VARIANTA 1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 001

5p **1.** Să se determine numărul natural n din egalitatea $1+5+9+...+n=231$.

5p **2.** Să se rezolve inecuația $2x^2-5x+3\le 0$.

5p **3.** Să se determine inversa funcției bijective $f:(0,\infty)\to(1,\infty),\ f(x)=x^2+1$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,...,10\}$. Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii *A*.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât distanța dintre punctele $A(2,m)$ și $B(m,-2)$ să fie 4.

5p **6.** Să se calculeze $\cos\dfrac{23\pi}{12}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 001

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, cu $a, b\in\mathbb{R}$ și $b\neq 0$.

5p **a)** Să se arate că dacă matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relația $AX=XA$, atunci există $u, v\in\mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se arate că $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ A^n=\begin{pmatrix} x_n & y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$, unde $x_n=\dfrac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}$, $y_n=\dfrac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^3=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{Z}_7$ și polinomul $f=\mathrm{X}^6+a\mathrm{X}+\hat{5}\in\mathbb{Z}_7[\mathrm{X}]$.

5p **a)** Să se verifice că pentru orice $b\in\mathbb{Z}_7$, $b\neq\hat{0}$, are loc relația $b^6=\hat{1}$.

5p **b)** Să se arate că $x^6+\hat{5}=(x^3-4)(x^3+4),\ \forall x\in\mathbb{Z}_7$.

5p **c)** Să se demonstreze că pentru orice $a\in\mathbb{Z}_7$, polinomul f este reductibil în $\mathbb{Z}_7[X]$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 001

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x-ax,$, unde $a\in\mathbb{R}, a>0$.

5p **a)** Să se determine asimptota oblică la graficul funcției f către $-\infty$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției *f*.

5p **c)** Să se determine $a\in(0,\infty)$ știind că $f(x)\ge 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Să se arate că funcția $F:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=2\sqrt{x}(\ln x-2),$ este o primitivă pentru funcția *f*.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă G a funcției f este crescătoare pe $[1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției *f*, axa *Ox* și dreptele de ecuații $x=\dfrac{1}{e}$ și $x=e$. .

VARIANTA 2

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 002

5p **1.** Să se calculeze $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{24}$.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{3x-1}{x+1}+\frac{x+1}{2x-1}=3$.

5p **3.** Să se determine inversa funcției bijective $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulțimea numerelor de două cifre, să avem $a\neq b$.

5p **5.** Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului ABC, unde $A(-2,-1), B(2,0), C(0,6)$.

5p **6.** Fie vectorii $\vec{u}=m\vec{i}+3\vec{j}$ și $\vec{v}=(m-2)\vec{i}-\vec{j}$. Să se determine $m>0$ astfel încât $\vec{u}\perp\vec{v}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 002

1. Se consideră matricea $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că există $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2=aA$.

5p **b)** Să se determine $\text{rang}(A^{10})$.

5p **c)** Să se calculeze $(A-A^t)^{2008}$.

2. Pentru a,b din mulțimea $M=[0,\infty)$ se definește operația $a*b=\ln(e^a+e^b-1)$.

5p **a)** Să se arate că pentru orice $a,b\in M$, rezultă că $a*b\in M$.

5p **b)** Să se arate că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **c)** Pentru $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, să se determine $a\in M$ astfel încât $\underbrace{a*a*...*a}_{\text{de } n \text{ ori } a}=2a$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 002

1. Se consideră șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de $a_1\in(0,1)$ și $a_{n+1}=a_n\left(1-\sqrt{a_n}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $a_n\in(0,1)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **b)** Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

5p **c)** Să se arate că șirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dat de $b_n={a_1}^2+{a_2}^2+...+{a_n}^2$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, este mărginit superior de a_1.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Să se arate că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$, $x\in\mathbb{R}$, este o primitivă pentru funcția f.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței delimitate de dreptele $x=0, x=1, Ox$ și graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=(2x+1)f(x)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} f(x)dx$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

VARIANTA 3

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 003

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^2-8x+1$. Să se determine valoarea minimă a funcției f.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x-1)+\lg(6x-5)=2$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta sa fie pătrat perfect.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(6,4)$ și este perpendiculară pe dreapta $d: 2x-3y+1=0$.

5p **6.** Știind că $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, să se calculeze $\cos 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 003

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A^2+B^2)$.

5p **b)** Să se justifice că, $\forall\, X, Y\in M_2(\mathbb{C})$, $\det(X\cdot Y)=\det(X)\cdot\det(Y)$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $X, Y\in M_2(\mathbb{R})$ și $X\cdot Y=Y\cdot X$, atunci $\det(X^2+Y^2)\geq 0$.

2. Se consideră cunoscut că $(\mathbb{Z},*,\circ)$ este un inel comutativ, unde $x*y=x+y-3$ și $x\circ y=x\cdot y-3x-3y+12$, $\forall\, x, y\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se arate că elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$” este 4.

5p **b)** Să se determine $a, b\in\mathbb{Z}$ astfel încât între inelele $(\mathbb{Z},*,\circ)$ și $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ să existe un izomorfism de forma $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=a\cdot x+b$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{Z}$ ecuația $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de 2008 ori } x}=2^{2008}+3$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 003

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=18x^2-\ln x$.

5p **a)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției *f*.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $f(x)\geq a, \forall x\in(0,\infty)$.

5p **c)** Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației $f(x)=m$, unde *m* este un parametru real.

2. Se consideră funcțiile $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_a(x)=\frac{1}{|x-a|+3}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{R}$, funcția f_a are primitive strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^3 f_2(x)dx$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{a\to\infty}\int_0^3 f_a(x)dx$.

VARIANTA 4

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 004

5p **1.** Să se calculeze $\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2$.

5p **2.** Să se arate că vârful parabolei $y=x^2+5x+1$ este situat în cadranul III.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $9^x-3^{x+1}+\frac{8}{9}=0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă exact două cifre egale.

5p **5.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u}=(3-2a)\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ și $\vec{v}=(2a+1)\vec{i}+2\vec{j}$ sunt perpendiculari.

5p **6.** Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ascuțitunghic ABC știind că $AB=6$, $AC=10$ și că aria triunghiului ABC este egală cu $15\sqrt{3}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 004

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze rangul matricei A.

5p **b)** Să se demonstreze că $\det(A^t\cdot A)=0$.

5p **c)** Să se calculeze $\det(A\cdot A^t)$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ definim legea de compoziție $x*y=5xy+6x+6y+6$.

5p **a)** Să se arate că legea "$*$" este asociativă.

5p **b)** Să se determine elementele simetrizabile ale mulțimii $\mathbb{Z}$ în raport cu legea "$*$".

5p **c)** Să se rezolve ecuația $\underbrace{x*x*x*...*x}_{\text{de 2008 ori } x}=-1$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 004

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f nu are puncte de extrem local.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n)\right)^{n^2}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $I_n=\int_0^2\frac{x^n}{x^n+1}dx$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n\le 1+\frac{1}{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

VARIANTA 5

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 005

5p **1.** Să se calculeze $\frac{1}{1+2i}+\frac{1}{1-2i}$.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ inecuația $x^2-10x+12\le 0$.

5p **3.** Să se determine inversa funcției bijective $f:(1,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=x-1$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$ cu proprietatea că $f(1)=f(4)$.

5p **5.** Să se determine coordonatele vârfului D al paralelogramului $ABCD$ dacă $A(-2,9), B(7,-4), C(8,-3)$.

5p **6.** Triunghiul ABC are $B=\frac{\pi}{3}$ și lungimea razei cercului circumscris egală cu 1. Să se calculeze lungimea laturii AC.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 005

1. Se consideră punctele $A(0, 6)$, $B(1, 4)$, $C(-1, 8)$ și matricea $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & a\\ 6 & 4 & 8 & b\end{pmatrix}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că punctele A, B, C sunt coliniare.

5p **b)** Să se determine rangul matricei M în cazul $a=3, b=0$.

5p **c)** Să se arate că dacă unul dintre minorii de ordin trei ai lui M, care conțin ultima coloană, este nul, atunci $\text{rang}(M)=2$.

2. Se știe că $(G,\circ)$ este grup, unde $G=(3,\infty)$ și $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to G$, $f(x)=x+3$.

5p **a)** Să se calculeze $4\circ 5\circ 6$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este un izomorfism de grupuri, de la $((0,\infty),\cdot)$ la $(G,\circ)$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă H este un subgrup al lui G care conține toate numerele naturale $k\ge 4$, atunci H conține toate numerele raționale $q>3$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 005

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$.

5p **a)** Să se calculeze derivata funcției f.

5p **b)** Să se determine punctele graficului funcției f în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta de ecuație $9y=2x$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $x>1$, atunci $\ln x\ge\frac{2(x-1)}{x+1}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$ și șirul $(a_n)_{n\ge 1}, a_n=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$.

5p **a)** Să se arate că $f(k+1)\le\int_k^{k+1}f(x)dx\le f(k), \forall k\in(0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx, n\in\mathbb{N}$.

5p **c)** Să se arate că șirul $(a_n)_{n\ge 1}$ este convergent.

VARIANTA 6

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 006

5p **1.** Să se calculeze suma tuturor numerelor naturale de două cifre care se divid cu 11.

5p **2.** Să se determine funcția f de gradul al doilea dacă $f(-1)=1,\ f(0)=1,\ f(1)=3$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $(0,\pi)$ ecuația $\sin 3x=\sin x$.

5p **4.** Câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu cifrele $2,4,6$ sau 8?

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC cu vârfurile în $A(1,2)$, $B(2,-2)$ și $C(4,6)$. Să se calculeze $\cos B$.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC știind că $AB=6, C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 006

1. Fie $n\in\mathbb{N}^*$, mulțimea S_n a permutărilor de *n* elemente și permutarea identică $e=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ 1 & 2 & \ldots & n\end{pmatrix}$.

5p **a)** Pentru $n=4$ și $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}\in S_4$, să se calculeze σ^4.

5p **b)** Să se demonstreze că pentru orice $\sigma\in S_n$, există $p\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $\sigma^p=e$.

5p **c)** Să se determine o permutare $\tau\in S_5,\ \tau\neq e$ astfel încât $\tau^5=\tau$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{C}$, x_1, x_2, $x_3\in\mathbb{C}$ rădăcinile ecuației $x^3-2x^2+2x-a=0$ și determinantul

$$\Delta=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_3 & x_1 & x_2\\ x_2 & x_3 & x_1\end{vmatrix}.$$

5p **a)** Pentru $a=1$, să se rezolve ecuația în mulțimea numerelor complexe.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{R}$, ecuația are o singură rădăcină reală.

5p **c)** Să se arate că valoarea determinantului Δ nu depinde de *a*.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 006

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{x\cdot\ln x}$.

5p **a)** Să se arate că $f'(x)=f(x)(1+\ln x),\forall x>0$.

5p **b)** Să se determine valoarea minimă a funcției *f*.

5p **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $(0,\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f_n,g_n:(-1,\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{x^{2n}}{1+x}$, $g_n(x)=1-x+x^2-x^3+\ldots-x^{2n-1}+f_n(x)$ cu $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 g_2(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $0\le\int_0^1 f_n(x)dx\le\frac{1}{2n+1},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right), n\in\mathbb{N}$.

VARIANTA 7

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 007

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z=\dfrac{8+i}{7-4i}$.

5p **2.** Să se determine valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+6x-9$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $[0,2\pi)$ ecuația $\sin x=-\dfrac{1}{2}$.

5p **4.** Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care mulțimea $\{1,2,...,n\}$ are exact 120 de submulțimi cu două elemente.

5p **5.** Se știe că în triunghiul ABC vectorii $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ au același modul. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC care are lungimile laturilor egale cu 3, 4 și 5.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 007

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&0&1\end{pmatrix}$ și sistemul $\begin{cases}x+2y+3z+4t=3\\y+2z+3t=2\\z+2t=1\end{cases}$.

5p **a)** Să se determine rangul matricei A.

5p **b)** Să se determine mulțimea soluțiilor sistemului.

5p **c)** Să se demonstreze că ecuația $XA=B$ nu are soluții $X\in\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$.

2. Pentru fiecare $t,n\in\mathbb{Z}$, se consideră matricea $A(n)=\begin{pmatrix}2^n&2^n\\2^n&2^n\end{pmatrix}$ și mulțimile $G=\{A(k)\mid k\in\mathbb{Z}\}$, $H_t=\{A(k\cdot t-1)\mid k\in\mathbb{Z}\}$. Se admite faptul că $(G,\cdot)$ este un grup, unde „$\cdot$” este înmulțirea matricelor.

