end{cases}$, cu m parametru real și A matricea sistemului.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Să se determine parametrul real m dacă determinantul matricei sistemului este nul.

5p **c)** Pentru $m=-1$ rezolvați sistemul și apoi calculați valoarea raportului $\frac{x+y}{x+z}$ unde $z\neq 0$ și (x,y,z) este o soluție a sistemului.

2. Se consideră polinoamele $f=X^4+X^3+X^2+X+1$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ și $g=X^2+X+1$, cu rădăcinile $y_1,y_2\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se calculeze diferența $S-S'$ pentru $S=x_1+x_2+x_3+x_4$ și $S'=y_1+y_2$.

5p **b)** Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la g.

5p **c)** Să se calculeze produsul $f(y_1)\cdot f(y_2)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{ax+1}{x-3}$, unde a este parametru real.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât dreapta de ecuație $y=-2$ să fie asimptotă orizontală către $+\infty$ a funcției f.

5p **b)** Pentru $a=0$, să se rezolve în $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ ecuația $g'(x)=0$, unde funcția $g:\mathbb{R}-\{3\}\to\mathbb{R}$ este definită prin $g(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $f'(1)=2$.

2. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}$.

5p **a)** Să se demonstreze că primitivele funcției f sunt funcții concave pe $[0,+\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $h:[0,2]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)$.

5p **c)** Să se verifice că dacă $a>0$, atunci $\frac{1}{a+2}\leq\int_a^{a+1}f(x)\,dx\leq\frac{1}{a+1}$.

Varianta 63

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine primul termen al unei progresii aritmetice de rație 4 dacă suma primilor doi termeni este 10.

5p **2.** Să se rezolve ecuația $\log_2(x+2)-\log_2(x+1)=1$.

5p **3.** Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului ABC știind că $AC=10$, $BC=16$ și $m(\sphericalangle C)=60^\circ$.

5p **4.** Să se determine valorile reale ale numărului m știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2-mx+m+2=0$ verifică inegalitatea $x_1^2+x_2^2\geq x_1+x_2$.

5p **5.** Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC știind că $A(3;0)$, $B(0;2)$ și $C(3;2)$.

5p **6.** Se consideră dezvoltarea $\left(a^4+\frac{1}{a^2}\right)^{40}$, unde a este un număr real nenul. Să se determine rangul termenului care îl conține pe a^{34}.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 6\\ -3 & 3 & 9\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=A-I_3$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei B.

5p **b)** Să se calculeze A^2-B^2, unde $A^2=A\cdot A$ și $B^2=B\cdot B$.

5p **c)** Să se arate că inversa matricei B este $B^{-1}=\frac{1}{9}A-I_3$.

2. Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție $x\circ y=xy+3x+3y+6,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că $x\circ y=(x+3)(y+3)-3$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine elementul neutru, știind că legea de compoziție „$\circ$” este asociativă și comutativă.

5p **c)** Să se determine $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ astfel încât $C_n^2\circ C_n^2=13$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\frac{x-1}{x}$.

5p **a)** Să se studieze monotonia funcției f.

5p **b)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1,e)$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $f(x)+f\left(x^2\right)+\ldots+f\left(x^{2008}\right)=4016$, unde $x\in[1,+\infty)$, nu are soluții.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x+5, & x<-1\\ 3x^2+1, & x\geq -1\end{cases}$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f admite primitive.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se determine valoarea minimă a ariei suprafeței plane determinate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=m$ și $x=m+1$ cu $m>-1$.

Varianta 64

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-2008x+1=0$, să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

5p **2.** Să se calculeze lungimea laturii AB a triunghiului ABC știind că $BC=6$, $AC=3\sqrt{2}$ și $m(\sphericalangle C)=135^\circ$.

5p **3.** Să se demonstreze că dreptele de ecuații $x+3y-1=0$, $3x+2y+4=0$ și $x-4y+6=0$ sunt concurente.

5p **4.** Să se rezolve inecuația $C_{17}^{x}\le C_{17}^{x-2}$, $x\in\mathbb{N}$, $x\ge 2$.

5p **5.** Să se determine primul termen al unei progresii geometrice știind că raportul dintre primul termen și al patrulea este $-\frac{1}{8}$ și că suma primilor zece termeni este 341.

5p **6.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_3(\log_2(x^2-1))=1$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ și $B=I_2+A$. Se notează $A^2=A\cdot A$ și $B^n=\underbrace{B\cdot B\cdot\ldots\cdot B}_{de\ n\ ori}$.

5p **a)** Să se verifice că $A^2+B^2=I_2+2A$.

5p **b)** Să se calculeze inversa matricei B.

5p **c)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $B^n=I_2+nA$, $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+X^2+1$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se arate că f este divizibil cu $g=X^2+X+1$.

5p **b)** Să se calculeze produsul $S\cdot P$ unde $S=x_1+x_2+x_3+x_4$ și $P=x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$.

5p **c)** Să se calculeze suma $T=x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f,h:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ și $h(x)=f^2(x)$.

5p **a)** Să se determine asimptotele funcției f.

5p **b)** Să se studieze monotonia funcției h.

5p **c)** Să se rezolve în intervalul $[0,+\infty)$ inecuația $2x\cdot h'(x)\ge 1$

2. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+4x+5}{x^2+4x+3}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}+1$ pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2} f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se determine numărul real pozitiv k astfel încât aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=k$ să fie egală cu $k+\ln k$.

Varianta 65

KRtm

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se demonstreze că numărul $\sqrt[3]{27}-\sqrt{12}+2\sqrt{3}$ este natural.

5p **2.** Să se calculeze numărul $2\cos 150^\circ+\sin 45^\circ-\cos 135^\circ$.

5p **3.** Să se calculeze aria triunghiului determinat de graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-5$ şi axele de coordonate.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr natural de trei cifre acesta ă fie cub perfect.

5p **5.** Să se demonstreze că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-4x+1$ este inversabilă.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $C(4,0)$. Punctul $M(1,1)$ este mijlocul laturii BC şi punctul $G(3,4)$ este centrul de greutate al triunghiului. Să se determine ecuația dreptei AB.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele:

$$AB: x+2y-4=0$$
$$BC: 3x+y-2=0.$$
$$AC: x-3y-4=0$$

5p **a)** Să se determine coordonatele punctelor A,B,C.

5p **b)** Pentru $A(4,0),B(0,2),C(1,-1)$ să se scrie ecuația medianei triunghiului ABC, duse din vârful C.

5p **c)** Pentru $A(4,0),B(0,2),C(1,-1)$ să se calculeze aria triunghiului ABC.

2. Se consideră $(\mathbb{Z}_8,+,\cdot)$ inelul claselor de resturi modulo 8.

5p **a)** Să se calculeze suma $S=\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}+\hat{6}+\hat{7}$.

5p **b)** Să se calculeze produsul elementelor inversabile ale inelului.

5p **c)** Să se rezolve sistemul $\begin{cases}\hat{2}x+\hat{5}y=\hat{2}\\ \hat{3}x+\hat{2}y=\hat{5}\end{cases}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(0)$.

5p **b)** Să se determine coordonatele punctelor de extrem ale funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x)+f\left(x^3\right)+f\left(x^5\right)+\ldots+f\left(x^{2009}\right)\geq -1005$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_{-1}^{10} e^x f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se determine numărul real pozitiv a astfel încât dreapta de ecuație $x=a$ să împartă aria suprafeței plane determinate de axa Ox, graficul funcției f şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=4$ în două suprafețe cu arii egale.

5p **c)** Să se determine numărul real p astfel încât volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(px)$, pentru orice $x\in[0,1]$ să fie minim.

Varianta 66

KRtm

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine punctele de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3^{x+1}-1$ cu axele de coordonate.

5p **2.** Să se calculeze suma coeficienților binomiali din dezvoltarea $(1+x)^7$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului ABC știind că $m(\sphericalangle A)=90^\circ$, $m(\sphericalangle B)=60^\circ$ și că lungimea înălțimii din A este $2\sqrt{3}$.

5p **4.** Să se demonstreze că triunghiul cu vârfurile în punctele $A(2;0)$, $B(0;4)$ și $C\left(1+2\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$ este echilateral.

5p **5.** Să se calculeze partea reală a numărului complex $(1-3i)^3$.

5p **6.** Să se determine m real astfel încât $x^2+2x+6m-1>0$ pentru orice x real.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea matricelor pătratice $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ se consideră $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$, $x,y,z,t\in\mathbb{Q}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice relația $2A-A^2-A^3=O_2$, știind că $A^3=A\cdot A\cdot A$ și $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se determine $x,y,z,t\in\mathbb{Q}$ știind că $A\cdot B=I_2$.

5p **c)** Dacă $A\cdot B=I_2$ să se calculeze $S=B^{-1}+B^{-2}+B^{-3}$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ definim legile de compoziție $x*y=x+y-3$ și $x\circ y=xy-3(x+y)+12$.

5p **a)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația $x*x=x\circ x$.

5p **b)** Să se arate că $x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z),\forall x,y,z\in\mathbb{Z}$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ sistemul $\begin{cases}(x-3)*y=2\\ (x-y)\circ 4=10\end{cases}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2+2x+3}{x+2}, & x\geq 0\\ x+b, & x<0\end{cases}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine numărul real b astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0=0$.

5p **b)** Să se determine numărul real a astfel încât dreapta de ecuație $y=2$ să fie asimptotă spre $+\infty$ a funcției f.

5p **c)** Să se arate că pentru $a=0$ și $b=1$ avem $f(x)\in(-\infty,1)\cup\left[\frac{3}{2},2\right)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **2. a)** Să se calculeze $\int_1^2\frac{1}{x^2+2x}\,dx$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\int_0^e\frac{x^{2008}}{x^{2008}+1}\,dx\leq e$ pentru orice $x\in[0,e]$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$ și numerele reale pozitive a, b și c. Să se demonstreze că dacă numerele $\int_1^a f(x)\,dx$, $\int_1^b f(x)\,dx$, $\int_1^c f(x)\,dx$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, atunci numerele a, b, c sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul termenilor raționali din dezvoltarea $\left(5+\sqrt{3}\right)^{2008}$.

5p **2.** Să se determine punctele de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_5\left(x^2+x+1\right)$ cu axele de coordonate.

5p **3.** Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC știind că $m(\sphericalangle B)=45^\circ$, $m(\sphericalangle C)=30^\circ$ și că lungimea înălțimii din A este 10.

5p **4.** În reperul cartezian $(O,\vec{i},\vec{j})$ se dau $\overrightarrow{r_A}=-\vec{i}+2\vec{j}$ și $\overrightarrow{r_B}=2\vec{i}-\vec{j}$ vectori de poziție ai punctelor A și respectiv B. Să se calculeze lungimea segmentului AB.

5p **5.** Să se determine valorile reale ale numărului m astfel încât $(m-1)x^2+mx-4m\le 0$, pentru orice x real.

5p **6.** Să se determine primul termen al unei progresii geometrice știind că suma primilor trei termeni ai progresiei este 70 și suma următorilor trei termeni este 560.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}ax+2y=0\\4x+y=0\end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$ și $A=\begin{pmatrix}a & 2\\4 & 1\end{pmatrix}$, $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ matricea sistemului.

Notăm $A^2=A\cdot A$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Pentru $a=-1$ să se rezolve sistemul de ecuații.

5p **b)** Să se verifice egalitatea $A^2-(a+1)A+(a-8)I_2=O_2$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ știind că matricea A verifică egalitatea $A^2=9I_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x+y+11$.

5p **a)** Să se arate că legea de compoziție „$\circ$” este asociativă.

5p **b)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că

$$1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ n=\frac{n(n+1)}{2}+(n-1)\cdot 11,\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\ge 2.$$

5p **c)** Să se determine cel mai mare număr natural n pentru care $2\circ 2^2\circ 2^3\circ\ldots\circ 2^n<2008$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+4$ și $g(x)=x^3-5x^2+8x-4$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $f(x)\ge 0$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul comun al graficelor funcțiilor f și g.

2. Se consideră funcțiile $f,F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\dfrac{x-1}{x}$ și $F(x)=e^x+x-\ln x$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția F este o primitivă pentru funcția f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^2 x\left(F(x)+\ln x\right)dx$.

5p **c)** Să se determine parametrul real m astfel încât aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ să fie egală cu e^m-2.

Varianta 68

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine valorile reale ale numărului m ştiind că vectorii $\vec{r_1} = (1+m)\vec{i} + m\vec{j}$ şi $\vec{r_2} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **2.** Să se determine mulțimea valorilor lui x pentru care $-4 < 3x + 2 < 4$.

5p **3.** Să se determine cât la sută din $a+b$ reprezintă numărul a, ştiind că a este egal cu 25% din b.

5p **4.** Să se rezolve ecuația $\sqrt{3x+4} = 2\sqrt{x}$.

5p **5.** Să se calculeze lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic ştiind că aria acestuia este 24 şi că ipotenuza are lungimea 10.

5p **6.** Să se calculeze raportul $\frac{x}{y}$ ştiind că are loc egalitatea $2\log_2(x-2y) = \log_2 x + \log_2 y$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$. Notăm $A^n = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{de } n \text{ ori}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine x ştiind că $\det A = 0$.

5p **b)** Să se verifice egalitatea $A^2 = (2x-6)A - (x^2 - 6x + 8)\cdot I_2$.

5p **c)** Pentru $x = 4$ utilizând metoda inducției matematice să se demonstreze că $A^n = 2^{n-1} \cdot A$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pe mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ se consideră legea de compoziție

$$x \circ y = xy - 2i(x+y) - 4 + 2i.$$

5p **a)** Să se verifice că $x \circ y = (x-2i)(y-2i) + 2i$, $\forall x, y \in \mathbb{C}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $x \circ 2i = 2i$ oricare ar fi $x \in \mathbb{C}$.

5p **c)** Ştiind că legea de compoziție „$\circ$” este asociativă, să se calculeze expresia:

$$E = (-2008i) \circ (-2007i) \circ \ldots \circ (-i) \circ 0 \circ i \circ (2i) \circ \ldots \circ (2008i).$$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3^x + 3x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3 + 3^x + 3x}{x^3}$.

5p **c)** Să se determine un număr natural din intervalul $[a, b]$, unde $a = e^3 + 3^e + 3e$ şi $b = \pi^3 + 3^\pi + 3\pi$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-2}, & x \in (-\infty, 1] \\ \ln x - 2, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox şi dreptele $x = 0$ şi $x = 1$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x (f(t) + 2)\, dt$.

Varianta 69

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze numărul natural $C_6^2 + A_4^2 - C_6^4$.

5p **2.** Să se determine valorile reale ale lui x pentru care expresia $E(x) = \sqrt{x^2 - 25} + \sqrt[3]{x+1}$ este definită.

5p **3.** Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC dacă $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, lungimea înălțimii AD este 6 şi $m(\sphericalangle BAD) = 30^\circ$, $D \in BC$.

5p **4.** Să se demonstreze că patrulaterul $MNPQ$ cu vârfurile $M(2;0)$, $N(6;4)$, $P(4;6)$ şi $Q(0;2)$ este dreptunghi.

5p **5.** Să se determine numărul complex nenul z astfel încât $\frac{2}{z} + \frac{4}{\bar{z}} = 3 + i$, unde $\bar{z}$ este conjugatul numărului z.

5p **6.** Să se determine valorile reale nenule ale numărului m astfel încât graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 - (m-1)x + m$ intersectează axa Ox în două puncte situate la distanța $2\sqrt{3}$ unul față de altul.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cu $x, y \in \mathbb{R}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea A să fie inversabilă.

5p **b)** Să se calculeze inversa matricei A în cazul în care $a = 3$.

5p **c)** Pentru $a = 3$ se rezolve ecuația matricială $A \cdot X = B$.

2. Pe mulțimea $G = (-1,1)$ se consideră legea de compoziție $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$. Fie funcția $f:(-1,1)\to(0,\infty)$ $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

5p **a)** Să se calculeze $f\left(-\frac{1}{2}\right) * f\left(\frac{1}{2}\right)$.

5p **b)** Să se verifice că $f(x*y) = f(x)\cdot f(y), \forall x, y \in G$.

5p **c)** Ştiind că legea de compoziție „$*$” este asociativă, să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $f(x_1 * x_2 * \ldots * x_n) = f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot\ldots\cdot f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + \frac{x^2}{2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$.

5p **b)** Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate ale funcției f.

5p **c)** Să se determine semnul funcției f ştiind că numărul $\alpha \in (0,1)$ este soluție unică a ecuației $f(x) = 0$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Pentru $n = 2$ să se calculeze $\int_1^2 f\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

5p **b)** Pentru $n = 5$ să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\int_0^a f(x)\,dx = 0$.

5p **c)** Calculând în două moduri $\int_0^1 f(x)\,dx$ să se demonstreze că $\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Varianta 70

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul de termeni pozitivi ai dezvoltării binomiale $\left(2-\sqrt{3}\right)^{2008}$.

5p **2.** Să se calculeze cosinusul unghiului A al triunghiului ABC ştiind că $AB=6$, $AC=4$ şi $BC=\sqrt{76}$.

5p **3.** Să se determine valorile reale ale numărului m ştiind că graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2(m-1)x+m^2+3m+2$ este o parabolă al cărei vârf aparține dreptei de ecuație $y=x$.

5p **4.** Să se determine numărul de submulțimi ale mulțimii $A\cup\{1\}$ ştiind că mulțimea A are 4 elemente.

5p **5.** Se consideră punctele $A(1;1)$, $B(-1;0)$ şi $C(2;-4)$. Să se determine ecuația dreptei care conține punctul C şi este paralelă cu dreapta AB.

5p **6.** Să se determine inversa funcției $f:[0;\infty)\to[1;\infty)$, $f(x)=3^{2x}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2\\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon\end{pmatrix}$, ε este o soluție a ecuației $x^2+x+1=0$ şi $\varepsilon^3=1$.

5p **a)** Să se calculeze suma elementelor matricei A.

5p **b)** Să se arate că $\det A^2=(\det A)^2$, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **c)** Utilizând metoda inducției matematice arătați că $A^{4n}=3^{2n}I_3$, $n\in\mathbb{N}^*$, unde $A^m=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ m\ ori}$, $\forall m\in\mathbb{N}^*$.

2. Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ definim legile de compoziție $x*y=xy-2x-2y+6$ şi $x\circ y=xy-3(x+y)+12$.

5p **a)** Să se verifice că $(x*2)+(3\circ y)-5=0$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Ştiind că e_1 este elementul neutru în raport cu legea de compoziție „$*$” şi e_2 elementul neutru în raport cu legea „$\circ$”, scrieți ecuația de gradul al doilea care are soluțiile e_1 şi e_2.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+1$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x*y)=f(x)\circ f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sqrt{x}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este crescătoare pe $(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\left(f(x)-\sqrt{x}\right)\cdot\ln x\right)$.

5p **c)** Să se determine coordonatele punctului, care aparține graficului funcției f, în care tangenta la grafic are panta egală cu $\frac{3}{2}$.

2. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\frac{5}{6}\le\ln 3\le\frac{3}{2}$.

5p **c)** Utilizând egalitatea $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$ să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$,

$h(x)=f(x)-f(x+1)+f(x+2)-f(x+3)+\ldots+f(x+2008)-\dfrac{1}{x+1}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul real m dacă numărul complex $z=1+mi-2m+7i$ este real

5p **2.** Să se determine termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt{a}+2\right)^{10}$ unde a este un număr real pozitiv.

5p **3.** Se consideră triunghiul echilateral ABC de centru O. Să se determine numărul real a dacă $\overrightarrow{AO}=a\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

5p **4.** Să se rezolve ecuația $\log_{x-1}\left(x^2-5x+7\right)=1$.