5p **a)** Să se arate că $\forall\, n,p\in\mathbb{Z}$, $A(n)\cdot A(p)=A(n+p+1)$.

5p **b)** Să se demonstreze că, pentru orice $t\in\mathbb{Z}$, H_t este un subgrup al grupului $(G,\cdot)$.

5p **c)** Să se demonstreze că grupurile $(G,\cdot)$ și $(\mathbb{Z},+)$ sunt izomorfe.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 007

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$ și șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n}-\ln n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $k>0$, $\dfrac{1}{k+1}<f(k+1)-f(k)<\dfrac{1}{k}$.

5p **c)** Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător și are termenii pozitivi.

2. Se consideră funcțiile $F:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=a\ln(x+1)+b\ln(x^2+1)+c\operatorname{arctg}x$ și $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$.

5p **a)** Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$, astfel încât F să fie o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Să se studieze monotonia funcției F, în cazul în care ea este primitivă a funcției f.

VARIANTA 8

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 008

5p **1.** Știind că $z\in\mathbb{C}$ și că $z^2+z+1=0$, să se calculeze $z^4+\frac{1}{z^4}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+x+c$. Știind că punctele $A(1,2)$ și $B(0,3)$ aparțin graficului funcției f, să se determine numerele reale a și c.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{7x+1}-x=1$.

5p **4.** Câte numere de patru cifre distincte se pot forma cu cifre din mulțimea $\{1,3,5,7,9\}$?

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele E și F astfel încât $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{DF}=2\overrightarrow{FE}$. Să se demonstreze că punctele A, F și C sunt coliniare.

5p **6.** Fie triunghiul ABC. Să se calculeze lungimea înălțimii corespunzătoare laturii BC știind că $AB=13$, $AC=14$ și $BC=15$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 008

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $A^2-A-2I_3=O_3$.

5p **c)** Să se determine A^{-1}.

2. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ și ecuația $x^3-x+a=0$, cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3.

5p **a)** Să se calculeze $(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)$.

5p **b)** Să se calculeze x_2, x_3, dacă $x_1=2$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care x_1, x_2, x_3 sunt numere întregi.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 008

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\cos x$ și șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_0\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, $x_{n+1}=f(x_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $x_n\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2. Se consideră șirul de numere reale $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit de $I_0=\frac{\pi}{2}$ și $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător.

5p **c)** Să se arate că $nI_nI_{n-1}=\frac{\pi}{2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

VARIANTA 9

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 009

5p **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2 = -9$.

5p **2.** Să se determine $a \in \mathbb{R}^*$ pentru care ecuația $ax^2 + (3a-1)x + a + 3 = 0$ are rădăcini reale.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $[0, 2\pi]$ ecuația $\cos 4x = 1$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ cu proprietatea că $f(1) = f(2)$.

5p **5.** Să se calculeze lungimea razei cercului înscris într-un triunghi care are lungimile laturilor $13, 14, 15$.

5p **6.** Triunghiul ABC are $B = \frac{\pi}{6}, C = \frac{\pi}{4}$. Să se demonstreze că $\frac{AB}{AC} = \sqrt{2}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 009

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze A^4.

5p **b)** Știind că matricea $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relațiile $B \cdot E_1 = E_1 \cdot B$ și $B \cdot E_2 = E_2 \cdot B$, să se demonstreze că există $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă pentru orice $X \in M_2(\mathbb{R})$, $A^n \cdot X = X \cdot A^n$, atunci există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n = 4k$.

2. Se consideră polinomul $f = 2X^4 + aX^3 + 3X^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{C}$.

5p **a)** Să se afle rădăcinile polinomului f știind că $a = b = 0, c = -5$.

5p **b)** Să se verifice că
$$(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_4)^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 - 16\right).$$

5p **c)** Pentru $a = 4$, să se determine $b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să aibă toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 009

1. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x - \sin x - n$.

5p **a)** Să se arate că funcția f_n este strict crescătoare.

5p **b)** Să se arate că, dacă se notează x_n unica soluție a ecuației $f_n(x) = 0$, atunci șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este nemărginit.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{n}$, unde șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ a fost definit la **b)**.

2. Fie funcțiile $f, g_n : [0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1-x}, g_n(x) = \frac{x^n}{1-x}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - g_2(x))dx$.

5p **b)** Să se arate că $0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} g_n(x)dx \leq \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 2^n} \right) = \ln 2$.

VARIANTA 10

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 010

5p **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2=-4$.

5p **2.** Să se determine funcția f de gradul întâi pentru care $f(f(x))=2f(x)+1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\lg(x+1)-\lg 9=1-\lg x$.

5p **4.** Să se determine numărul termenilor iraționali din dezvoltarea $\left(3+\sqrt[3]{3}\right)^{10}$.

5p **5.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u}=(a-2)\vec{i}+3\vec{j}$ și $\vec{v}=8\vec{i}-(20-2a)\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Să se arate că vectorii $\vec{u}=5\vec{i}-4\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}$ formează un unghi obtuz.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 010

1. Se consideră permutările $e,\alpha\in S_3$, $e=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$, $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze α^3.

5p **b)** Să se rezolve ecuația $\alpha^{2008}\cdot x=e$, $x\in S_3$.

5p **c)** Să se demonstreze că, oricare ar fi ordinea factorilor, produsul tuturor permutărilor din S_3 este permutare impară.

2. Pentru fiecare $a\in\mathbb{Z}_5$ se consideră matricea $A(a)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$, $A(a)=\begin{pmatrix}a&\hat{2}\\\hat{2}&a\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că $\forall x\in\mathbb{Z}_5$, $x^5=x$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\forall a\in\mathbb{Z}_5$, $(A(a))^5=A(a)$.

5p **c)** Să se determine valorile lui $a\in\mathbb{Z}_5$ pentru care $(A(a))^{2008}=A(a)$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 010

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\operatorname{arctg}x-\ln\left(1+x^2\right)$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că funcția f' este mărginită.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^{2n}}dx$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n\leq\frac{1}{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

VARIANTA 11

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 011

5p **1.** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ știind că numerele $2,\ a,\ b$ sunt în progresie geometrică și $2,\ 17,\ a$ sunt în progresie aritmetică.

5p **2.** Să se rezolve ecuația $f(f(x)) = 0$ știind că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = -3x + 2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $[0, 2\pi)$ ecuația $\operatorname{tg}(-x) = 1 - 2\operatorname{tg} x$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{0,1,2\}\to\{0,1,2\}$ care verifică relația $f(2) = 2$.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC și punctele D, E astfel încât $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EC}$. Să se arate că dreptele DE și BC sunt paralele.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, dacă $A = \frac{\pi}{4},\ B = \frac{\pi}{6}$ și $AB = 6$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 011

1. Pentru $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ și matricea transpusă A^t.

5p **a)** Pentru $a = c = 1$ și $b = d = 0$, să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se arate că $A \cdot A^t = \alpha \cdot I_4$, unde $\alpha = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $A \neq O_4$, atunci A este inversabilă.

2. Se consideră $a, b, c \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, cu rădăcinile $x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbb{C}$, astfel încât $|x_1| \le 1, |x_2| \le 1, |x_3| \le 1$.

5p **a)** Să se demonstreze că $|a| \le 3$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $c < 0$, polinomul are cel puțin o rădăcină reală în intervalul $(0, \infty)$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $a = 1,\ c = -1,$ atunci $b = -1$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 011

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}-\{-2\}\to\mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x+2}e^{|x|}$.

5p **a)** Să se studieze derivabilitatea funcției f în punctul $x_0 = 0$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.

5p **c)** Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației $f(x) = m$, cu $m \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ și $g:(0,1]\to\mathbb{R},\ g(x) = \int_x^1 \frac{\sin t}{t}\,dt$.

Se admite cunoscut faptul că $f(x) \ge 0, \forall x \ge 0$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că funcția g este strict descrescătoare.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} g(x) > 0{,}9$.

VARIANTA 12

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 012

5p **1.** Să se calculeze suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a)_{n\geq 1}$, știind că $a_4 - a_2 = 4$ și $a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 30$.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} = \frac{7}{6}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $[0, 2\pi)$ ecuația $\cos 2x = \frac{1}{2}$.

5p **4.** Să se determine $a > 0$ știind că termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt[3]{a} + \frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^{12}$ este egal cu 1848.

5p **5.** Să se determine ecuația simetricei dreptei $d: 2x - 3y + 1 = 0$ față de punctul $A(-3, 4)$.

5p **6.** Știind că $\operatorname{ctg} x = 3$, să se calculeze $\operatorname{ctg} 2x$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 012

1. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^2 + X + 1$, cu rădăcinile x_1, x_2 și $g = aX^2 + bX + c$, cu $a \neq 0$. Fie matricele $A, V \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix}$ și $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $\det(V) = 3(x_2 - x_1)$.

5p **b)** Să se arate că $A \cdot V = \begin{pmatrix} g(1) & g(x_1) & g(x_2) \\ g(1) & x_1 g(x_1) & x_2 g(x_2) \\ g(1) & x_1^2 g(x_1) & x_2^2 g(x_2) \end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se arate că $\det(A) = 0$ dacă și numai dacă $a + b + c = 0$ sau $a = b = c$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$, $f(x) = x^4 + \hat{4}x$.

5p **a)** Să se calculeze $f(\hat{0})$ și $f(\hat{1})$.

5p **b)** Să se arate că funcția f nu este surjectivă.

5p **c)** Să se descompună polinomul $X^4 + \hat{4}X \in \mathbb{Z}_5[X]$ în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 012

1. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{x}}$.

5p **a)** Să se arate că $x - (x+1)\ln(x+1) < 0, \forall x > 0$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

5p **c)** Să se arate că funcția f este descrescătoare.

2. Se consideră funcția $f: [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$, $\forall x > 1$ și $f(1) = 1 - \frac{1}{e}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(2)$.

5p **b)** Să se demonstreze relația $f(x) \leq \frac{1}{x}, \forall x \geq 1$.

5p **c)** Să se demonstreze relația $f(x+1) = x f(x) - \frac{1}{e}, \forall x > 1$.

VARIANTA 13

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 013

5p **1.** Să se verifice egalitatea $(1+i\sqrt{3})^2+(1-i\sqrt{3})^2=-4$.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x=6\left(\sqrt{x-2}-1\right)$.

5p **4.** Să se determine termenul care nu conține pe x din dezvoltarea $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^9$.

5p **5.** Să se calculeze distanța de la punctul $A(3,0)$ la dreapta $d: 3x-4y+1=0$.

5p **6.** Triunghiul ABC are $AB=4$, $BC=5$ și $CA=6$. Să se arate că $B=2C$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 013

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y+z=3 \\ mx+y+z=3m \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$. Pentru fiecare $m\in\mathbb{R}$, notăm cu S_m mulțimea soluțiilor reale ale sistemului.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

5p **b)** Să se arate că pentru orice $m\in\mathbb{R}$ sistemul este compatibil.

5p **c)** Să se determine $\min\left\{x^2+y^2+z^2 \mid (x,y,z)\in S_1\right\}$.

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=A\cdot B$ și mulțimea

$G=\left\{ X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \,\middle|\, \det(X)=1 \right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $A^4=B^6=I_2$.

5p **b)** Să se arate că $(G,\cdot)$ este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile de ordin doi, cu coeficienți complecși.

5p **c)** Să se demonstreze că $C^n\neq I_2$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 013

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2-4}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine asimptota oblică a graficului funcției f spre ∞.

5p **b)** Să se arate că $f(x)f'(x)=x\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}, \forall x\in\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

5p **c)** Să se determine derivatele laterale ale funcției f în punctul $x_0=-2$.

2. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $F_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}, F_n(x)=\int_0^x t^n e^{-t}dt$, $x>0$.

5p **a)** Să se calculeze $F_1(x), x>0$.

5p **b)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției F_n.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} F_2(x)$.

VARIANTA 14

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 014

5p **1.** Să se calculeze $\lg\frac{1}{2}+\lg\frac{2}{3}+\lg\frac{3}{4}+...+\lg\frac{99}{100}$.

5p **2.** Să se determine $a\in\mathbb{R}^*$ pentru care inecuația $ax^2+2(a+1)x+2a-1\geq 0$ nu are soluții în mulțimea numerelor reale.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{8-x}=\sqrt[3]{9-4x}$.