5p **5.** Să se determine lungimile laturilor AB şi AC ale triunghiului ABC dacă $BC=2\sqrt{7}$, $AC-AB=2$ şi $m(\sphericalangle A)=60^\circ$.

5p **6.** Să se determine valorile reale ale lui m dacă soluțiile x_1 şi x_2 ale ecuației $x^2-(2m-3)x+m-1=0$ verifică egalitatea $3x_1-5x_1x_2+2x_2=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $M=\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $x,y\in\mathbb{R}$. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2), B(0,3), O(0,0)$ şi $C_n(n+1,2-n)$ cu $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei M.

5p **b)** Să se arate că punctele A, B, C_n sunt coliniare, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se determine numărul natural nenul n astfel încât aria triunghiului AOC_n să fie minimă.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x\perp y=(x-3)(y-3)+3,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că $(x+3)\perp\left(\frac{1}{x}+3\right)=4$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}^*$.

5p **b)** Să se arate că legea „$\perp$” are element neutru.

5p **c)** Să se determine elementele simetrizabile ale mulțimii. $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$\perp$”.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru orice $n\in\mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=\ln x$ şi $f_n(x)=f'_{n-1}(x)$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine funcțiile f_1 şi f_2.

5p **b)** Să se determine asimptotele funcției f_0.

5p **c)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n}$ oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$ şi $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\sqrt{e-1}} f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx+\ldots+\int_9^{10} f(x)\,dx>\int_{10}^{11} f(x)\,dx+\int_{11}^{12} f(x)\,dx+\ldots+\int_{19}^{20} f(x)\,dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se rezolve ecuația $\sqrt[3]{x^3+x+1}=x$.

5p **2.** Știind că suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este $S_n=n^2+n$ pentru orice număr natural nenul n, să se calculeze formula termenului general a_n, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **3.** Să se calculeze în câte moduri se poate alcătui un cuvânt format din câte patru litere distincte ale unui alfabet care are cinci litere.

5p **4.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+1$. Să se demonstreze că $f(3-x)=f(3+x)$ pentru orice număr real x.

5p **5.** Să se calculeze cosinusul unghiului ascuțit format de diagonalele dreptunghiului $ABCD$ știind că $AB=16$ și $BC=12$.

5p **6.** Se consideră pătratul $ABCD$ de centru O. Să se determine numărul real a știind că $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EB}=a\cdot\overrightarrow{AG}$, unde E este mijlocul segmentului AO și G este centrul de greutate al triunghiului ABD.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}2x-3y+4z=-5\\ x+2y+\alpha z=0\\ 5x-4y+7z=\beta\end{cases}$ unde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, A este matricea sistemului și $B=\begin{pmatrix}2&-3&4&-5\\1&2&\alpha&0\\5&-4&7&\beta\end{pmatrix}$. Notăm cu $S(\alpha,\beta)$ suma elementelor matricei B.

5p **a)** Să se calculeze $S(\alpha,\beta)$.

5p **b)** Să se determine parametrii reali α și β astfel încât determinantul matricei A să fie nul și $S(\alpha,\beta)=-2$.

5p **c)** Pentru $\alpha=0$ și $\beta=0$ să se rezolve sistemul.

2. În mulțimea polinoamelor $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinoamele $f=X^3+mX^2+nX+6$ și $g(X)=X^2-X-2$.

5p **a)** Să se rezolve ecuația $x^2-x-2=0$.

5p **b)** Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să se dividă prin polinomul g.

5p **c)** Pentru $m=-4$ și $n=1$ să se calculeze produsul $P=f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(2007)\cdot f(2008)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că $\pi e^4+3\pi\leq e\pi^4+3e$.

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{2-x^2}$.

5p **a)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx$.

5p **c)** Să se determine numărul real $a\in(0,1]$ astfel încât aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f', axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=a$ să fie egală cu 1.

Varianta 73

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze al cincilea termen al unei progresii aritmetice ştiind că primul termen al progresiei este 7 şi al treilea termen este 11.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația $12n!=(n+2)!$.

5p **3.** Să se determine valorile reale ale parametrului m astfel încât mulțimea $\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, mx^2-(2m+1)x+m-2=0\right\}$ să aibă două elemente.

5p **4.** Se consideră triunghiul ABC ale cărui vârfuri au în raport cu un reper cartezian $(O,\vec{i},\vec{j})$ vectorii de poziție $\overrightarrow{r_A}=2\vec{i}+2\vec{j}$, $\overrightarrow{r_B}=-\vec{i}+\vec{j}$ şi respectiv $\overrightarrow{r_C}=\vec{i}-2\vec{j}$. Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{GA}$, dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

5p **5.** Să se rezolve ecuația $\lg(x+4)+\lg(2x+3)=\lg(1-2x)$.

5p **6.** Să se determine lungimile catetelor AB şi AC ale triunghiului dreptunghic ABC ştiind că $\frac{AB+AC}{AB-AC}=7$ şi $BC=15$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{vmatrix}$, $a,b,c\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Dacă $a=i$, $b=0$ şi $c=1$, unde $i^2=-1$, să se calculeze determinantul Δ.

5p **b)** Să se arate că $\Delta=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} 2^x & 1 & 1\\ 1 & 2^x & 1\\ 1 & 1 & 2^x\end{vmatrix}=0$, $x\in\mathbb{R}$.

2. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ se consideră submulțimea $G=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)\ \middle|\ \begin{pmatrix}\hat{x} & \hat{y}\\ \hat{2}\hat{y} & \hat{x}\end{pmatrix}\right\}$ şi matricele $I_2=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $I_2\in G$ şi $O_2\in G$.

5p **b)** Să se arate că dacă $A,B\in G$, atunci $A+B\in G$.

5p **c)** Să se verifice că mulțimea G împreună cu operația de adunare a matricelor este grup comutativ.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3}{x^2+1}, & x\le 1\\ \dfrac{2x+a}{x^2+2}, & x>1\end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine numărul real a astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0=1$.

5p **b)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **c)** Să se determine numărul real a astfel încât panta tangentei la grafic în punctul $x_0=2$ să fie egală cu 1.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 x f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că primitivele funcției f sunt funcții monotone pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $1\le\int_0^1 f(x)\,dx\le e$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze aria dreptunghiului $ABCD$ ştiind că $AC=10$ şi $m(\sphericalangle BAC)=30^\circ$.

5p **2.** Să se determine ecuația dreptei care conține punctul $A(2;5)$ şi este perpendiculară pe dreapta $x+y-2=0$.

5p **3.** Să se determine numărul real pozitiv x ştiind că al treilea termen al dezvoltării $\left(2+\sqrt{x}\right)^7$ este 1344.

5p **4.** Să se determine soluțiile reale ale sistemului $\begin{cases} x+y+xy=11 \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}$.

5p **5.** Să se rezolve ecuația $\log_2\left(\log_8\dfrac{x^2-2x}{x-3}\right)=0$.

5p **6.** Să se determine rația progresiei geometrice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_5-a_1=5$ şi $a_4+a_2=6$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A^2)$, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se arate că dacă $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $XA=AX$, atunci există $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se arate că dacă $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $Y^2=A$ nu are nicio soluție în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_{12},+,\cdot)$.

5p **a)** Să se calculeze numărul elementelor inversabile în raport cu înmulțirea din inelul $(\mathbb{Z}_{12},+,\cdot)$.

5p **b)** Să se calculeze $S+P$ unde S este suma soluțiilor ecuației $\hat{2}x+\hat{1}=\hat{5}$ şi P produsul soluțiilor ecuației $x^2=x$, unde $x\in\mathbb{Z}_{12}$.

5p **c)** Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element din inelul $(\mathbb{Z}_{12},+,\cdot)$, acesta să fie soluție a ecuației $x^3=\hat{0}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\setminus\{1,2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)(x-2)$ şi $h(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $h(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}$.

5p **b)** Să se rezolve ecuația $h'(x)=\dfrac{-1}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{x-1}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\dfrac{f''(x)}{f'(x)}=\dfrac{h'(x)}{h(x)}+\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{1,\dfrac{3}{2},2\right\}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2007}+x+1$.

5p **a)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $h:[1,3]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-x^{2007}-1$.

5p **b)** Să se determine primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f, al cărei grafic conține punctul $A(0,1)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^{2008}}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine punctele de intersecție ale dreptei de ecuație $2x+y-4=0$ cu axele de coordonate.

5p **2.** Să se demonstreze că şirul cu termenul general $a_n=2n+3$, cu $n\in\mathbb{N}^*$ este o progresie aritmetică.

5p **3.** Să se determine în câte moduri poate fi ordonată mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$ astfel încât numărul 1 să fie situat pe a treia poziție.

5p **4.** Să se rezolve sistemul $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=x^2-3x+5 \end{cases}$.

5p **5.** Să se rezolve ecuația $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}=\dfrac{1}{2}$.

5p **6.** Să se demonstreze că dacă triunghiul ABC este dreptunghic în C, atunci are loc egalitatea $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c+\cos A\left(a\cos C-c\cos A\right)}{c\cos C+a\cos A}$, unde $BC=a$, $AB=c$ şi $AC=b$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Ştiind că $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ n\ ori}$, $n\geq 2$, să se arate că $A^{2008}+A^{2009}=2^{1004}\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

5p **c)**Să se arate că ecuația $X^2=A$ nu are soluții în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x*y=xy+3x+ay+b,\ a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât „$*$” să fie comutativă.

5p **b)** Să se arate că pentru $a=3$ şi $b=6$ legea „$*$” admite element neutru.

5p **c)** Să se determine a şi b astfel încât $(-3)*x=-3$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1}, & x\leq 0 \\ -2x+1, & x>0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=0$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este crescătoare pe intervalul $(-\infty,0)$.

5p **c)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin $f_n(x)=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^n}$ şi numerele

$I_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se demonstreze că $I_{2007}\geq I_{2008}$.

5p **c)** Să se demonstreze (utilizând, eventual, metoda de integrare prin părți) că $I_{n+1}=\dfrac{1}{2n\cdot 2^n}+\dfrac{2n-1}{2n}\cdot I_n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$

Varianta 76

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine suma dintre cel mai mare şi cel mai mic dintre numerele naturale de 3 cifre, pentru care produsul cifrelor este egal cu 2.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-3$. Să se determine $f(2)+f(2^2)+f(2^3)$.