5p **4.** Să se determine numărul elementelor unei mulțimi știind că aceasta are exact 45 de submulțimi cu două elemente.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei AB știind că $A(2,3)$ și $B(-5,4)$.

5p **6.** Triunghiul ABC ascuțitunghic are $AC=2\sqrt{3}$ și lungimea razei cercului circumscris egală cu 2. Să se calculeze $m(\sphericalangle B)$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 014

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}^*$.

5p **a)** Să se calculeze rangul matricei A.

5p **b)** Să se arate că există $d\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2=dA$.

5p **c)** Să se arate că există matricele $K\in M_{3,1}(\mathbb{R})$ și $L\in M_{1,3}(\mathbb{R})$ astfel încât $A=K\cdot L$.

2. Se consideră numărul $a=\sqrt{3}-i\in\mathbb{C}$ și polinomul $f\in\mathbb{Q}[X]$, $f=X^4-4X^2+16$.

5p **a)** Să se arate că $f(a)=0$.

5p **b)** Să se determine rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Să se arate că polinomul f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 014

1. Pentru $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 3$ se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=\sin^n x$ și se notează cu x_n abscisa punctului de inflexiune a graficului funcției din intervalul $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

5p **a)** Să se arate că $f_n''(x)=n(n-1)\sin^{n-2}x-n^2\sin^n x$, $\forall n\in\mathbb{N}^*, n\geq 3$ și $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $\sin x_n=\sqrt{\frac{n-1}{n}}$, $n\geq 3$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ și funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3-3x+a}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $F(x)=\frac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că funcția F este o primitivă pentru funcția f.

5p **b)** Pentru $a=2$, să se determine aria suprafeței plane cuprinsă între graficul functiei f, axa Ox și dreptele $x=1$ și $x=2$.

5p **c)** Să se determine a astfel încât $\int_0^2 F(x)dx-\int_{-2}^0 F(x)dx=2$.

VARIANTA 15

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 015

5p **1.** Să se calculeze $\log_3\left(5-\sqrt{7}\right)+\log_3\left(5+\sqrt{7}\right)-\log_3 2$.

5p **2.** Să se determine funcția de gradul al doilea al cărei grafic este tangent la axa *Ox* în punctul $(1,0)$ și trece prin punctul $(0,2)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $[0,2\pi)$ ecuația $\sin x+\cos x=0$.

5p **4.** Câte numere de patru cifre, nu neapărat distincte, se pot forma cu cifre din mulțimea $\{1,3,5,7,9\}$?

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care conține punctul $A(-2,2)$ și este paralelă cu dreapta determinată de punctele $C(2,1)$, $D(-1,-3)$.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$. Să se calculeze $\sin\alpha$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 015

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax+by+cz=1 \\ cx+ay+bz=1 \\ bx+cy+az=1 \end{cases}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei sistemului.

5p **b)** Să se arate că dacă $a^3+b^3+c^3\neq 3abc$, atunci sistemul are soluție unică.

5p **c)** Să se arate că dacă $a+b+c=0$, atunci sistemul este incompatibil.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^4-5X^2+5$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$.

5p **b)** Să se arate că polinomul *f* are toate rădăcinile reale.

5p **c)** Să se arate că dacă *g* este un polinom cu coeficienți reali care are proprietatea că pentru orice *x* real $|g(x)|\le|f(x)|$, atunci există $a\in[-1,1]$ astfel încât $g=af$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 015

1. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 3$, se consideră funcția $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n-nx+1$.

5p **a)** Să se arate că f_n este strict descrescătoare pe $(0;1]$ și strict crescătoare pe $[1;\infty)$.

5p **b)** Să se arate că ecuația $f_n(x)=0$, $x>0$ are exact două rădăcini $a_n\in(0,1)$ și $b_n\in(1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, unde șirul a_n a fost definit la punctul **b)**.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $I_0=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx$ și $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $I_0=\frac{\pi}{4}$.

5p **b)** Să se arate că $I_{2n}=\frac{1}{2n-1}-I_{2n-2}$, $\forall n\in\mathbb{N}, n\ge 2$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\right)=I_0$.

VARIANTA 16

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 016

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z=\dfrac{2-i}{2+i}$.

5p **2.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\dfrac{x^2+ax+2}{x^2+1}\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\arcsin\dfrac{1}{2}+\arcsin x=\dfrac{\pi}{3}$.

5p **4.** Să se rezolve ecuația $C_n^8=C_n^{10}$.

5p **5.** Să se afle măsura celui mai mare unghi al triunghiului ABC știind că $A(2,-2)$, $B(2,3)$, $C(-2,3)$.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ astfel încât $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$. Să se calculeze $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 016

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{X=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbb{R},\ a>0\right\}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $A,B\in G$, atunci $AB\in G$.

5p **b)** Să se găsească două matrice $C,D\in G$ pentru care $CD\neq DC$.

5p **c)** Să se arate că dacă $A\in G$, atunci $I_2-A+A^2\in G$.

2. Se consideră $a,b,c\in\mathbb{Q}$ și polinomul $f=X^3+aX^2+bX+c$.

5p **a)** Să se determine a,b,c astfel încât polinomul f să aibă rădăcinile $x_1=x_2=1$ și $x_3=-2$.

5p **b)** Să se arate că dacă f are rădăcina $\sqrt{2}$, atunci f are o rădăcină rațională.

5p **c)** Să se arate că dacă $a,b,c\in\mathbb{Z}$, iar numerele $f(0)$ și $f(1)$ sunt impare, atunci polinomul f nu are rădăcini întregi.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 016

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\\ 0, & x=0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este mărginită pe $\mathbb{R}$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=(1-x)^n$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f_2(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $\int_0^1 xf_n(x)dx=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n\left(\dfrac{x}{n}\right)dx$.

VARIANTA 17

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 017

5p **1.** Să se determine partea imaginară a numărului $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$.

5p **2.** Să se determine imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-x+2$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{-2x+1}=5$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulțimea numerelor de două cifre, să avem $a+b=4$.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(-1,1)$ și este perpendiculară pe dreapta $d:5x-4y+1=0$.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC știind că $AB=6$, $B=\frac{\pi}{4}$ și $C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 017

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}-3 & -8\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze A^2-B^2.

5p **b)** Să se calculeze $\det(I_2+A+A^2+A^3+A^4)$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $X^2=I_2$ are o infinitate de soluții în $M_2(\mathbb{Z})$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Q}[X]$, $f=X^4+X^3+X^2+X+1$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ și $g=X^2-1$.

5p **a**) Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

5p **b)** Să se calculeze $(1-x_1)\cdot(1-x_2)\cdot(1-x_3)\cdot(1-x_4)$.

5p **c)** Să se calculeze $g(x_1)\cdot g(x_2)\cdot g(x_3)\cdot g(x_4)$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 017

1. Se consideră șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $x_1\in(0,1)$ și $x_{n+1}=\frac{x_n^{\,5}+3x_n}{4},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $x_n\in(0,1),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **b)** Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+2}}{x_n}=\frac{9}{16}$.

2. Se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{1}{n^2+x^2},\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f_1, axele de coordonate și dreapta $x=1$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 x\left(f_1(x)\right)^2dx$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(f_n(1)+f_n(2)+f_n(3)+\ldots+f_n(n)\right)=\frac{\pi}{4}$.

VARIANTA 18

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 018

5p **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^2-2x+4=0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$. Să se afle valoarea minimă a funcției *f*.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\arcsin x+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{2}$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând două numere din mulțimea $\{0,1,2,...,9\}$, cel puțin un număr să fie prim.

5p **5.** Să se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC, dacă $A(-1,0)$, $B(0,2)$, $C(2,-1)$.

5p **6.** Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)$, știind că $A(-3,4)$, $B(4,-3)$ și $C(1,2)$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 018

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze A^3.

5p **b)** Să se afle rangul matricei I_3+A+A^t.

5p **c)** Să se determine inversa matricei I_3+A.

2. Se consideră $a,b\in\mathbb{R}$ și polinomul $f=X^3+4aX^2+20X+b$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se determine x_1, x_2, x_3 în cazul $a=2$, $b=0$.

5p **b)** Să se demonstreze că $(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2=8(4a^2-5)$.

5p **c)** Să se determine a,b astfel încât polinomul f să aibă o rădăcină dublă egală cu $-a$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 018

1. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$ și șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de $x_0=2$, $x_{n+1}=f(x_n),\forall n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita 1.

5p **c)** Să se arate că șirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de $y_n=x_0+x_1+x_2+...+x_n-n$, este convergent.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\cos x$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x\cdot\int_0^x f(t)\,dt$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că F este funcție pară.

5p **c)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției F.

VARIANTA 19

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 019

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{8}$.

5p **2.** Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ știind că graficul său și graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-3x+3$ sunt simetrice față de dreapta $x=1$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $3^{2x+1}-10\cdot 3^{x+1}+27=0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând trei cifre din mulțimea $\{0,1,2,...,9\}$, toate acestea să fie pare.

5p **5.** Să se determine ecuația medianei duse din vârful A al triunghiului ABC, unde $A(1,2)$, $B(2,3)$ și $C(2,-5)$.

5p **6.** Știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, să se arate că $\operatorname{ctg}2x=\frac{\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x}{2}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 019

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y+z+t=0 \\ x+y-z+t=0 \\ x+y+z-t=0 \end{cases}$ și A matricea sistemului.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul.

5p **c)** Să se determine A^{-1}.

2. Fie polinomul $f=X^4+2X^3+aX^2-2X+1\in\mathbb{R}[X]$ și $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ rădăcinile sale.

5p **a)** Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$.

5p **b)** Să se arate că $f(x)=x^2\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x-\frac{1}{x}\right)+a+2\right]$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care toate rădăcinile polinomului *f* sunt numere reale.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 019

1. Se consideră funcția $f:(-2,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{2+x}{2-x}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției *f*.

5p **b)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției *f*.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x^a f\left(\frac{1}{x}\right)$, $a\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{-x^3+2x^2-5x+8}{x^2+4}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^4 (x+f(x)-2)^2\,dx$.

5p **c)** Știind că funcția f este bijectivă, să se calculeze $\int_{\frac{4}{5}}^{2} f^{-1}(x)\,dx$.

VARIANTA 20

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 020

5p **1.** Să se verifice dacă $2 \in \left(\log_3 4, \sqrt{5}\right)$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^2 - 2x + 2 = 0$.

5p **3.** Să se rezolve în $[0, 2\pi)$ ecuația $\sin x + \cos x = -1$.

5p **4.** Să se calculeze $C_4^4 + C_5^4 + C_6^4$.

5p **5.** Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se consideră punctele M și respectiv N astfel încât $\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{MB}$ și $MN \parallel BC$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{CN} = m\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul triunghiului OAB, știind că $O(0,0)$, $A(-1,2)$ și $B(-2,3)$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 020

1. Se consideră triunghiul ABC, cu laturile $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ și sistemul $\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$.

5p **a)** Să se rezolve sistemul în cazul $a = 3, b = 4, c = 5$.

5p **b)** Să se demonstreze că, pentru orice triunghi, sistemul are soluție unică.

5p **c)** Știind că soluția sistemului este (x_0, y_0, z_0), să se demonstreze că $x_0, y_0, z_0 \in (-1, 1)$.

2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii G.

5p **b)** Să se arate că $AB \in G$, pentru orice $A, B \in G$.

5p **c)** Să se determine numărul matricelor din mulțimea G care au determinantul nul.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 020

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2e^x + 3x^2 - 2x + 5$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f nu este surjectivă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt[3]{f(-1) + f(-2) + f(-3) + ... + f(-n)} - n \right)$.

2. Se consideră funcția $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^3)}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 (t^3 + 1) f(t)\, dt$.

5p **b)** Să se arate că $\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(t)\, dt = \int_1^x t^3 f(t)\, dt, \ \forall x > 0$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)\, dt$.

VARIANTA 21

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 021

5p **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^2-8x+25=0$.

5p **2.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$, pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(a+1)x^2+3(a-1)x+a-1$, intersectează axa Ox în două puncte distincte.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

5p **4.** Să se calculeze $C_8^4-C_7^4-C_7^3$.

5p **5.** Să se determine ecuația perpendicularei duse din punctul $A(1,2)$ pe dreapta $d: x+y-1=0$.

5p **6.** Știind că $\sin x=\frac{1}{3}$, să se calculeze $\cos 2x$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 021

1. Pentru $a,b,c\in\mathbb{R}^*$, se consideră sistemul $\begin{cases} ax+by+cz=b \\ cx+ay+bz=a \\ bx+cy+az=c \end{cases}$, $x,y,z\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că determinantul sistemului este $\Delta=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

5p **c)** Știind că $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$, să se arate că sistemul are o infinitate de soluții (x,y,z), astfel încât $x^2+y^2=z-1$.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\middle|\ a,b,c\in\mathbb{Z}_4\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii G.

5p **b)** Să se dea un exemplu de matrice $A\in G$ cu proprietatea că $\det A\neq\hat{0}$ și $\det A^2=\hat{0}$.

5p **c)** Să se determine numărul soluțiilor ecuației $X^2=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X\in G$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 021

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}$.

5p **b)** Să se arate că ecuația $f'(x)=0$ are exact trei rădăcini reale.

5p **c)** Să se determine valoarea minimă a funcției f.

2. Se consideră o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că $xf(x)=\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\pi} x^2 f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este integrabilă pe intervalul $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se arate că $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx\le\cos 1$.

VARIANTA 22

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 022

5p **1.** Să se calculeze $1+i+i^2+...+i^{10}$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$, $g(x)=2x-1$. Să se rezolve ecuația $(f\circ g)(x)=0$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\lg(8x+9)+\lg x=1+\lg(x^2-1)$.

5p **4.** Să se rezolve inecuația $C_n^2<10$, $n\geq 2$, n natural.

5p **5.** Se consideră dreptele de ecuații $d_1: x-2y=0$ și $d_2: 2x-4y-1=0$. Să se calculeze distanța dintre cele două drepte.

5p **6.** Să se calculeze $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 022

1. Fie sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ a^3x+b^3y+c^3z=1 \end{cases}$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$, distincte două câte două și A matricea sistemului.

5p **a)** Să se arate că $\det(A)=(a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul în cazul $a+b+c\neq 0$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $a+b+c=0$, atunci sistemul este incompatibil.

2. Se consideră șirul de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $a_0=0$ și $a_{n+1}=a_n^2+1$, $\forall n\in\mathbb{N}$ și polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, cu $f(0)=0$ și cu proprietatea că $f(x^2+1)=(f(x))^2+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(5)$.

5p **b)** Să se arate că $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(a_n)=a_n$.

5p **c)** Să se arate că $f=X$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 022

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^4+3}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine mulțimea valorilor funcției *f*.

5p **c)** Să se arate că $|f(x)-f(y)|\leq|x-y|, \forall x, y\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+2$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_2^3 \dfrac{f(x)}{x-1}dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-1}^0 \dfrac{x^2+4}{f(x)}dx$.

5p **c)** Să se determine punctele de extrem ale funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_0^{x^2} f(t)e^t dt$.

VARIANTA 23

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 023

5p **1.** Să se calculeze $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{2x+3}{x+2}=\frac{x-1}{x-2}$.

5p **3.** Să se calculeze $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din primele 40 de numere naturale, acesta să nu conțină cifra 7.

5p **5.** Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC, dacă $A(5,-3), B(2,-1), C(0,9)$.

5p **6.** Știind că $\operatorname{tg}\alpha=4$, să se calculeze $\operatorname{tg}2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 023

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ și mulțimea $C(A)=\left\{X=\begin{pmatrix}a & 5b\\ b & a\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{C}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\forall X\in C(A)$, $XA=AX$.

5p **b)** Să se arate că dacă $Y\in C(A)$ și $Y^2=O_2$, atunci $Y=O_2$.

5p **c)** Să se arate că dacă $Z\in C(A), Z\neq O_2$ și Z are toate elementele raționale, atunci $\det Z\neq 0$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{Z}_3$ și polinomul $f=X^3+\hat{2}X^2+a\in\mathbb{Z}_3[X]$.

5p **a)** Să se calculeze $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})$.

5p **b)** Pentru $a=\hat{2}$, să se determine rădăcinile din $\mathbb{Z}_3$ ale polinomului f.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{Z}_3$ pentru care polinomul f este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 023

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x+1$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, ecuația $f(x)=3+\frac{1}{n+1}$ are o unică soluție $x_n\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$, unde x_n este precizat la **a)**.

5p **c)** Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}n(x_n-1)$, unde x_n este precizat la **a)**.

2. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{1+t}dt$.

5p **a)** Să se arate că $\int_0^a\frac{1}{1+t}dt=\ln(1+a),\forall a>-1$.

5p **b)** Să se arate că $f(x)<\ln(1+x),\forall x>0$.

5p **c)** Să se arate că $f(\pi)>f(2\pi)$.

VARIANTA 24

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 024

5p **1.** Să se calculeze $z+\frac{1}{z}$ pentru $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

5p **2.** Să se determine funcția de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care $f(-1)=4, f(1)=2, f(2)=7$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=\frac{11}{6}$.

5p **4.** Să se demonstreze că dacă $x\in\mathbb{R}$ și $|x|\geq 1$, atunci $(1+x)^2+(1-x)^2\geq 4$.

5p **5.** Să se determine ecuația înălțimii duse din B în triunghiul ABC, știind că $A(0,9)$, $B(2,-1)$ și $C(5,-3)$.

5p **6.** Să se calculeze $\left(2\vec{i}+5\vec{j}\right)\cdot\left(3\vec{i}-4\vec{j}\right)-\left(5\vec{i}-3\vec{j}\right)\cdot\left(2\vec{i}+4\vec{j}\right)$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 024

1. Se consideră o matrice $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Se notează cu A^t transpusa matricei *A*.

5p **a)** Să se demonstreze că $\forall z\in\mathbb{C}$, $\forall X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $\det(zX)=z^3\det(X)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\det(A-A^t)=0$.

5p **c)** Știind că $A\neq A^t$, să se demonstreze că $\text{rang}(A-A^t)=2$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{Q}[X]$, cu $f=X^4-5X^2+4$.

5p **a)** Să se determine rădăcinile polinomului *f*.

5p **b)** Să se determine polinomul $h\in\mathbb{Q}[X]$, pentru care $h(0)=1$ și care are ca rădăcini inversele rădăcinilor polinomului *f*.

5p **c)** Știind că *g* este un polinom cu coeficienți întregi, astfel încât $g(-2)=g(-1)=g(1)=g(2)=2$, să se arate că ecuația $g(x)=0$ nu are soluții întregi.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 024

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sin x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se arate că graficul funcției nu are asimptote.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt[3]{f(x)}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f are primitive pe $[0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

5p **c)** Folosind eventual inegalitatea $e^x\geq x+1, \forall x\in\mathbb{R}$, să se arate că $0\leq\int_0^x f(t)\,dt<1, \forall x>0$.

VARIANTA 25

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică informa- tică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - .informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 025

5p **1.** Să se calculeze $(1-i)(1+2i)-3(2-i)$.

5p **2.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$, pentru care parabola $y=(a+1)x^2+ax+3$ și dreapta $y=x+1$ au două puncte distincte comune.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x}-3\cdot 2^{x+1}+8=0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{1,2,3,...,30\}$, acesta să conțină cifra 1.

5p **5.** Se consideră un triunghi ABC și punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PA}$. Fie H ortocentrul triunghiului MNP. Să se demonstreze că $AH=BH=CH$.

5p **6.** Să se calculeze $\sin\frac{7\pi}{4}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 025

1. În mulțimea S_3 a permutărilor de 3 elemente, se consideră permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că permutarea σ este pară.

5p **b)** Să se determine toate permutările $x\in S_3$, astfel încât $x\sigma=\sigma x$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $x^2=\sigma$ cu $x\in S_3$.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\left\{X(a)=I_2+aA\,\middle|\,a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\forall\, a,b\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $X(a)X(b)=X(ab+a+b)$.

5p **b)** Să se arate că $(G,\cdot)$ este un grup abelian, unde „$\cdot$” reprezintă înmulțirea matricelor.

5p **c)** Să se determine $t\in\mathbb{R}$ astfel încât $X(1)X(2)...X(2007)=X(t-1)$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 025

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x$.

5p **a)** Să se arate că funcția este convexă pe intervalul $(0,e]$.

5p **b)** Să se determine asimptotele graficului funcției.

5p **c)** Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 3}$, dat de $a_n=\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}+\frac{\ln 5}{5}+...+\frac{\ln n}{n}-f(n)$, este convergent.

2. Se consideră funcția $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$.

5p **a)** Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f și axele de coordonate.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+...+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$.

VARIANTA 26

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 026

5p **1.** Să se determine partea întreagă a numărului $N=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2007\cdot 2008}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-2x$. Să se calculeze suma $f(f(1))+f(f(2))+f(f(3))+\ldots+f(f(10))$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $3^x+9^x=2$.

5p **4.** Fie mulțimea $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ și o funcție bijectivă $f:A\to A$. Să se calculeze $f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(-1,3)$ și $B(1,-1)$. Să se determine ecuația mediatoarei segmentului AB.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ cu $\sin\alpha=\frac{1}{3}$. Să se calculeze $\operatorname{tg}\alpha$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 026

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$, cu $t\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că dacă matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relația $AX=XA$, atunci există $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $B^n=\begin{pmatrix}\cos nt & -\sin nt\\ \sin nt & \cos nt\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se calculeze A^{2008}.

2. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ și polinomul $f=3X^4-2X^3+X^2+aX-1\in\mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$, unde $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f.

5p **b)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la $(X-1)^2$.

5p **c)** Să se demonstreze că f nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 026

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x-\operatorname{arcctg}x$.

5p **a**) Să se determine asimptota la graficul funcției f spre $+\infty$.

5p **b**) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c**) Să se arate că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, dat de $x_{n+1}=f(x_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ și $x_1=0$, este convergent.

2. Fie funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arcsin x$.

5p **a**) Să se arate că funcția $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=xf(x)$ are primitive, iar acestea sunt strict crescătoare.

5p **b**) Să se calculeze $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$.

5p **c**) Să se arate că $\int_0^1 f(x)\,dx<\frac{\pi}{4}$.

VARIANTA 27

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 027

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $1+i+i^2+i^3+\ldots+i^6$.

5p **2.** Să se determine valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x^2+x$.

5p **3.** Să se rezolve în intervalul $(0;\infty)$ ecuația $\lg^2 x+5\lg x-6=0$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{0,1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ care au proprietatea $f(0)=f(1)=2$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $O(0,0)$, $A(1,2)$ și $B(3,1)$. Să se determine măsura în radiani a unghiului AOB.

5p **6.** Știind că $\alpha\in\mathbb{R}$ și că $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3}$, să se calculeze $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 027

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine rangul matricei $A+I_2$.

5p **b)** Să se demonstreze că dacă $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AX=XA$, atunci există $x, y\in\mathbb{C}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}x&0\\y&x\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se demonstreze că ecuația $Y^2=A$ nu are nicio soluție în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x*y=x+y+xy$.

5p **a)** Să se arate că legea „$*$” este asociativă.

5p **b)** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$. Să se verifice relația $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\ldots*\frac{1}{2008}$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 027

1. Fie funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)\arcsin x$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2-x}$.

5p **b)** Să se determine punctele în care funcția f nu este derivabilă.

5p **c)** Să se arate că funcția f este convexă.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+x+x^2+x^3+x^4$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

5p **a)** Să se arate că funcția F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că funcția F este bijectivă.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^a F^{-1}(x)\,dx$, unde F^{-1} este inversa funcției F și $a=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$.

VARIANTA 28

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 028

5p **1.** Să se determine partea imaginară a numărului $(1+i)^{10}+(1-i)^{10}$.

5p **2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x-3x^2$. Să se ordoneze crescător $f\left(\sqrt{2}\right)$, $f\left(\sqrt{3}\right)$ și $f(2)$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{2x-1}=3$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{0,1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ care au proprietatea că $f(0)=0$.

5p **5.** Fie triunghiul ABC și $M\in(BC)$ astfel încât $\frac{BM}{MC}=\frac{1}{2}$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Știind că $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ și că $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, să se calculeze $\operatorname{tg}\alpha$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 028

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se rezolve ecuația $\det(A-xI_2)=0$.

5p **b)** Să se arate că dacă matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relația $AX=XA$, atunci există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$

5p **c)** Să se arate că ecuația $X^2=A$ are patru soluții în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră mulțimea de funcții $G=\left\{ f_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \;\middle|\; f_{a,b}(x)=ax+b,\ a\in\mathbb{R}^*,\ b\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se calculeze $f_{-1,2}\circ f_{-1,2}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $(G,\circ)$ este un grup, unde „$\circ$” este compunerea funcțiilor.