5p **3.** Să se determine numerele reale a şi b, cu $a<b$, astfel încât funcția $f:[-1,1)\to[a,b]$, $f(x)=-x^{2008}$ să fie surjectivă.

5p **4.** Câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu elementele din mulțimea $\{0,1,2,3\}$?

5p **5.** În reperul cartezian xOy, se consideră punctele $A(3,0)$, $B(x,y)$, $C(-2008,0)$ şi $D(2008,0)$. Arătați că lungimea vectorului $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ nu depinde de x şi y.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu proprietatea $\frac{m(A)}{3}=\frac{m(B)}{2}=\frac{m(C)}{1}$. Să se determine valoarea expresiei $\sin A+\cos B+tgC$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x-ay-z=0 \\ x+4y-2z=16 \\ x-2y+2z=-6 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$ şi matricea sistemului $A=\begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine valorile reale ale lui a astfel încât matricea A să fie inversabilă.

5p **b)** Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **c)** Să se rezolve sistemul pentru $a=1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x\circ y=xy+4x+4y+12$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că $x\circ(y\circ z)=(x\circ y)\circ z$, oricare af fi $x,y,z\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $x\circ(-4)\circ y=-4$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $1\circ(-2)\circ 3\circ(-4)\circ\ldots\circ 2007\circ(-2008)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{e^x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=-\frac{x}{e^x}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine asimptota la $+\infty$ a funcției f.

5p **c)** Să se arate că $f(x)\le 1$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{1}{x^n+4}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int (x+4)^2\cdot f_1(x)\,dx$, unde $x\in[0,1]$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 x^3 f_2(x)\,dx$.

5p **c)** Să se arate că aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_{2008}, axa Ox şi dreptele $x=0$ şi $x=1$ este un număr din intervalul $\left[\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right]$.

Varianta 77

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul real a, ştiind că ecuaţia $x^2 - ax - 1 = 0$ are soluţia $x_1 = 1 - \sqrt{2}$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f : \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R}, f(x) = -x + 1$. Să se determine mulţimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \{-1, 0, 1\}\}$.

5p **3.** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(x^{2007} - 1)$. Să se arate că funcţia f nu este injectivă.

5p **4.** Se consideră mulţimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \le x \le 12,\ x \text{ prim}\}$. Să se determine probabilitatea ca alegând 3 numere din mulţimea A, suma acestora să fie un număr par.

5p **5.** Pe axa Ox se consideră punctele $A(3,0)$ şi $B(m^2, 0)$, unde m este un număr real. Să se determine valorile numărului m pentru care punctul $C(6,0)$ este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Să se ordoneze crescător elementele mulţimii $A = \{\sin 15^\circ, \cos 15^\circ, \sin 45^\circ\}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1), B(1,2)$ şi $C_n(n, -n)$, cu $n \in \mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se scrie ecuaţia dreptei C_4C_{-2}.

5p **b)** Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}^*$ punctele O, C_n, C_{n+1}, sunt coliniare.

5p **c)** Să se calculeze determine aria triunghiului ABC_3.

2. Se consideră matricea $A_x = \begin{pmatrix} 2008^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, pentru $x \in \mathbb{R}$ şi mulţimea $G = \{A_x \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se verifice că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $G = \{A_x \mid x \in \mathbb{R}\}$ este grup în raport cu înmulţirea matricelor.

5p **c)** Pentru grupurile $(\mathbb{R}, +)$ şi $(G, \cdot)$ să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to G$, $f(x) = A_x$ este izomorfism de grupuri.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 3)\ln x$.

5p **a)** Să se calculeze $f(1) + f(3)$.

5p **b)** Să se determine $x > 0$ pentru care $f(x) < 0$.

5p **c)** Să se determine asimptotele funcţiei f.

2. Se consideră funcţiile $F, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x \cdot e^x$ şi $f(x) = (x + 1)e^x$.

5p **a)** Să se verifice că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

5p **b)** Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei F, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1 \frac{F(x) - f(x)}{e^x + 1}\, dx$.

Varianta 78

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine valorile reale ale numărului a, astfel încât $1+2+2^2+2^3=|a|$.

5p **2.** Să se rezolve inecuația $4x^2+(x+1)^2 \le 4x(x+1)$.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{2008}-2x^{1004}+1$. Să se demonstreze că funcția f nu este surjectivă.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca extrăgând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,...20\}$ acesta să conțină cifra 1 sau 0.

5p **5.** Pe axa Ox se consideră punctele $A(3,0)$ şi $B(m^2-1,0)$, unde m este un număr real. Să se determine valorile lui m astfel încât $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

5p **6.** Să se demonstreze că în orice triunghi dreptunghic ABC, cu $m(\sphericalangle A)=90^\circ$ are loc inegalitatea $\sin B+\sin C\ge\sqrt{4\sin B\cdot\cos B}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea matricelor pătratice $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră submulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

5p **a)** Dacă $A,B\in G$, să se demonstreze că $A+B\in G$ şi $A\cdot B\in G$.

5p **b)** Să se arate că matricea $C\in G$, obținută pentru $a=5$ şi $b=3$, verifică relația $C^2=10C-16I_2$, unde $C^2=C\cdot C$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Pentru $a,b\in\mathbb{N}$ să se determine o matrice $D\in G$ care are proprietatea că $\det D=2008$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{C}[X],\ f(X)=(X+i)^{2008}+(X-i)^{2008}$ care are forma algebrică $f=a_{2008}X^{2008}+a_{2007}X^{2007}+...+a_1X+a_0$.

5p **a)** Să se determine a_{2008} şi a_0.

5p **b)** Să se arate că $f(i)+f(-i)$ este număr real.

5p **c)** Să se arate că, dacă $z\in\mathbb{Z}$ este o rădăcină a lui f, atunci $|z+i|=|z-i|$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}=0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine asimptotele funcției f.

5p **c)** Să se arate că $f\left(\sqrt[3]{2007}\right)\le f\left(\sqrt[3]{2008}\right)$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=2^x$ şi $g(x)=x\cdot 2^x$.

5p **a)** Să se calculeze $\int f(x)\,dx$, unde $x\in[0,1]$.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției f.

Varianta 79

KRtm

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine suma zecimalelor perioadei corespunzătoare scrierii ca fracție zecimală a numărului $\frac{328}{999}$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ date prin $f(x)=x+1$, $g(x)=2x+2$, $h(x)=3x+3$. Să se verifice relația $f\cdot(g+h)=f\cdot g+f\cdot h$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^2}=\sqrt{x^3}$.

5p **4.** Să se determine câte numere de câte 4 cifre distincte se pot forma cu cifrele alese din mulțimea $\{1,2,3,4\}$.

5p **5.** Pe axa Ox se consideră punctele $A(3,0)$ şi $B(m^2-1,0)$ cu $m\in\mathbb{R}$. Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât pentru $C(6,0)$, abscisele punctelor A,C,B sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **6.** Se consideră patrulaterul $ABCD$ în care $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Să se demonstreze că $ABCD$ este paralelogram.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&4\\3&1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze $3A-4B$ şi $A\cdot B$.

5p **b)** Să se rezolve ecuația matricială $A\cdot X=B$, unde $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se demonstreze că matricea A verifică egalitatea $A^2-4A+5I_2=O_2$, unde $A^2=A\cdot A$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție asociativă $x\circ y=x+y-14$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Utilizând metoda inducției matematice să se demonstreze că $x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n=x_1+x_2+\ldots+x_n-14(n-1)$ oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

5p **b)** Să se determine cel mai mic număr natural nenul pentru care $1\circ 2\circ 3\circ 4\circ\ldots\circ n\geq 28$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $\log_2 x\circ\log_3 x\circ\log_4 x\circ\ldots\circ\log_{2009} x=-28084$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x+3^x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(0)$.

5p **b)** Să se determine asimptota spre $-\infty$ a funcției f.

5p **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{x^n}{x+1}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int(x+1)f_2(x)\,dx$, unde $x\in[0,1]$.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_1, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 f_{2008}(x)\,dx\leq\ln 2$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se demonstreze că $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}\in\left(\frac{3}{4},\frac{5}{6}\right)$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că $f(x+1)-f(x)=f(x)-f(x-1)$. Știind că $f(1)=f(0)+2$, să se calculeze $f(2008)-f(2007)$.

5p **3.** Să se determine valorile parametrului real m pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=mx^2-4x$ este bijectivă.

5p **4.** Să se calculeze $\frac{C_3^2\cdot C_5^2}{C_3^1\cdot C_5^3}$.

5p **5.** Se consideră reperul cartezian xOy. Dacă M' este simetricul punctului $M(-2,3)$ față de O, să se determine lungimea vectorului $2\cdot\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}$.

5p **6.** Să se determine lungimea laturii AB și măsurile unghiurilor B și C ale triunghiului ABC, știind că $m(A)=30^\circ$, $BC=2$ și $AC=4$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $D(a)=\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}$, unde a este un număr real.

5p **a)** Să se calculeze valoarea determinantului pentru $a=-1$.

5p **b)** Să se demonstreze că $D(a)=-(a-1)^2(a+2)$, pentru orice a număr real.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $D(a)=-4$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-2008(x+y)+2008\cdot 2009$.

5p **a)** Să se verifice că $x\circ y=(x-2008)(y-2008)+2008$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Știind că „$\circ$” este asociativă, să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $\underbrace{x\circ x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de } n \text{ ori}}=(x-2008)^n+2008$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$ și $n\geq 2$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $x\circ(x-1)=2008$, unde $x\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1+\frac{1}{x-1}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(0)+f(2)$.

5p **b)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

5p **c)** Să se determine intervalele de concavitate și de convexitate ale funcției f.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{e^x}{e^{nx}+1}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int f_0(x)\,dx$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_1, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx\leq\int_0^1 f_n(x)\,dx$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se se demonstreze că numerele $a=1,4$ şi $b=1,5$ verifică inegalităţile $0<\sqrt{2}-a<0,1$ şi $0<b-\sqrt{2}<0,1$.