5p **c)** Să se calculeze $\underbrace{f_{1,1}\circ f_{1,1}\circ\ldots\circ f_{1,1}}_{\text{de 2008 ori } f_{1,1}}$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 028

1. Fie funcția $f:[0,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}(1-\{x\})$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului x.

5p **a**) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$.

5p **b**) Să se determine domeniul de continuitate al funcției f.

5p **c**) Să se determine toate punctele în care funcția f nu este derivabilă .

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2-\sin x}$ și $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

5p **a**) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx$.

5p **b**) Să se demonstreze că funcția F este strict crescătoare.

5p **c**) Să se determine $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$.

VARIANTA 29

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 029

5p **1.** Să se demonstreze că numărul $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ este număr natural.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-5x+2$. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $f(x)\le 0$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x=\sqrt{2-x}$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Alegem la întâmplare o submulțime dintre submulțimile nevide ale lui *A*. Să se calculeze probabilitatea ca submulțimea aleasă să aibă toate elementele impare.

5p **5.** Fie punctele $A(2,0)$, $B(1,1)$ și $C(3,-2)$. Să se calculeze perimetrul triunghiului *ABC*.

5p **6.** Știind că $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și că $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2$, să se calculeze $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 029

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ mx+y+z=m-1, \ m\in\mathbb{R} \\ x+my+2z=-1 \end{cases}$ și matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(A)=0$.

5p **b)** Să se arate că sistemul are soluție pentru orice $m\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul are o soluție de forma $(a, b, -1)$.

2. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$, submulțimea $G=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)\,\middle|\, X=\begin{pmatrix} a & \hat{2}b \\ b & a \end{pmatrix}\right\}$ și matricele $O_2=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că dacă $x, y\in\mathbb{Z}_3$, atunci $x^2+y^2=\hat{0}$ dacă și numai dacă $x=y=\hat{0}$.

5p **b)** Să se arate că mulțimea $H=G\setminus\{O_2\}$ este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^2=I_2$, $X\in G$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 029

1. Se consideră $n\in\mathbb{N}^*$ și funcțiile $f_n, g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=1-x+x^2-x^3+\ldots-x^{2n-1}+x^{2n}$, $g_n(x)=x^{2n+1}+1$.

5p **a)** Să se verifice că $f_n'(x)=\frac{g_n'(x)}{x+1}-\frac{g_n(x)}{(x+1)^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'\left(\frac{1}{2}\right)$.

5p **c)** Să se demonstreze că f_n are exact un punct de extrem local.

2. Fie șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de $I_n=\int_0^2(2x-x^2)^n dx$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se demonstreze că $(2n+1)I_n=2nI_{n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $n\ge 2$.

5p **c)** Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

VARIANTA 30

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 030

5p **1.** Să se demonstreze că numărul $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}\in\mathbb{N}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+2$. Să se determine mulțimea valorilor parametrului real *m* pentru care graficul funcției f intersectează axa *Ox* în două puncte distincte.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Alegem la întâmplare o submulțime a mulțimii *A*. Să se calculeze probabilitatea ca submulțimea aleasă să aibă trei elemente.

5p **5.** Se consideră punctele $A(0,2)$, $B(1,-1)$ și $C(3,4)$. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al triunghiului *ABC*.

5p **6.** Să se demonstreze că $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 030

1. Se consideră numerele reale a, b, c, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2x+3$ și determinanții

$$A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix} \text{ și } B=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ f(a) & f(b) & f(c)\end{vmatrix}.$$

5p **a)** Să se arate că $A=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

5p **b)** Să se arate că $A=B$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice trei puncte distincte, cu coordonate naturale, situate pe reprezentarea grafică a funcției f, aria triunghiului cu vârfurile în aceste puncte este un număr natural divizibil cu 3.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & -9\end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\left\{X(a)=I_2+aA \,\middle|\, a\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $X(a)X(0)=X(a)$ și $X(a)X(b)=X(a+b-10ab)$.

5p **b)** Să se arate că mulțimea $H=\left\{X(a)\,\middle|\, a\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{10}\right\}\right\}$ este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^2=I_2$, $X\in G$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 030

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{x^3}{6}-\sin x$.

5p **a**) Să se determine $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

5p **b**) Să se calculeze derivata a doua $f''(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **c**) Să se demonstreze că $f(x)\le 0, \forall x\ge 0$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2$.

5p **a**) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

5p **b**) Să se determine $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt$.

5p **c**) Să se demonstreze că $\int_0^1\cos\left(x^2\right)dx\ge\frac{9}{10}$.

VARIANTA 31

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 031

5p **1.** Știind că $\log_3 2 = a$, să se demonstreze că $\log_{16} 24 = \frac{1+3a}{4a}$.

5p **2.** Să se determine două numere reale care au suma 1 și produsul -1.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $2^{2x+1} + 2^{x+2} = 160$.

5p **4.** Într-o clasă sunt 22 de elevi, din care 12 sunt fete. Să se determine în câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete și 2 băieți.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$ și $C(1,3)$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul *C* și este paralelă cu dreapta *AB*.

5p **6.** Să se demonstreze că $\sin 6 < 0$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 031

1. Pentru $x \in \mathbb{C}$ se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & x^2-1 \\ 1 & x-1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

5p **a)** Să se verifice că $(A(x))^2 = 2xA(x)$.

5p **b)** Să se determine toate numerele complexe x pentru care $(A(x))^4 + (A(x))^2 = O_2$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $X^2 = A(0)$, $X \in M_2(\mathbb{C})$ nu are soluții.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = (X+i)^{2008} + (X-i)^{2008}$, care are forma algebrică $f = a_{2008}X^{2008} + a_{2007}X^{2007} + ... + a_1X + a_0$.

5p **a)** Să se calculeze $a_{2008} + a_{2007}$.

5p **b)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 1$.

5p **c)** Să se demonstreze că polinomul f are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 031

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - x|}$.

5p **a**) Să se arate că graficul funcției f admite o asimptotă spre $-\infty$.

5p **b**) Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f.

5p **c**) Să se determine punctele de extrem local ale funcției *f*.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dat de $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze I_2.

5p **b**) Să se verifice că $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c**) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} nI_n$.

VARIANTA 32

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 032

5p **1.** Se consideră numărul real $s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{2008}}$. Să se demonstreze că $s\in(1;2)$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ și $g(x)=-4x+1$. Să se determine coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sin x=1+\cos^2 x$.

5p **4.** Fie mulțimea $A=\{-2,-1,0,1,2\}$. Să se determine numărul funcțiilor bijective $f:A\to A$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$ și $C(1,3)$. Să se determine coordonatele punctului *D* știind că patrulaterul *ABCD* este paralelogram.

5p **6.** Știind că $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ și că $\sin x=\frac{3}{5}$, să se calculeze $\sin\frac{x}{2}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 032

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=a \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$ și ecuația (C): $x^2+y^2=z^2$.

5p **a)** Să se arate că determinantul sistemului are valoarea $(a+2)(a-1)^2$.

5p **b)** Să se arate că pentru niciun $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$, soluția sistemului nu verifică ecuația (*C*).

5p **c)** Să se determine a, pentru care exact două dintre soluțiile sistemului sunt soluții ale ecuației (*C*).

2. Se consideră mulțimea $G\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, $G=\left\{\begin{pmatrix} a & 10b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{Q},\ a^2-10b^2=1\right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $A=\begin{pmatrix} 19 & 60 \\ 6 & 19 \end{pmatrix}\in G$.

5p **b)** Să se arate că $X\cdot Y\in G$, $\forall X,Y\in G$.

5p **c)** Să se demonstreze că mulțimea *G* este infinită.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 032

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}(x+2)-\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $0<f(x)\le\frac{\pi}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+\operatorname{arctg}\frac{(x+1)^2}{2}$ este constantă.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^2\frac{f'(x)}{x}dx$.

5p **b)** Să se determine $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}\int_0^x f(t)dt$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficele celor două funcții și dreptele $x=0$ și $x=1$.

VARIANTA 33

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 033

5p **1.** Să se calculeze $\log_4 2+\log_3 9+\sqrt[3]{27}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+4x+2$. Să se determine valoarea minimă a funcției *f*.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $16^x+3\cdot 4^x=4$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\{\sqrt{n}\mid n\in\mathbb{N},\ n<100\}$, acesta să fie număr rațional.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$, $C(1,3)$ și $D(a,4)$, unde $a\in\mathbb{R}$. Să se determine valorile lui *a* astfel încât dreptele *AB* și *CD* să fie paralele.

5p **6.** Știind că $x\in\mathbb{R}$ și că $\operatorname{tg}x=\frac{1}{2}$, să se calculeze $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 033

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ și $A=aI_3+bB+cB^2$, $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze B^3.

5p **b)** Să se calculeze B^{-1}.

5p **c)** Să se demonstreze că $\forall\, a,b,c\in\mathbb{R}$, $(a+b+c)\det(A)\geq 0$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$ și $H=\left\{x^2\mid x\in\mathbb{Z}_7\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $H=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{4}\}$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{Z}_7$ există $x,y\in\mathbb{Z}_7$ astfel încât $a=x^2+y^2$.

5p **c)** Să se arate că $\{x^{2000}\mid x\in\mathbb{Z}_7\}=H$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 033

1. Fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ și șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se arate că funcția f' este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **b**) Să se demonstreze că $\frac{1}{2(k+1)\sqrt{k+1}}<\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\frac{1}{2k\sqrt{k}}$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$.

5p **c**) Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

2. Se consideră funcțiile $f_n:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\int_0^x t^n\operatorname{arctg}t\,dt$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se determine $f_1(x)$, $x\in[0,+\infty)$.

5p **b**) Să arate că $f_n(1)\leq\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{n+1}$, $\forall n\geq 1$.

5p **c**) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nf_n(1)$.

VARIANTA 34

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 034

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z=(3+4i)^4$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+2x+1$. Să se demonstreze că vârful parabolei asociate funcției *f* se găsește pe dreapta de ecuație $x+y=0$.

5p **3.** Să se determine numărul soluțiilor ecuației $\sin x=\sin 2x$ din intervalul $[0,\,2\pi)$.

5p **4.** Fie mulțimea $A=\{1,2,3,4,5\}$. Să se determine numărul funcțiilor bijective $f:A\to A$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$, $C(1,3)$ și $D(a,4)$, $a\in\mathbb{R}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care dreptele *AB* și *CD* sunt perpendiculare.

5p **6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic *ABC* în care are loc relația $\sin B+\cos B=\sin C+\cos C$. Să se demonstreze că triunghiul *ABC* este isoscel.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 034

1. Se consideră matricele $K=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\in M_{1,3}(\mathbb{R})$, $L=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\in M_{3,1}(\mathbb{R})$ și $A=LK$.

5p **a)** Să se calculeze suma elementelor matricei A.

5p **b)** Să se arate că $A^2=32A$.

5p **c)** Să se arate că rangul matricei A^n este 1, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x*y=axy-x-y+6$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$, unde *a* este o constantă reală.

5p **a)** Pentru $a=\frac{1}{3}$, să se demonstreze că legea „$*$” este asociativă.

5p **b)** Să se arate că legea „$*$” admite element neutru dacă și numai dacă $a=\frac{1}{3}$.

5p **c)** Să se arate că dacă intervalul $[0,6]$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$”, atunci $a\in\left[\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right]$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 034

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}-\ln\left(x+\frac{3}{2}\right)+\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)$ și șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se arate că $f(x)<0$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

2. Se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\int_0^x t^n\arcsin t\,dt$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze derivata funcției f_3.

5p **b)** Să se calculeze $f_1\left(\frac{1}{2}\right)$.

5p **c)** Să se determine $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f_2(x)$.

VARIANTA 35

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 035

5p **1.** Să se calculeze $(2+i)^3+(2-i)^3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+2$. Să se rezolve ecuația $f(f(x))=f^2(x)$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $3\cdot 4^x-6^x=2\cdot 9^x$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{0,1,2,...,1000\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulțimea *A*, acesta să fie divizibil cu 5.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(0,-3)$ și $B(4,\ 0)$. Să se calculeze distanța de la punctul *O* la dreapta *AB*.

5p **6.** Să se calculeze aria unui paralelogram *ABCD* cu $AB=6$, $AD=8$ și $m(\sphericalangle ADC)=135^\circ$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 035

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 5\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că ecuația $AX=B$ are o infinitate de soluții $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

5p **b)** Să se verifice că $A^3=10A$.

5p **c)** Să se determine rangul matricei A^*, adjuncta matricei *A*.

2. Se consideră mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$, funcția $f:\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\to\mathbb{Z}$, $f(a+b\sqrt{2})=a^2-2b^2$ și mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\mid\ f(x)=-1\right\}$.

5p **a)** Să se verifice dacă $7+5\sqrt{2}\in A$.

5p **b)** Să se arate că pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, $f(xy)=f(x)f(y)$.

5p **c)** Să se arate că mulțimea A este infinită.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 035

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\ln(e^x+1)$.

5p **a)** Să se arate că funcția f' este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty}x^a f(x)=0,\forall a\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^3}dx,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se demonstreze că șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

VARIANTA 36

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 036

5p **1.** Se consideră numărul rațional $\frac{1}{7}$ scris sub formă de fracție zecimală infinită $\frac{1}{7}=0,a_1a_2a_3\ldots$. Să se calculeze suma $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_6$.

5p **2.** Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2-x$, $g(x)=3x+2$. Să se calculeze $(f\circ g)(x)-(g\circ f)(x)$.

5p **3.** Să se demonstreze că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$ este injectivă.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr natural de trei cifre, acesta să fie divizibil cu 50.

5p **5.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care punctele $A(1,-2)$, $B(4,1)$ și $C(-1,a)$ sunt coliniare.

5p **6.** Fie ABC un triunghi care are $AB = 3$, $AC = 5$ și $BC = 7$. Să se calculeze $\cos A$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 036

1. Se consideră matricele $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ și $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu proprietatea că $A^2=O_2$.

5p **a)** Să se arate că $a+d=0$.

5p **b)** Să se arate că matricea I_2+A este inversabilă.

5p **c)** Să se arate că ecuația $AX=O_2$ are o infinitate de soluții în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-2X^2+9$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$, numărul $a=\sqrt{2}+i$ și mulțimile $A=\{g(a)\mid g\in\mathbb{Q}[X]\}$ și $B=\{h(a)\mid h\in\mathbb{Q}[X],\text{grad}(h)\le 3\}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(a)$.

5p **b)** Să se calculeze $|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|$.

5p **c)** Să se arate că $A=B$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 036

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{\sqrt{3}\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-x}$ și șirul $(a_n)_{n\ge1}$ definit prin $a_1=2$, $a_{n+1}=f(a_n),\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty,\sqrt{3})$ și pe $(\sqrt{3},\infty)$.

5p **b**) Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **c**) Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este periodic.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2}$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_1^x f(t)dt$.

5p **a**) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției F.

5p **b**) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

5p **c**) Să se calculeze $\int_0^1 F(x)\,dx$.

VARIANTA 37

Ministerul Educației, Cercetării şi Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 037

5p **1.** Să se calculeze suma $1+4+7+...+31$.

5p **2.** Să se determine imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.

5p **3.** Să se calculeze valoarea expresiei $E=\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)+\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

5p **4.** Să se determine numărul termenilor raționali din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{2}+1\right)^5$.

5p **5.** Fie *ABCD* un pătrat de latură 1. Să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

5p **6.** Să se demonstreze că $\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 037

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că $\det(A)=(a-b)(a-1)$.

5p **b)** Să se calculeze $\det\left(A-A^t\right)$.

5p **c)** Să se arate că $\operatorname{rang}A\geq 2$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3+pX^2+qX+r$, cu $p,q,r\in(0,\infty)$ şi cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se demonstreze că f nu are rădăcini în intervalul $[0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ în funcție de *p*, *q* şi *r*.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă a, b, c sunt trei numere reale astfel încât $a+b+c<0$, $ab+bc+ca>0$ şi $abc<0$, atunci $a,b,c\in(-\infty,0)$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 037

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+3\operatorname{arctg}x$.

5p **a**) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b**) Să se arate că funcția f este bijectivă.

5p **c**) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^a}$ există, este finită şi nenulă.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ dat de $I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze I_1.

5p **b**) Să se demonstreze că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

5p **c**) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

VARIANTA 38

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 038

5p **1.** Să se arate că $\log_2 3 \in (1,2)$.

5p **2.** Să se determine valorile reale ale lui *m* pentru care $x^2+3x+m>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\sin x+\cos x=1$.

5p **4.** Să se demonstreze egalitatea $C_n^2+C_n^3=C_{n+1}^3$, $\forall n\geq 3$.

5p **5.** Se consideră dreptele de ecuații $d_1: 2x+3y+1=0$, $d_2: 3x+y-2=0$ și $d_3: x+y+a=0$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care cele trei drepte sunt concurente.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul triunghiului *ABC*, știind că $AB=4$, $AC=3$ și $m(\sphericalangle BAC)=60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 038

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$ și mulțimea de matrice $M=\left\{\begin{pmatrix}a&0&0\\b&a&0\\c&b&a\end{pmatrix} \mid a,b,c\in\mathbb{C}\right\}$.

5p **a)** Să se calculeze A^3.

5p **b)** Să se arate că dacă $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ și $AX=XA$, atunci $X\in M$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $X^2=A$ nu are soluții în $M_3(\mathbb{C})$.

2. Se consideră polinomul $f=aX^4+bX+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se arate că numărul $f(3)-f(1)$ este număr par.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}$, numărul $f(x)-f(y)$ este divizibil cu $x-y$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $a\neq 0$, $f(1)=4$ și $f(4)=1$, atunci $|f(2)|\geq 67$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 038

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\ln(x^2+x+1)$.

5p **a**) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare.

5p **b**) Să se demonstreze că funcția f este bijectivă.

5p **c**) Să se arate că graficul funcției f nu are asimptotă oblică spre $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}(1-\{x\})$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x.

5p **a**) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b**) Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **c**) Să se arate că valoarea integralei $\int_a^{a+1} f(x)\,dx$ nu depinde de numărul real a.

VARIANTA 39

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 039

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Să se demonstreze că $z^2=\bar{z}$.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $-x^2+4x-3\geq 0$.

5p **3.** Să se demonstreze că funcția $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{1}{x}$ este injectivă.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ pentru care $f(1)$ este număr par.

5p **5.** Fie *ABC* un triunghi care are *AB* = 2, *AC* = 3 și *BC* = $2\sqrt{2}$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Să se demonstreze că $\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 039

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ bcx+acy+abz=0 \end{cases}$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ și A matricea sistemului.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul, în cazul în care a,b,c sunt distincte două câte două.

5p **c)** Să se determine mulțimea soluțiilor sistemului, în cazul în care $a=b\neq c$.

2. Se consideră mulțimea $M=\left\{ a+b\sqrt{5} \;\middle|\; a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-5b^2=1 \right\}$.

5p **a)** Să se arate că $x=9+4\sqrt{5}\in M$.

5p **b)** Să se demonstreze că $(M,\cdot)$ este un subgrup al grupului multiplicativ $\left(\mathbb{R}^*,\cdot\right)$.

5p **c)** Să se demonstreze că mulțimea *M* are o infinitate de elemente.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 039

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$.

5p **a**) Să se studieze monotonia funcției *f*.

5p **b**) Să se determine asimptotele graficului funcției *f*.

5p **c**) Să se demonstreze că orice șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu proprietatea $x_0\in(0,1), x_{n+1}=e^{f(x_n)}$ este convergent.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{4x+5}dx, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze I_2.

5p **b**) Să se arate că șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ verifică relația $4I_{n+1}+5I_n=\frac{1}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c**) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

VARIANTA 40

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 040

5p **1.** Se consideră $a\in\mathbb{R}$ și numărul complex $z=\dfrac{a+2i}{2+ai}$. Să se determine *a* pentru care $z\in\mathbb{R}$.

5p **2.** Să se demonstreze că dreapta de ecuație $y=2x+3$ este tangentă la parabola de ecuație $y=x^2-4x+12$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{2x-1}=x$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând o pereche (a,b) din produsul cartezian $A\times A$, să avem egalitatea $a+b=6$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $M(2,-1)$, $A(1,2)$ și $B(4,1)$. Să se determine lungimea vectorului $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$.

5p **6.** Să se demonstreze egalitatea $\sin(a+b)\cdot\sin(a-b)=\sin^2 a-\sin^2 b,\ \forall a,b\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 040

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&9&6\\2&6&4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}1&3&2\end{pmatrix}$, $B=I_3+A$, $C=I_3+aA$, cu $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $S=A-XY$.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $BC=I_3$.

5p **c)** Să se arate că $A^{n+1}=14A^n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-1\in\mathbb{R}[X]$ și numărul $\varepsilon\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, astfel încât $f(\varepsilon)=0$.

5p **a)** Să se demonstreze că $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe sistemul $\begin{cases}x+y+z=0\\x+y\varepsilon+z\varepsilon^2=0\\x+y\varepsilon^2+z\varepsilon=0\end{cases}$.

5p **c)** Să se arate că, dacă *f* divide $f_1(X^3)+Xf_2(X^3)+X^2f_3(X^3)$, unde f_1, f_2, f_3 sunt polinoame cu coeficienți complecși, atunci fiecare dintre polinoamele f_1, f_2, f_3 este divizibil cu $X-1$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 040

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția *f* este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$.

5p **b)** Să se arate că graficul funcției *f* are exact două puncte de inflexiune.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției *f* spre $-\infty$.

2. Se consideră funcțiile $F_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F_n(x)=\int_0^x t\sin^n t\,dt,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $F_1(\pi)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $F_{n+1}(1)<F_n(1),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(1)$.

VARIANTA 41

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 041

5p **1.** Să se calculeze $100^{\lg 2}+\sqrt[3]{-27}$.

5p **2.** Să se determine imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $3^{x+1}=-3^x+8$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$ care au proprietatea că $f(1)=f(3)$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(2,-1)$ și $B(-1,1)$. Să se determine ecuația dreptei ce trece prin originea axelor și este paralelă cu dreapta *AB*.

5p **6.** Fie *a* și *b* numere reale astfel încât $\sin a+\sin b=1$ și $\cos a+\cos b=\dfrac{1}{2}$. Să se calculeze $\cos(a-b)$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 041

1. Pentru $p,q,r\in\mathbb{C}$, se consideră sistemul $\begin{cases} x+py+p^2z=p^3 \\ x+qy+q^2z=q^3 \\ x+ry+r^2z=r^3 \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că determinantul sistemului este $\Delta=(p-q)(q-r)(r-p)$.

5p **b)** Dacă *p, q, r* sunt distincte, să se rezolve sistemul.

5p **c)** Să se arate că, dacă sistemul are soluția $(-1,1,1)$, atunci cel puțin două dintre numerele p, q, r sunt egale.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\left\{ A^n \,\middle|\, n\in\mathbb{N}^* \right\}$.

5p **a)** Să se calculeze A^4.

5p **b)** Să se arate că $(G,\cdot)$ este un grup comutativ, unde „$\cdot$” este înmulțirea matricelor.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^3=I_4$, $X\in G$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 041

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(-\infty,0)$, $f(x)=\ln(1+x)-x$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este surjectivă.

5p **c)** Să se arate că graficul funcției f nu admite asimptote.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\int_1^x f(\ln t)\,dt=\dfrac{\pi}{2}$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(\dfrac{2}{n}\right)+f\left(\dfrac{3}{n}\right)+\ldots+f\left(\dfrac{n}{n}\right)\right)$.

VARIANTA 42

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 042

5p **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}$.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} y=x^2-3x+1 \\ y=2x^2+x+4 \end{cases}$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}$.

5p **4.** Să se determine numărul termenilor raționali ai dezvoltării $(\sqrt{2}+1)^{100}$.

5p **5.** Să se arate că punctele $A(-1,5)$, $B(1,1)$ și $C(3,-3)$ sunt coliniare.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul care are lungimile laturilor 4, 5 și 7.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 042

1. Se consideră matricele $A_0, B_0, A, B\in M_2(\mathbb{C})$, $A_0=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, astfel încât $AB-BA=A$.

5p **a)** Să se determine rangul matricei A_0.

5p **b)** Să se arate că $A_0B_0-B_0A_0=A_0$.

5p **c)** Să se demonstreze că $A^nB-BA^n=nA^n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=4X^3-12X^2+aX+b$.

5p **a)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât polinomul f să se dividă cu polinomul X^2-1.

5p **b)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât ecuația $f(x)=0$ să aibă soluția $x=i\in\mathbb{C}$.

5p **c)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât polinomul să aibă rădăcinile x_1, x_2, x_3 în progresie aritmetică și, în plus, $x_1^2+x_2^2+x_3^2=11$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 042

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\operatorname{arctg}x$ și șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit de $x_1=1$, $x_{n+1}=f(x_n), \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se demonstreze că funcția f' este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b**) Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f spre $-\infty$.