5p **2.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}\le 0$.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{3x^2+1}-2x=1$.

5p **4.** Să se determine numărul de funcţii $f:\{a,b,c\}\to\{0,1,2\}$ care verifică relaţia $f(a)f(b)f(c)=0$.

5p **5.** Se consideră reperul cartezian xOy şi punctul $M(2,m)$, unde m este un număr real. Să se determine valorile numărului m pentru care $OM=\sqrt{5}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu laturile de lungimi a,b,c corespunzătoare unghiurilor opuse A,B şi respectiv C. Să se arate că $\frac{\sin A}{\sin B}+\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele de ecuaţii

$BC:\ 3x+y-2=0$, $AB:\ x+2y-4=0$ şi $CA:\ x-3y-4=0$.

5p **a)** Să se determine coordonatele punctelor A,B şi C.

5p **b)** Să se calculeze aria triunghiului ABC, dacă $A(4,0)$, $B(0,2)$ şi $C(1,-1)$.

5p **c)** Să se determine ecuaţia mediatoarei segmentului AB.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi mulţimile $\mathcal{M}^*=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbb{R},\ a>0\right\}$ şi

$G=\left\{X\middle|\ X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ AX=XA\right\}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $X\in G$ atunci există $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se arate că G este grup comutativ în raport cu adunarea matricelor.

5p **c)** Ştiind că $\mathcal{M}^*$ este grup în raport cu înmulţirea matricelor să se arate că funcţia $f:G\to\mathcal{M}^*$ definită prin $f\left(\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}e^x & ye^x\\ 0 & e^x\end{pmatrix}$ este izomorfism între grupurile $(G,+)$ şi $(\mathcal{M}^*,\cdot)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$.

5p **c)** Să se arate că $f(x)\ge -1$, pentru orice $x>0$.

2. Se consideră funcţia $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_a(x)=ax+1$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+x+1$ să fie o primitivă a funcţiei f_a.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 e^x f_1(x)\,dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_0^1 f_a{}^2(x)\,dx\ge\frac{1}{4}$ pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

Varianta 82

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine toate numerele reale nenule x care verifică simultan proprietățile $|x|\leq 1$ și $\frac{1}{|x|}\leq 1$.

5p **2.** Se consideră ecuația $x^2+px+p=0$, unde p este număr real, și x_1, x_2 soluțiile ecuației. Să se verifice dacă expresia $x_1+x_2+x_1x_2$ este constantă.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2-2x\cdot\sqrt{x+2}+x+2=0$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor injective $f:\{a,b\}\to\{1,2,3\}$.

5p **5.** Se consideră reperul cartezian xOy și punctele $A(-1,2)$, $B(-3,4)$ și $C(2a,a+1)$. Să se determine numărul real a știind că dreptele AB și AC sunt perpendiculare.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, înscris în cercul de centru O și rază 2. Să se determine lungimile laturilor triunghiului ABC știind că $m(\sphericalangle A)=30^\circ$ și $m(\sphericalangle B)=120^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $D(a,b,x)=\begin{vmatrix}1 & x & ab\\ 1 & a & bx\\ 1 & b & ax\end{vmatrix}$, unde a,b și x sunt numere reale.

5p **a)** Să se calculeze $D(a,b,0)$, unde a,b sunt numere reale.

5p **b)** Să se demonstreze că suma $D(a,a,x)+D(b,b,x)$ nu depinde de numărul real x.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $D(a,b,x)=0$, unde a,b sunt numere reale distincte.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3-3X+a$ și $g(x)=X^2-3X+2$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine rădăcinile lui f știind că are o rădăcină dublă pozitivă.

5p **b)** Pentru $a=2$ să se determine mulțimea $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid f(x)=g(x)\}$.

5p **c)** Pentru $a=2$ să se rezolve inecuația $e^{f(x)}\leq g\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{3x-3}{2\sqrt{x}}$ pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$.

5p **c)** Să se demonstreze că $x+\frac{2}{\sqrt{x}}\geq 3$ pentru orice $x>0$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=e^{x^n}$.

5p **a)** Să se determine $\int f_1(x)\,dx$, unde $x\in[0,1]$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 x\cdot f_1(x)\,dx$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\cdot f_3(x)$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se rezolve ecuația $\frac{2}{x-2}+\frac{x}{2-x}=-1$.

5p **2.** Să se determine funcția de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c$, cu a,b,c numere reale şi $a\neq 0$, care îndeplineşte simultan condițiile $f(0)=0, f(1)=4$ şi $a-b+c=0$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x+3}=\sqrt{x+9}$.

5p **4.** Să se determine câte numere de patru cifre distincte au suma cifrelor egală cu 6.

5p **5.** Se consideră reperul cartezian $(O,\vec{i},\vec{j})$. Să se determine coordonatele punctului M din plan, pentru care $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$, unde $A(4,-1)$ şi $B(-3,2)$.

5p **6.** Să se demonstreze că $\sin x\cos x\leq\frac{1}{2}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$, utilizând eventual $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}\}$.

5p **a)** Să se rezolve ecuația $\hat{2}x+\hat{5}=\hat{1}, x\in\mathbb{Z}_6$.

5p **b)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix}\hat{1}&\hat{2}&\hat{3}\\ \hat{2}&\hat{3}&\hat{1}\\ \hat{3}&\hat{1}&\hat{2}\end{vmatrix}$ în $\mathbb{Z}_6$.

5p **c)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_6$ sistemul de ecuații $\begin{cases}\hat{2}x+y=\hat{4}\\ x+\hat{2}y=\hat{5}\end{cases}$.

2. Se consideră mulțimea $G=\{A_x\,|\,x\in\mathbb{Z}\}$, unde matricea $A_x=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x&0&1\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se verifice că $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

5p **b)** Să se determine elementul neutru din grupul $(G,\cdot)$.

5p **c)** Să se arate că grupurile $(\mathbb{Z},+)$ şi $(G,\cdot)$ sunt izomorfe prin funcția $f:\mathbb{Z}\to G, f(x)=A_x$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că funcția f nu are asimptotă la $+\infty$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\frac{1}{x}$.

5p **a)** Să se determine $\int f(x)\,dx$, unde $x>0$.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, definită prin $g(x)=f(x)$, $x\in[1,2]$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^e f(x)\ln x\,dx$.

Varianta 84

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $a_n=\left(-\sqrt{2}\right)^n$, pentru $n\in\{1,2,3\}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4x+4$. Să se rezolve inecuația $f(x)\le 0$.

5p **3.** Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $15^{x+1}=3^{2x}\cdot 25^x$.

5p **4.** Firma F_1 are un capital inițial de 10 000 lei şi în anul 2007 a realizat un profit de 5 000 lei. Exprimați în raport cu capitalul inițial procentul pe care-l reprezintă profitul firmei.

5p **5.** Se consideră reperul cartezian $(O,\vec{i},\vec{j})$ şi vectorii $\vec{u}=3\vec{i}+4\vec{j}$ şi $\vec{v}=4\vec{i}-3\vec{j}$. Să se determine $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ astfel încât $2\vec{u}-3\vec{v}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}$.

5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=\sin x+\cos x$. Să se demonstreze că $E(x)\neq 2$, oricare ar fi x real.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se arate că $A=B+I_3$.

5p **b)** Să se demonstreze că matricea A este inversabilă şi să se determine A^{-1}.

5p **c)** Să se determine numărul real a astfel încât $\det X(a)=(2a-1)^3$, unde $X(a)=I_3+aA$.

2. Pe mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ se consideră legea de compoziție asociativă definită astfel $x*y=2xy-2i(x+y)-2+i$, unde $i^2=-1$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x*y=2(x-i)(y-i)+i$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{C}$.

5p **b)** Utilizând metoda inducției matematice să se demonstreze că $x_1*x_2*x_3*\ldots*x_n=2^{n-1}(x_1-i)(x_2-i)\ldots(x_n-i)+i$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$ şi oricare ar fi $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{C}$.

5p **c)** Să se calculeze $i*\frac{i}{2}*\frac{i^2}{3}*\frac{i^3}{4}*\ldots*\frac{i^{2007}}{2008}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x+1}{e^x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{-x^2+3x-2}{e^x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se arate că $f(x)\ge\frac{1}{e}$ pentru orice $x\le 2$.

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x+2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int f^2(x)\,dx$, unde $x\in[0,1]$.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 x^{2008}f(x)\,dx\le\frac{\sqrt{3}}{2009}$.

Varianta 85

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu termenul general $a_n = 3n+2$, $n\in\mathbb{N}^*$. Să se verifice că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică.

5p **2.** Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ xy=1 \end{cases}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 2\cdot 2^x\cdot 3^x + 9^x = 0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca alegând o submulțime cu două elemente a mulțimii $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ aceasta să aibă suma elementelor sale mai mică sau egală cu 4.

5p **5.** În reperul cartezian $(O,\vec{i},\vec{j})$ se consideră vectorul $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}+4\vec{j}$ şi punctul $B(1,9)$. Să se determine coordonatele punctului T astfel încât $\overrightarrow{AT}=-3\cdot\overrightarrow{BT}$.

5p **6.** Să se calculeze $\cos 30^\circ - 2\sin 30^\circ\cos 30^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+ay+2z=1 \\ x+(2a-1)y+3z=1 \\ x+ay+(a-3)z=1 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$ şi matricea sistemului

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 2a-1 & 3 \\ 1 & a & a-3 \end{pmatrix}.$$

5p **a)** Să se arate că $\det A = a^2-6a+5$.

5p **b)** Să se rezolve ecuația $\det A = 0$.

5p **c)** Pentru $a=0$ să se rezolve sistemul de ecuații.

2. Se consideră legea de compoziție asociativă $x*y=xy-6x-6y+42$, definită pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că $x*y=(x-6)(y-6)+6$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $x_1*x_2*\ldots*x_n=(x_1-6)(x_2-6)\ldots(x_n-6)+6$, $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$

5p **c)** Să se calculeze $1*2*3*\ldots*2008$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se determine asimptotele funcției f.