5p **c**) Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

2. Fie șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit prin $I_n=\int_0^1 (x-x^2)^n\,dx$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze I_2.

5p **b**) Să se demonstreze că $I_n=\frac{n}{4n+2}I_{n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

5p **c**) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

VARIANTA 43

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică informa- tică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - .informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 043

5p **1.** Să se determine valoarea de adevăr a afirmației: „Suma oricăror două numere iraționale este număr irațional."

5p **2.** Graficul unei funcții de gradul al doilea este o parabolă care trece prin punctele $A(1,-3)$, $B(-1,3)$, $C(0,1)$. Să se determine coordonatele vârfului acestei parabole.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $4^x - 2^x = 12$.

5p **4.** Fie mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o pereche (a,b) din produsul cartezian $A\times A$, produsul numerelor *a* și *b* să fie impar.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(1,\ 3)$ și $C(-1,\ 1)$. Să se determine coordonatele punctelor *B* și *D* astfel încât patrulaterul *ABCD* să fie pătrat.

5p **6.** Să se demonstreze că $\sin 105^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 043

1. Se consideră mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d\in\mathbb{N}\right\}$ și matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\in M$.

5p **a)** Câte matrice din mulțimea M au suma elementelor egală cu 1?

5p **b)** Să se arate că $A^{-1}\notin M$.

5p **c)** Să se determine toate matricele inversabile $B\in M$ care au proprietatea $B^{-1}\in M$.

2. Se consideră ecuația $x^4-8x^3+ax^2+8x+b=0$, cu $a,b\in\mathbb{R}$ și cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se arate că $(x_1+x_4)(x_2+x_3)+x_1x_4+x_2x_3+(x_1+x_4)x_2x_3+(x_2+x_3)x_1x_4=a-8$.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $x_1+x_4=x_2+x_3$.

5p **c)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât x_1, x_2, x_3, x_4 să fie în progresie aritmetică.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 043

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+e^{-x}$.

5p **a**) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$.

5p **b**) Să se arate că funcția f admite exact un punct de extrem local.

5p **c**) Să se determine numărul de soluții reale ale ecuației $f(x)=m$, unde m este un număr real oarecare.

2. Fie funcțiile $f:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\int_1^{\operatorname{tg}x}\dfrac{t}{1+t^2}dt$ și $g:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ g(x)=\int_1^{\operatorname{ctg}x}\dfrac{1}{t(1+t^2)}dt$.

5p **a**) Să se calculeze $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

5p **b**) Să se calculeze $f'(x),\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5p **c**) Să se arate că $f(x)+g(x)=0,\ \forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

VARIANTA 44

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 044

5p **1.** Să se determine partea imaginară a numărului complex $z=\dfrac{1-i}{1+i}$.

5p **2.** Să se determine valorile reale ale lui *m* pentru care $x^2+mx\geq -1,$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\arcsin 2x=-\dfrac{1}{2}$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{0,1,2,3,\ldots,9\}$. Să se determine numărul submulțimilor mulțimii *A* care au 5 elemente dintre care exact două sunt numere pare.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $B(-1,2)$ și $C(2,-2)$. Să se determine distanța de la punctul *O* la dreapta *BC*.

5p **6.** Știind că $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ și că $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, să se calculeze $\operatorname{ctg}\alpha$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 044

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $AB+BA$.

5p **b)** Să se arate că $\operatorname{rang}(A+B)=\operatorname{rang}A+\operatorname{rang}B$.

5p **c)** Să se demonstreze că $(A+B)^n=A^n+B^n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+4X^2+1\in\mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{C}$ astfel încât polinomul *f* să se dividă cu $X+1$.

5p **b)** Să se arate că polinomul $g=X^4+4X^2+aX+1$ are rădăcinile $\dfrac{1}{x_1},\dfrac{1}{x_2},\dfrac{1}{x_3},\dfrac{1}{x_4}$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{C}$, polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 044

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{ax+b}{\sqrt{x^2+x+1}},\ a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a**) Să se calculeze $f'(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b**) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $a=2b>0$.

5p **c**) Pentru $a=2$ și $b=1$, să se determine mulțimea valorilor funcției *f*.

2. Fie funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\int_0^x e^{\arcsin t}dt$.

5p **a**) Să se arate că funcția f este strict monotonă.

5p **b**) Să se arate că $f(x)=\int_0^{\arcsin x}e^t\cos t\,dt,\forall x\in[-1,1]$.

5p **c**) Să se determine $f(1)$.

VARIANTA 45

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 045

5p **1.** Să se determine partea întreagă a numărului $\frac{7}{5\sqrt{2}-1}$.

5p **2.** Fie x_1 și x_2 soluțiile reale ale ecuației $x^2+x-1=0$. Să se demonstreze că $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\in\mathbb{Z}$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $2\cdot 3^x+3^{1-x}=7$.

5p **4.** Se consideră mulțimile $A=\{1,2,3,4\}$ și $B=\{1,2,3,4,5,6\}$. Să se determine numărul funcțiilor strict crescătoare $f:A\to B$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(1,3)$, $B(-2,1)$ și $C(-3,-1)$. Să se calculeze lungimea înălțimii duse din vârful *A* în triunghiul *ABC*.

5p **6.** Să arate că $2(\sin 75^\circ-\sin 15^\circ)=\sqrt{2}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 045

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&0\\3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ și mulțimea $C(A)=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,\middle|\,XA=AX\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $B\in C(A)$.

5p **b)** Să se arate că dacă $X\in C(A)$, atunci există $x,y\in\mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix}x&0\\y&x\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X+X^2=A$.

2. Se consideră mulțimea $G=(-1,1)$, funcția $f:G\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ și corespondența $(x,y)\to x*y$, unde $x*y=\frac{x+y}{1+xy}$, $\forall\, x,y\in G$.

5p **a)** Să se arate că această corespondență definește o lege de compoziție pe *G*.

5p **b)** Să se arate că $\forall x,y\in G,\ f(x*y)=f(x)f(y)$.

5p **c)** Să se calculeze $\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\ldots*\frac{1}{9}$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 045

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}}$, $a\in\mathbb{R}$.

5p **a**) Să se calculeze $f'(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b**) Să se determine toate numerele reale a astfel încât funcția f să aibă trei puncte de extrem local.

5p **c**) Știind că $a=0$, să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Fie funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

5p **a**) Să se calculeze $\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

5p **b**) Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

5p **c**) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

VARIANTA 46

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 046

5p **1.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Știind că $a_3 + a_{19} = 10$, să se calculeze $a_6 + a_{16}$.

5p **2.** Să se determine valorile parametrului real *m* pentru care ecuația $x^2 - mx + 1 - m = 0$ are două rădăcini reale distincte.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\lg^2 x + \lg x = 6$.

5p **4.** Se consideră mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Să se determine numărul funcțiilor strict descrescătoare $f : A \to B$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $M(2, -1)$, $N(-1, 1)$ și $P(0, 3)$. Să se determine coordonatele punctului *Q* astfel încât *MNPQ* să fie paralelogram.

5p **6.** Să se calculeze lungimea medianei duse din *A* în triunghiul *ABC*, știind că $AB = 2$, $AC = 3$ și $BC = 4$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 046

1. Se consideră matricele $O_2, I_2, A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $\forall x \in \mathbb{R}$, $\det(A - xI_2) = x^2 - (a+d)x + ad - bc$.

5p **b)** Dacă $A^2 = O_2$, să se demonstreze că $a + d = 0$.

5p **c)** Știind că $A^2 = O_2$, să se calculeze $\det(A + 2I_2)$.

2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,\middle|\, a^2 - 3b^2 = 1 \right\}$ și operația $(a, b) * (c, d) = (ac + 3bd, ad + bc)$.

5p **a)** Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ pentru care $(a, 15) \in G$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $(a, b), (c, d) \in G$, $(a, b) * (c, d) \in G$.

5p **c)** Să se arate că $(G, *)$ este grup.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 046

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Să se arate că f nu este derivabilă în punctul $x_0 = 1$.

5p **b)** Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = m$, unde m este un parametru real.

5p **c)** Să se arate că $3^{\sqrt{5}} < 5^{\sqrt{3}}$.

2. Fie funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x t \sin 2t \, dt$ și $g : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} \, dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5p **b)** Să se arate că $g'(x) = -x \sin 2x, \forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x) + g(x) = \dfrac{\pi}{4}, \forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

VARIANTA 47

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 047

5p **1.** Să se calculeze $(2+i)^4+(2-i)^4$.

5p **2.** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție dintre dreapta de ecuație $y=2x+1$ și parabola de ecuație $y=x^2+x+1$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $3^x+9^x=\frac{4}{9}$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr natural de patru cifre, acesta să fie divizibil cu 9.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(1,3)$ și $C(3,2)$. Fie *G* centrul de greutate al triunghiului *ABC*. Să se determine ecuația dreptei *OG*.

5p **6.** Să se verifice egalitatea $\cos 75^\circ+\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 047

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și funcția $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X)=AX-XA$.

5p **a)** Să se determine rangul matricei A.

5p **b)** Să se calculeze $f(B)$.

5p **c)** Să se arate că $f(C+D)=f(C)+f(D)$, $\forall C,D\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3+a^2X-a$, $g=aX^3-a^2X^2-1$, cu $a\in\mathbb{R}^*$ și $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$ rădăcinile polinomului f.

5p **a)** Să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

5p **b)** Să se arate că rădăcinile polinomului *g* sunt inversele rădăcinilor polinomului *f*.

5p **c)** Să se arate că polinoamele f și g nu au rădăcini reale comune.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 047

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-1}$.

5p **a**) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$.

5p **b**) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **c**) Să se demonstreze că funcția f admite un singur punct de extrem local.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$.

5p **a**) Să se arate că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$ este o primitivă a funcției f.

5p **b**) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c**) Să se arate că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit de $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, este convergent.

VARIANTA 48

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 048

5p **1.** Să se determine partea reală a numărului complex $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Să se calculeze $(f\circ f)(512)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația $\cos 2x+\sin x=0$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $M=\{0,4,8,12,16,20,24\}$. Să se determine numărul tripletelor (a,b,c) cu proprietatea că $a,b,c\in M$ și $a<b<c$.

5p **5.** Să se calculeze distanța dintre dreptele paralele de ecuații $x+2y=6$ și $2x+4y=11$.

5p **6.** În paralelogramul $ABCD$ se cunosc $AB=1$, $BC=2$ și $m(\sphericalangle BAD)=60^\circ$. Să se calculeze produsul scalar $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 048

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+z=1 \\ 7x-y+az=b \end{cases}$, unde a și b sunt parametri reali.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$, pentru care determinantul sistemului este egal cu zero.

5p **b)** Să se determine valorile parametrilor $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

5p **c)** Să se arate există o infinitate de valori ale numerelor a și b pentru care sistemul admite o soluție (x,y,z), cu x, y, z în progresie aritmetică.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$, și mulțimea $G=\left\{ X(t)=\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \middle| \, t\in\mathbb{R} \right\}$.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $A\in G$.

5p **b)** Să se arate că $X(t)\cdot X(u)=X(t+u)$, $\forall t,u\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că mulțimea G formează grup abelian în raport cu înmulțirea matricelor.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 048

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5p **b)** Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f are două puncte de extrem.

2. Fie funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ și șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 x f(x)dx$.

5p **b)** Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

5p **c)** Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

VARIANTA 49

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 049

5p **1.** Să se calculeze numărul $\log_9 3+\log_4 2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m+2)x^2-(m-1)x+m-1$, $m\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Să se determine valorile parametrului real m astfel încât $f(x)\le 0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $2^x+2^{x+1}+2^{x-1}=56$.

5p **4.** Fie mulțimea $A=\{1, 2, \ldots, 1000\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\{\sqrt[3]{n} \mid n\in A\}$, acesta să fie număr rațional.

5p **5.** Fie triunghiul ABC și $M\in(BC)$ astfel încât $\overrightarrow{MC}=-3\overrightarrow{MB}$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și că $\operatorname{tg} x=3$, să se calculeze $\sin 2x$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 049

1. Se consideră $a\in\mathbb{R}$, sistemul $\begin{cases} x+ay=1\\ y+az=a\\ z+x=1\end{cases}$ și A matricea sa.

5p **a)** Să se arate că $\det A\neq 0$.

5p **b)** Să se arate că soluția sistemului este formată din trei numere în progresie geometrică.

5p **c)** Să se determine inversa matricei A.