5p **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=e^x$ şi $g(x)=e^x+e^{-x}$.

5p **a)** Să se determine $\int f(x)\,dx$, $x\in[0,1]$.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, definită prin $h(x)=x^2f(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției g.

Varianta 86

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x-y=2 \\ x+3y=4 \end{cases}$. Să se verifice dacă $(2y-x)^{2008}=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to(0,\infty),\ f(x)=5^{-x}$. Să se determine inversa funcției f.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $(\sqrt{2}-1)^x=\dfrac{1}{(\sqrt{2}+1)^x}$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca alegând o submulțime cu două elemente a mulțimii $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, aceasta să aibă produsul elementelor sale mai mic sau egal cu 4.

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ şi punctul O intersecția diagonalelor AC şi BD. Să se determine lungimea vectorului $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}$.

5p **6.** Să se verifice că $\sin 30^\circ+\cos 30^\circ+\sin 60^\circ+\cos 60^\circ>2$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, unde $i^2=-1$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulțimea de matrice $G=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\,\middle|\,X^2=I_2\right\}$, unde $X^2=X\cdot X$.

5p **a)** Să se verifice că $A\in G$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\left(\dfrac{1}{2}(X+I_2)\right)^2=\dfrac{1}{2}(X+I_2)$, oricare ar fi $X\in G$.

5p **c)** Să se demonstreze că orice matrice pătratică de ordinul al doilea peste $\mathbb{R}$ pentru care avem $AX=XA$ este de forma $X=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, unde $x,y\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+bX+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $c=501$, să se demonstreze că $f(1)+f(-1)+f(i)+f(-i)=2008$, unde $i^2=-1$.

5p **b)** Pentru $a=-2$, $b=2$ şi $c=-1$ să se determine rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Să se demonstreze că nu există valori reale ale coeficienților a,b,c astfel ca f să se dividă cu $g=X^3-X$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=e$.

5p **c)** Să se arate că $\ln x\le\dfrac{x}{e}$ pentru orice $x>0$.

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=1-\sqrt{x}$.

5p **a)** Să se determine $\int f(x)\,dx$, unde $x\in[0,1]$.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției f.

5p **c)** Folosind eventual faptul că $\sqrt{x}\ge x$ pentru orice $x\in[0,1]$ să se arate că $\int_0^1 f^{2008}(x)\,dx\le\dfrac{1}{2009}$.

Varianta 87

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $|x-1|+2|1-x|=3$.

5p **2.** Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+by=a+b \\ bx+ay=a+b \end{cases}$, unde a şi b sunt numere reale nenule cu proprietatea că $a^2 \neq b^2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_x(2x-4)=1$.

5p **4.** Să se demonstreze că $(1-\sqrt{2})^3+(1+\sqrt{2})^3$ este număr natural.

5p **5.** Să se arate că în orice triunghi ABC are loc relația $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$, unde punctele *M, N* şi *P* sunt mijloacele laturilor *BC, AC* şi respectiv *AB*.

5p **6.** Să se demonstreze că oricare ar fi numărul real $x \in (0,\frac{\pi}{2})$ are loc relația $1-\sin^2 x \cdot \cos x+\cos x-\sin^2 x \geq 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulțimea de matrice

$G=\left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \middle| X^2=X\right\}$, unde $X^2=X \cdot X$.

5p **a)** Să se verifice că $A \in G$.

5p **b)** Să se demonstreze, folosind metoda inducției matematice, că $A^n=A$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

5p **c)** Să se demonstreze că $(2X-I_2)^2=I_2$, oricare ar fi $X \in G$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-\sqrt{2008}(x+y)+2008+\sqrt{2008}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că $x*y=\left(x-\sqrt{2008}\right)\left(y-\sqrt{2008}\right)+\sqrt{2008}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „$*$” pe mulțimea $\mathbb{R}$.

5p **c)** Ştiind că legea de compoziție „$*$” este asociativă, să se calculeze $\left(-\sqrt{2008}\right)*\left(-\sqrt{2007}\right)*...*0*...*\left(\sqrt{2007}\right)*\left(\sqrt{2008}\right)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x-x$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\ln x$ pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$.

5p **c)** Să se determine asimptota verticale ale funcției f.

2. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n+1$.

5p **a)** Să se determine $\int f_1(x)\,dx$, unde $x \in [0,1]$.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g:[0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{f_1(x)}$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 \sqrt{f_n(x)}\,dx \leq \sqrt{2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Varianta 88

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră mulțimile $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x^2-5x+6\le 0\right\}$ și $B=\{2,3\}$. Să se determine mulțimea $A-B$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-ax+a$. Să se determine valorile parametrului real a astfel încât mulțimea $A=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\le 0\}$ să fie formată dintr-un singur element.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2^2 x+\log_2 x^4\cdot\log_{16} x=2$.

5p **4.** Să se calculeze $2C_4^0+2C_4^1+C_4^2$.

5p **5.** Se consideră punctele distincte A,B și C. Să se demonstreze că dacă $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$, atunci M este mijlocul segmentului BC.

5p **6.** Să se determine mulțimea $\left\{\sin x\,\middle|\,x\in\mathbb{R}\right\}\cap\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $B=I_3+A$, unde $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $A\cdot B=B\cdot A$.

5p **b)** Să se calculeze A^2+A^3, unde $A^2=A\cdot A$ și $A^3=A^2\cdot A$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și $A\cdot X=X\cdot A$, atunci există numerele reale a,b,c astfel încât $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2+bX+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$ având rădăcinile $x_1,\ x_2,\ x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se determine numărul real c știind că $f(1)+f(-1)+f(i)+f(-i)=2008$, unde $i^2=-1$.

5p **b)** Știind că $a=-3,\ b=1,\ c=1$, să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

5p **c)** Să se exprime în funcție de numerele reale a, b, c determinantul $D=\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_2&x_3&x_1\\x_3&x_1&x_2\end{vmatrix}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x+1$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(1)$.

5p **b)** Să se determine intervalele de convexitate și de concavitate ale funcției f.

5p **c)** Să se arate că $f(x)\le 3$, pentru orice $x\le 2$.

2. Se consideră funcțiile $f,F:(0;+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=1-\frac{1}{x^2}$ și $F(x)=x+\frac{1}{x}$.

5p **a)** Să se verifice dacă funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^e f(x)\cdot\ln x\,dx$.

Varianta 89

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se verifice inegalitatea $\sqrt[3]{3} > \dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}{2} > \sqrt{2}$.

5p **2.** Să se rezolve inecuația $(x^2-1)(x+1) \geq 0$.

5p **3.** Să se determine produsul soluțiilor reale ale ecuației $(\lg x - 1)\lg x - 2\lg x + 2 = 0$.

5p **4.** Să se determine valorile naturale ale numărului n astfel încât $C_{9-n^2}^{n} = 8$.

5p **5.** Se consideră hexagonul regulat $ABCDEF$. Să se arate că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FA}$.

5p **6.** Să se verifice că dacă $\sin A + \sin^2 A = 2$, atunci triunghiul ABC este dreptunghic.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_8)$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{5} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{3} & \hat{7} & \hat{5} \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $A^2 = B^2 = I_3$.

5p **b)** Să se rezolve ecuația matricială $A \cdot X = I_3$, unde $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_8)$.

5p **c)** Să se calculeze $(B-A)^2$.

2. Pe $\mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziție asociativă $x * y = 3xy + 7x + 7y + 14$.

5p **a)** Să se determine elementul neutru al legii "$*$".

5p **b)** Să se determine elementele simetrizabile în raport cu legea "$*$".

5p **c)** Să se rezolve ecuația $x * x * x * x = -2$, $x \in \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(1)$.

5p **b)** Să se determine intervalele de concavitate şi de convexitate ale funcției f.

5p **c)** Să se arate că $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \geq -\dfrac{1}{2}$.

2. Se consideră funcțiile $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5^x$ şi $g(x) = 5^{1-x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int f(x)\,dx$, unde $x \in [0,1]$.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = x \cdot f(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x = 0$ şi $x = 1$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(g(x) - f(x)\right) dx \geq 0$.

Varianta 90

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze suma $S=1+5+9+...+2009$.

5p **2.** Să se determine mulțimea $A=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1, x,y\in\mathbb{Z}\}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(2^{x+1}-1)=0$.

5p **4.** Să se afle câte numere de trei cifre se pot scrie folosind elementele din mulțimea $\{0,1,2\}$.

5p **5.** Fie punctele distincte A,B,C,D nu toate coliniare. Știind că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$, să se demonstreze că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

5p **6.** Să se ordoneze crescător numerele $\cos 89^\circ, \cos 90^\circ$ și $\cos 91^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+2y+4z=0 \\ a^2x+4y+16z=0 \end{cases}$, cu $a\in\mathbb{R}$ și matricea sistemului $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 4 \\ a^2 & 4 & 16 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Pentru $a=1$ să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Să se determine mulțimea valorilor reale ale numărului a pentru care $\det A\neq 0$.

5p **c)** Să se rezolve sistemul pentru $a=2$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+bX+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine numărul real c știind că $f(i)+f(-i)=2008$, unde $i^2=-1$.

5p **b)** Să se determine numerele reale a,b,c știind că $f(0)=f(1)$ și că una dintre rădăcinile polinomului este $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

5p **c)** Pentru $a=-2$, $b=1$ și $c=-2$ să se determine rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$.

5p **c)** Să se arate că $2\sqrt{x}\ge 2+\ln x$, pentru orice $x>0$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n+(1-x)^n$.

5p **a)** Să se determine $\int f_2(x)\,dx$, $x\in[0,1]$.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x\cdot f_2(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 f_n(x)\,dx\ge\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Varianta 91

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră mulțimea $A=\{x\in \mathbf{Z}\,|\,x\in(-2008,2008]\}$. Să se calculeze suma tuturor elementelor mulțimii A.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=(-1)^n x$, cu $n\in\mathbb{N}$. Să se calculeze $f_1(1)+f_2(2)+\ldots+f_{20}(20)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x=\log_2\sqrt{x}$.

5p **4.** Să se determine câte numere de trei cifre distincte se pot scrie cu ajutorul cifrelor din mulțimea $\{0,1,2,3\}$.

5p **5.** Se consideră reperul cartezian $(O,\vec{i},\vec{j})$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(2,-3)$ şi are direcția vectorului $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}$.

5p **6.** Să se calculeze produsul $(\cos 1^0-\cos 9^0)\cdot(\cos 2^0-\cos 8^0)\cdot\ldots\cdot(\cos 9^0-\cos 1^0)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricele $X=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\end{pmatrix}$ şi $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\1 & 2 & -3\\1 & 2 & -3\end{pmatrix}$. Pentru $a\in\mathbb{R}$ fixat, definim $B=aA+I_3$.

5p **a)** Să se calculeze $A-XY$.

5p **b)** Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **c)** Să se demonstreze că $2B-B^2=I_3$ şi să se determine B^{-1}.

2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție prin $x\circ y=3xy+3x+3y+2$, oricare ar fi numerele reale x şi y.

5p **a)** Să se verifice că $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine perechile $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ pentru care $\left(x^2-5\right)\circ\left(y^2-10\right)=-1$.

5p **c)** Să se determine două numere $a,b\in\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$, astfel încât $a\circ b\in\mathbb{N}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x-\ln x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(1)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.

5p **c)** Să se arate că $f(x)\geq 0$, oricare ar fi $x>0$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=(2-x)^n$.

5p **a)** Să se determine $\int f_1(x)\,dx$, unde $x\in[0,2]$.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g:[0,2]\to\mathbb{R}$ definită prin $g(x)=f_1(x)\cdot e^x$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=2$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției f_{2008}.

Varianta 92

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze produsul primilor şase termeni ai unei progresii geometrice, care are primul termen $\sqrt{2}$ şi rația $-\sqrt{2}$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x^2-4x+1,\ g(x)=2x-1$. Să se rezolve ecuația $f(x)+2g(x)=-1$.

5p **3.** Să se determine termenul al treilea al dezvoltării $(x-2\sqrt{2})^{10}$.

5p **4.** Să se calculeze $\dfrac{P_1+P_2+P_3}{A_1^1+A_2^2+A_3^3}$.

5p **5.** Să se calculeze distanța de la punctul $A(-1,5)$ la dreapta de ecuație $d:4x+3y-17=0$.

5p **6.** Să se calculeze produsul $\sin(-89^\circ)\cdot\sin(-88^\circ)\cdot\ldots\cdot\sin 88^\circ\cdot\sin 89^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&0&i\\0&i&0\\i&0&0\end{pmatrix}$, unde $i^2=-1$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi submulțimea $G=\{X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})\mid AX=XA\}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det A$.

5p **b)** Să se demonstreze că $A^2X=XA^2$, oricare ar fi $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **c)** Să se arate că dacă $a,b\in\mathbb{C}$, atunci matricea $aI_3+bA\in G$.

2. Se consideră polinomul $f=\left(1+X+X^2\right)^{1004}=a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_{2008}X^{2008}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(1)+f(i)$.

5p **b)** Să se arate că $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{2008}$ este un număr întreg impar.

5p **c)** Să se demonstreze că $a_1+a_5+a_9+\ldots+a_{2005}=a_3+a_7+a_{11}+\ldots+a_{2007}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se determine asimptotele funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că $e^x\geq ex$ pentru orice $x>0$.

2. Fie funcția $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{2}{x}$.

5p **a)** Să se determine $\int f(x)\,dx$, unde $x\in[1,2]$.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^2 f(x)\cdot\ln x\,dx$.

Varianta 93

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\log_2 3+\frac{1}{2}\log_2 9-\frac{1}{3}\log_2 729$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-3x+2$. Să se calculeze produsul $f(-5)\cdot f(-4)\cdot ....\cdot f(-1)\cdot f(0)\cdot ....\cdot f(4)\cdot f(5)$.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+mx+2$ .Să se determine numărul real m astfel încât minimul funcției să fie egal cu -2.

5p **4.** Să se determine câte vârfuri are un poligon convex cu 9 diagonale.

5p **5.** Se consideră în plan reperul cartezian xOy şi punctul $A(2,3)$. Ştiind că punctele B şi C sunt simetricele punctului A față de Ox, respectiv Oy, să se calculeze lungimea segmentului BC.

5p **6.** Să se calculeze suma $\sin^5(-2)+\sin^3(-1)+\sin 0+\sin^3 1+\sin^5 2$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A^2)$, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se demonstreze că $A^3=2^3\begin{pmatrix}14 & 13\\ 13 & 14\end{pmatrix}$, unde $A^3=A^2\cdot A$.

5p **c)** Să se demonstreze că matricea A verifică egalitatea $A^2-8A+12I_2=O_2$.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}\}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $a^3=a$, oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}_6$.

5p **b)** Să se demonstreze, utilizând eventual metoda inducției matematice, că $a^{2n+1}=a$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$ şi oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}_6$.

5p **c)** Să se calculeze $\widehat{1^{2007}}+\widehat{2^{2007}}+\widehat{3^{2007}}+\widehat{4^{2007}}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+1\right)e^x-1$.

5p **a)** Să se verifice dacă $f'(x)=(x+1)^2\cdot e^x$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=0$.

5p **c)** Să se arate că $x\cdot f(x)\geq 0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{x^n}{\sqrt{x+1}}$.

5p **a)** Să se determine $\int\left(x+\sqrt{x}\right)dx$, $x>0$.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției f_1.

5p **c)** Să se arate că aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_{2008} şi axa Ox este mai mică sau egală cu 0,0005.

Varianta 94

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră numărul $a=\log_2 3$. Să se exprime $\log_4 18$ în funcție de a.

5p **2.** Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$, cu a şi b numere reale pentru care $f(1)+f(2)+f(3)=6a+2b$ şi $f(4)=8$.

5p **3.** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție cu axele de coordonate ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2^{x+3}-2$.

5p **4.** Să se determine numărul de funcții $f:\{a,b,c\}\to\{1,2,3\}$ care verifică relația $f(a)f(b)f(c)=6$.

5p **5.** Se consideră dreptele distincte $d_1: ax+2y=2$ şi $d_2: 8x+ay=4$. Să se determine valorile parametrului real a astfel încât dreptele d_1 şi d_2 să fie paralele.

5p **6.** Să se calculeze $\cos\frac{2008\pi}{1}+\cos\frac{2008\pi}{2}+\cos\frac{2008\pi}{4}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru $x\in\mathbb{R}$ se consideră matricele $A_x=\begin{pmatrix}x & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine valorile lui x pentru care $\det A_x=0$.

5p **b)** Sa se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $A_x^2=I_2$, unde $A_x^2=A_x\cdot A_x$.

5p **c)** Să se demonstreze că $A_x^2=2xA_x+(1-x^2)\cdot I_2$.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}\}$.

5p **a)** Să se verifice că $a^4=a^2$, oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}_6$.

5p **b)** Utilizând metoda inducției matematice să se demonstreze că $a^{2n}=a^2$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$ şi oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}_6$.

5p **c)** Să se calculeze $\widehat{1^{2008}}+\widehat{2^{2008}}+\widehat{3^{2008}}+\widehat{4^{2008}}+\widehat{5^{2008}}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x\cdot e^x$.

5p **a)** Să se verifice dacă $f'(x)=(x+1)\cdot e^x$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate ale funcției f.

5p **c)** Să se determine asimptotele funcției f.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{x^n+x+2}{x+1}$.

5p **a)** Să se determine $\int\left(\frac{1}{x}-3\sqrt{x}\right)dx,\ x>0$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f_2(x)\,dx$.

5p **c)** Să se arate că aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_{2008} şi axa Ox este un număr din intervalul $[1+\ln 2;2]$.

Varianta 95

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se demonstreze că $(1+i)^4$ este un număr real, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-4x+3$. Să se demonstreze că $f(2+x)=f(2-x)$, oricare ar fi numărul real x.

5p **3.** Să se determine mulțimea $A=\left\{x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\,\middle|\,\sin x\cdot\cos x\le\frac{1}{2}\right\}$.

5p **4.** Să se rezolve ecuația $\frac{n!}{3}=(5-n)!$.

5p **5.** Se consideră reperul cartezian xOy şi punctele $A(1,-1)$ şi $B(3,5)$. Să se determine coordonatele punctului C din plan astfel încât $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$.

5p **6.** Să se calculeze $\cos1^\circ\cdot\cos2^\circ\cdot\ldots\cdot\cos179^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix}$ şi $C=A+B$.

5p **a)** Să se verifice că $A\cdot B=B\cdot A$.

5p **b)** Să se demonstreze că $A^2=6A$ şi $B^2=-6B$, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **c)** Să se demonstreze că $C^n=6^{n-1}\left(A+(-1)^{n-1}B\right)$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, unde $C^n=\underbrace{C\cdot C\cdot\ldots\cdot C}_{de\ n\ ori}$

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziție $x*y=x+y+2$ şi respectiv $x\circ y=xy+2x+2y+2$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x\circ y=(x+2)(y+2)-2$.

5p **b)** Să se determine elementele neutre ale fiecăreia dintre cele două legi de compoziție.

5p **c)** Să se rezolve sistemul $\begin{cases}x^2*y^2=7\\x^2\circ y^2=16\end{cases}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

5p **a)** Să se verifice dacă $f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ pentru orice $x>1$.

5p **b)** Să se determine asimptotele funcției f.

5p **c)** Să se arate că $f\left(\sqrt[3]{2}\right)\ge f\left(\sqrt[3]{3}\right)$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x$ şi $g(x)=\sqrt{1-x}$.

5p **a)** Să se determine $\int f(x)\,dx$, unde $x\in[0,1]$.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\cdot\ln x\,dx$.

Varianta 96

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numerele reale a şi b astfel încât să aibă loc egalitatea $a+ib=i^{2007}$, ştiind că $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x\sqrt{2}-3$. Să se determine mulțimea $A=\{x\in\mathbb{Q}\,|\,f(x)\in\mathbb{Q}\}$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $(0,25)^x=2^{-x+1}$.

5p **4.** Să se determine numerele naturale n astfel încât $n!+(n+1)!$ să fie un număr prim.

5p **5.** Să se demonstreze că dacă $\overrightarrow{AB}=2\cdot\overrightarrow{DC}$ şi $C,D\notin AB$, atunci patrulaterul $ABCD$ este trapez.

5p **6.** Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, cu $m(\sphericalangle A)=90^\circ$ şi $\cos B=0,6$. Să se calculeze tg^2C.

SUBIECTUL II (30p)

1.

5p **a)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix}\sqrt{2008}-i & -i\\ i & \sqrt{2008}+i\end{vmatrix}$, unde $i^2=-1$.

5p **b)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ -x_2 & x_1\end{vmatrix}$, ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-4x+2=0$.

5p **c)** Fie matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ şi $O_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Să se arate că $A^3+A^2+A=O_3$, unde $A^2=A\cdot A$ şi $A^3=A^2\cdot A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x\circ y=2xy-8x-8y+36$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x\circ y=2(x-4)(y-4)+4$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$..

5p **b)** Să se rezolve ecuația $x\circ x=36$.

5p **c)** Ştiind că operația „$\circ$” este asociativă să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $\underbrace{x\circ x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de } n \text{ ori}}=2^{n-1}(x-4)^n+4$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ şi oricare ar fi $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Să se verifice dacă $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se determine asimptotele funcției f.

5p **c)** Să se arate că $f(2007)\geq f(2008)$.

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\sqrt{x}$.

5p **a)** Să se determine $\int f(x)\,dx$, unde $x\in[0,1]$.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ definită prin $g(x)=\dfrac{f^2(x)}{x^2+1}$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R},\ h(x)=e^{\frac{x}{2}}\cdot f(x)$, unde $x\in[0,1]$.

Varianta 97

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că $(1+i)^4=(1-i)^4$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(-x)=-f(x)$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$. Să se calculeze $f(0)$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\lg^2 x-4\lg x+3=0$.

5p **4.** Să se determine numărul tuturor submulțimilor nevide ale mulțimii $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^{2008}(x^2-1)=0\}$.

5p **5.** Se consideră mulțimea $A=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1, x,y\in\mathbb{Z}\right\}$. Să se arate că elementele mulțimii A reprezintă coordonatele vârfurilor unui pătrat.

5p **6.** Știind că triunghiul ABC are $BC=10, AC=5$ și $AB=5\sqrt{3}$, să se calculeze $\sin A$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&a&1\\0&2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ și $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se scrie sistemul asociat ecuației matriciale $AX=B$.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\det A=0$.

5p **c)** Dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\{2,6\}$ și (x_0,y_0,z_0) este soluția sistemului $\begin{cases}x+2y-z=1\\2x+ay+z=1\\2y+3z=1\end{cases}$, să se demonstreze că $\frac{x_0}{z_0}$ nu depinde de a.

2. Se consideră polinomul $f=(X+1)^{2008}+(X-1)^{2008}$ având forma algebrică $f=a_{2008}X^{2008}+\ldots+a_1X+a_0$, unde $a_0,a_1,\ldots,a_{2008}$ sunt numere reale.

5p **a)** Să se calculeze $f(-1)+f(1)$.

5p **b)** Să se determine a_{2008} și a_0.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(i)$ este număr real, unde $i^2=-1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(-1)\cdot f(1)$.

5p **b)** Să se verifice dacă $f'(x)=\dfrac{2x^2-2}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că $f\left(\sqrt[3]{2007}\right)\le f\left(\sqrt[3]{2008}\right)$.

2. Fie funcția $f:[1,e]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\ln x$.

5p **a)** Să se determine $\int f'(x)\,dx$, pentru $x\in[1,e]$.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

5p **c)** Să se arate că $\int_1^e e^x f(x)\,dx\le e^e-e$.

Varianta 98

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \ldots \cdot \log_{63} 64 = 6$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $g(x) = bx + a$, unde a și b sunt numere reale. Să se arate că dacă $f(-1) = g(-1)$, atunci $f = g$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x-1} = 0,25$.

5p **4.** Să se determine numărul natural nenul n astfel încât numărul submulțimilor cu 2 elemente ale unei mulțimi cu n elemente să fie egal cu 6.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3,0)$ și intersectează axa Oy în punctul de ordonată 4.

5p **6.** Să se determine suma dintre cel mai mic și cel mai mare element din mulțimea $M = \{\cos 0^\circ,\ \cos 1^\circ,\ \cos 2^\circ, \ldots,\ \cos 180^\circ\}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că $A \cdot B = B \cdot A$.

5p **b)** Să se demonstreze că $(A+B)^2 = (A-B)^2 = A^2 + B^2$.

5p **c)** Utilizând metoda inducției matematice să se demonstreze că $(A+B)^{2n} = 3^{2n} I_3$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție prin $x * y = 3xy + 3x + 3y + 2$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x * y = 3(x+1)(y+1) - 1$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine perechile $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pentru care $\left(x^2 - 2\right) * \left(y^2 - 5\right) = -1$.

5p **c)** Știind că legea de compoziție este asociativă să se calculeze $(-2008) * (-2007) * \ldots * (-1) * 0 * 1 * \ldots * 2007 * 2008$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$.

5p **a)** Să se verifice dacă $f'(x) = \dfrac{e^x (x-2)}{(x-1)^2}$, pentru orice $x > 1$.

5p **b)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 2$.

5p **c)** Să se determine asimptotele funcției f.

2. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n : [1,2] \to \mathbb{R}$ definite prin $f_1(x) = 2\sqrt{x}$ și $f_n(x) = \sqrt{x^n + 3x}$ pentru $n \geq 2$.

5p **a)** Să se verifice dacă $\displaystyle\int_1^2 f_1(x)\, dx = \frac{4}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$.

5p **b)** Să se determine volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $g : [1,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{f_2(x)}$.

5p **c)** Să se arate că aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_{2008}, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 2$ este un număr mai mare sau egal cu $\dfrac{2^{1005} - 1}{1005}$.

Varianta 99

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,\sqrt{(x-1)^2}=-|x-1|\right\}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_x 32$. Să se calculeze $f(2)+f(4)$.

5p **3.** Să se determine $x>0$ pentru care este definită expresia $\arcsin\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor injective $f:A\to B$, unde $A=\left\{x\in\mathbb{Z}^*\,|\,|x|\le 1\right\}$ şi $B=\left\{x\in\mathbb{N}\,|\,x\le 2\right\}$.

5p **5.** Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât punctele $A(1,3)$, $B(2,5)$ şi $C(3,m)$ să fie coliniare.

5p **6.** Să se determine numerele naturale n din intervalul $[0,2\pi]$, cu proprietatea că $\sin n<0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x&y\\0&6\end{pmatrix}$ cu $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine numărul real x astfel încât $A\cdot B=B\cdot A$.

5p **b)** Să se verifice că $A^2=4(A-I_2)$.

5p **c)** Utilizând metoda inducției matematice să se demonstreze că $A^n=2^n\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, unde $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ n\ ori}$.

2. Pe $\mathbb{R}$ definim legile de compoziție $x\circ y=x+y+3$ şi $x*y=xy-3(x+y)+12$.

5p **a)** Să se verifice că $x*y=(x-3)(y-3)+3$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $(x\circ(x+1))+(x*(x+1))=11$.

5p **c)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul de ecuații $\begin{cases}x\circ(y-1)=0\\(x+1)*y=x*(y+1)\end{cases}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2-3\sqrt[3]{x}$.

5p **a)** Să se verifice dacă $f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$.

5p **c)** Să se arate că $\frac{x+2}{3}\ge\sqrt[3]{x}$, pentru orice $x>0$.

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\frac{x^3}{x+1}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int(x+1)\cdot f(x)\,dx$, unde $x\in[0,1]$.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Folosind faptul că $(x+1)^2\ge 4x$ pentru orice $x\in[0,1]$, să se arate că volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției f este un număr mai mic sau egal cu $\frac{\pi}{24}$.

Varianta 100

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine produsul primilor cinci termeni ai unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ știind că primul termen este egal cu 1 și rația este $q=-2$.

5p **2.** Să se determine domeniul maxim de definiție D al funcției $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2(x+1)}}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1}=\sqrt[3]{1-x}$.

5p **4.** Se consideră funcția $f:\{1,2,3\}\to B$. Să se determine numărul minim de elemente ale mulțimii B știind că funcția f este injectivă, dar nu este surjectivă.

5p **5.** Se consideră în reperul cartezian xOy punctele $A(3,2)$, $B(2,3)$ și M mijlocul segmentului AB. Să se determine lungimea segmentului OM.

5p **6.** Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $BC=4$ și că măsura unghiului A este de 30°.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $X(a)=I_2+aA$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $A^2=8A$.

5p **b)** Să se calculeze $\det X(a)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+8ab)$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f=\left(1+X+X^3\right)^{669}\in\mathbb{Z}[X]$ cu forma algebrică $f=a_{2007}X^{2007}+\ldots+a_1X+a_0$.

5p **a)** Să se calculeze $f(1)+f(-1)$.

5p **b)** Să se arate că suma $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{2007}$ este un număr divizibil cu 3.

5p **c)** Să se demonstreze că numerele $m=a_0+a_2+\ldots+a_{2006}$ și $n=a_1+a_2+\ldots+a_{2007}$ sunt numere întregi consecutive.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

5p **a)** Să se verifice dacă $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se determine asimptotele funcției f.

5p **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\left(x^n+1\right)\cdot e^x$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se determine $\int f_0(x)\,dx$, unde $x\in[0,1]$.

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_2, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 f_{2007}(x)\,dx+\int_0^1 f_{2009}(x)\,dx\geq 2\int_0^1 f_{2008}(x)\,dx$.