2. Se consideră pe $\mathbb{R}$ legea de compoziție dată de relația $x*y=xy-5x-5y+30$, $\forall\, x, y\in\mathbb{R}$ și mulțimea $G=(5,\infty)$.

5p **a)** Să se determine $e\in\mathbb{R}$ astfel încât $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $x*e=e*x=x$.

5p **b)** Să se arate că $(G,*)$ este un grup comutativ.

5p **c)** Să se rezolve în grupul $(G,*)$ sistemul $\begin{cases} x*y=z\\ y*z=x\\ z*x=y\end{cases}$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 049

1. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4-3x^2}{x^3}$.

5p **a**) Să se demonstreze că graficul funcției f admite o asimptotă spre $+\infty$.

5p **b**) Să se determine mulțimea valorilor funcției f.

5p **c**) Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției $g:[2,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\arccos f(x)$.

2. Se consideră funcția $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$.

5p **a**) Să se arate că funcția $F:[1,2]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ este o primitivă a funcției f.

5p **b**) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

5p **c**) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)\sqrt{n^2+(n+k)^2}}$.

VARIANTA 50

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 050

5p **1.** Fie fracția zecimală periodică $0,(769230)=0,a_1a_2a_3....$ Să se calculeze $a_1+a_2+a_3+....+a_{2008}$.

5p **2.** Să se arate că dreapta de ecuație $y=2x-1$ nu intersectează parabola de ecuație $y=x^2+x+1$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_2 x+\log_4 x^2=6$.

5p **4.** Într-o clasă sunt 25 de elevi dintre care 13 sunt fete. Să se determine numărul de moduri în care se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete și 2 băieți.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$, $C(1,3)$ și $D(a,4)$, $a\in\mathbb{R}$. Să se determine *a* pentru care dreptele *AB* și *CD* sunt perpendiculare.

5p **6.** Știind că $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ și că $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$, să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 050

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, transpusa $A^t\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B=AA^t$, și punctele $P_k(a_k,b_k)$, unde $k\in\{1,2,3\}$.

5p **a)** Să se calculeze B știind că $P_1(1,2)$, $P_2(2,4)$, $P_3(-3,-6)$.

5p **b)** Să se arate că $\det(B)\geq 0$, oricare ar fi punctele P_1, P_2, P_3.

5p **c)** Să se arate că $\det(B)=0$ dacă și numai dacă punctele P_1, P_2, P_3 sunt coliniare pe o dreaptă care trece prin originea axelor.

2. Se consideră mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix}\hat{1} & a & b\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbb{Z}_5\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii M.

5p **b)** Să se arate că $AB\in M$, pentru orice $A,B\in M$.

5p **c)** Să se arate că $(M,\cdot)$ este un grup, unde „$\cdot$” este înmulțirea matricelor.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 050

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cdot\sin\frac{1}{x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

5p **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}^*$.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f către $+\infty$.

2. Fie șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $I_n=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se demonstreze că $I_{n+1}=\frac{2n+2}{2n+3}I_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit prin $a_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, are limita 0.

VARIANTA 51

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 051

5p **1.** Să se determine numărul elementelor mulțimii $(A \setminus B) \cap \mathbb{Z}$ știind că $A=(-3;4]$ și $B=(1;5]$.

5p **2.** Să se determine punctele de intersecție dintre dreapta $2x+1=y$ și parabola $y=x^2-x+3$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}=1$.

5p **4.** Să se determine numărul soluțiilor sistemului de inecuații $\begin{cases} x!<7 \\ y!<25 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{N}$.

5p **5.** Să se calculeze distanța de la punctul $A(1,1)$ la dreapta $d: 5x+12y-4=0$.

5p **6.** Să se calculeze $\operatorname{tg}(a+b)$ știind că $\operatorname{ctg} a=2$ și $\operatorname{ctg} b=5$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 051

1. Fie șirul $(F_n)_{n\geq 0}$, dat de $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_0=0, F_1=1$ și matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice relația $A^2=A+I_2$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $X \in M_2(\mathbb{Q})$, $X \neq O_2$ și $AX=XA$, atunci X este inversabilă.

5p **c)** Să se arate că $A^n=\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \forall n \geq 1$.

2. Fie $\sigma, \pi \in S_5$, $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\pi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $\sigma\pi \neq \pi\sigma$.

5p **b)** Să se determine numărul elementelor mulțimii $H=\{\pi^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

5p **c)** Să se arate că $H=\{\pi^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este un subgrup al grupului $(S_5, \cdot)$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 051

1. Se consideră funcția $f:[1,\infty) \to [1,\infty)$, $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x-f(x)\right)^x$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **c)** Să se arate că funcția f este bijectivă.

2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și funcția $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases} ax+b, & x<1 \\ \ln^2 x+1, & x \geq 1 \end{cases}$.

5p **a)** Să se determine numerele reale *a* și *b* astfel încât funcția F să fie primitiva unei funcții *f*.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^e \dfrac{1}{xF(x)}dx$.

5p **c)** Să se arate că, pentru funcția $h:[1,\pi] \to \mathbb{R}$, $h(x)=(F(x)-1)\sin x$, are loc relația $\int_1^\pi h(x)h''(x)\,dx \leq 0$.

VARIANTA 52

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 052

5p **1.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|4x-8|-2|4-2x|$ este constantă.

5p **2.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care parabola $y=x^2-2x+a-1$ și dreapta $y=2x+3$ au două puncte distincte comune.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{x-1}+1=x$.

5p **4.** Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt{3}+1\right)^9$. Să se determine numărul termenilor iraționali ai dezvoltării.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}=(m+1)\vec{i}+8\vec{j}$ și $\vec{v}=(m-1)\vec{i}-4\vec{j}$ să fie coliniari.

5p **6.** Triunghiul ABC are lungimile laturilor $AB=5$, $BC=7$ și $AC=8$. Să se calculeze $m(\sphericalangle A)$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 052

1. Se consideră permutarea $\sigma\in S_6$, $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&5&3&6&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine σ^{-1}.

5p **b)** Să se arate că permutările σ și σ^{-1} au același număr de inversiuni.

5p **c)** Să se arate că ecuația $x^4=\sigma$ nu are soluții în grupul $(S_6,\cdot)$.

2. Fie legea de compoziție „$\circ$”, definită pe $\mathbb{R}$ prin $x\circ y=xy-x-y+2$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$, și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$.

5p **a)** Să se arate că $(1,\infty)$ este parte stabilă în raport cu „$\circ$”.

5p **b)** Să se demonstreze că $f(xy)=f(x)\circ f(y)$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de 10 ori } x}=1025$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 052

1. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{\pi}{x},\ x\in(0,1]\\0,\ x=0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este continuă pe $[0,1]$.

5p **b)** Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f.

5p **c)** Să se arate că, dacă $n\in\mathbb{N}^*$, atunci ecuația $f(x)=\cos\dfrac{\pi}{x}$ are cel puțin o soluție în intervalul $\left(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right)$.

2. Fie funcțiile $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$ și $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 g(x)dx$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeței plane mărginită de graficele funcțiilor f și g și de dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

VARIANTA 53

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 053

5p **1.** Să se calculeze $\left[\sqrt{2008}\right]+3\cdot\left\{-\frac{1}{3}\right\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x și $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x.

5p **2.** Să se determine imaginea intervalului $[1,3]$ prin funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x+8}-\sqrt{x}=2$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca alegând un element al mulțimii divizorilor naturali ai numărului 56, acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** Fie vectorii $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$ și $\vec{u}=6\vec{i}+2\vec{j}$. Să se determine $p,r\in\mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u}=p\vec{a}+r\vec{b}$.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris unui triunghi care are lungimile laturilor 5, 7 și 8.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 053

1. Pentru orice matrice $A\in M_2(\mathbb{C})$, se notează $C(A)=\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\mid AX=XA\}$. Se consideră matricele $E_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, E_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $X,Y\in C(A)$, atunci $X+Y\in C(A)$.

5p **b)** Să se arate că dacă $E_1,E_2\in C(A)$, atunci există $\alpha\in\mathbb{C}$ astfel încât $A=\alpha I_2$.

5p **c)** Să se arate că dacă $C(A)$ conține trei dintre matricele E_1,E_2,E_3,E_4, atunci o conține și pe a patra.

2. Fie $a=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&4&5\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&5&3\end{pmatrix}$ două permutări din grupul $(S_5,\cdot)$.

5p **a)** Să se rezolve în S_5 ecuația $ax=b$.

5p **b)** Să se determine ordinul elementului ab în grupul $(S_5,\cdot)$.

5p **c)** Fie $k\in\mathbb{Z}$ cu $b^k=e$. Să se arate că 6 divide k.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 053

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x$ și un număr real m din intervalul $(-2,\infty)$.

5p **a)** Să se determine punctele de extrem ale funcției f.

5p **b)** Să se demonstreze că ecuația $x^3-3x=m$ are soluție unică în mulțimea $(1,\infty)$.

5p **c)** Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f^2(x)$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}xe^x, & x\le 0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine o primitivă a funcției f pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

VARIANTA 54

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 054

5p **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2$.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\frac{2x-1}{1-x} \geq \frac{3x+2}{1-2x}$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{2-x}+x=2$.

5p **4.** Se consideră dezvoltarea $(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{y})^{49}$. Să se determine termenul care îi conține pe x și pe y la aceeași putere.

5p **5.** Fie $\overrightarrow{r_A}=2\vec{i}+\vec{j}$, $\overrightarrow{r_B}=\vec{i}+3\vec{j}$ și $\overrightarrow{r_C}=3\vec{i}+2\vec{j}$ vectorii de poziție ai vârfurilor triunghiului ABC. Să se determine vectorul de poziție al centrului de greutate a triunghiului ABC.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $BC=3$ și $\cos A=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 054

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că $AB \neq BA$.

5p **b)** Să se arate că $A^4+B^6=2I_2$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $(AB)^n \neq I_2$.

2. Se consideră șirul $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $F_0=0$, $F_1=1$, $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, $\forall n\geq 1$ și polinoamele $P, Q_n \in \mathbb{Z}[X]$, $P=X^2-X-1$, $Q_n=X^n-F_nX-F_{n-1}$, $\forall n\geq 2$.

5p **a)** Să se arate că polinomul X^3-2X-1 este divizibil cu P.

5p **b)** Să se determine rădăcinile reale ale polinomului Q_3.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $n\geq 2$, polinomul Q_n este divizibil cu P.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 054

1. Se consideră mulțimea A a funcțiilor $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care sunt continue pe $[-1,1]$, derivabile în punctele – 1 și 1, iar $g'(-1)<0$ și $g'(1)>0$.

5p **a)** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{|x|}{x^2+4}$ este un element al mulțimii A.

5p **b)** Să se arate că funcția f de la punctul **a)** nu este derivabilă în 0.

5p **c)** Să se arate că, dacă $g\in A$, atunci g are un punct de minim $x_0\in(-1,1)$.

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x-1)e^x$.

5p **a)** Să se arate că există $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ să fie o primitivă a lui f.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f și axa Ox.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

VARIANTA 55

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 055

5p **1.** Să se calculeze $[-\sqrt{8}]-\{-2,8\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x și $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x+y=5 \end{cases}$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $4^x-5\cdot 2^{x+1}+16=0$.

5p **4.** Să se determine $x\in\mathbb{N}$ astfel încât $C_x^2+A_x^2=30$.

5p **5.** Fie punctele $O(0;0)$, $A(2;1)$ și $B(-2;1)$. Să se determine cosinusul unghiului format de vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$.

5p **6.** Să se calculeze $\operatorname{tg} 2x$, știind că $\operatorname{ctg} x = 3$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 055

1. Matricea $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifică $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se arate că $x_{n+1}^2+y_{n+1}^2=(a^2+b^2)(x_n^2+y_n^2)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $a^2+b^2\le 1$, atunci șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt mărginite.

5p **c)** Să se arate că, dacă $a=1$ și $b=\sqrt{3}$, atunci $x_{n+6}=64x_n$, $\forall n\ge 0$.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că $A^n=I_3$ dacă și numai dacă 4 divide n.

5p **b)** Fie $G=\{A^n \mid n\in\mathbb{N}^*\}$. Să se arate că G, împreună cu operația de înmulțire a matricelor, formează un grup comutativ cu patru elemente.

5p **c)** Să se calculeze $\det\left(I_3+A+A^2+...+A^{2008}\right)$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 055

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{f(x)}{x-1}$.

5p **b)** Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f.

5p **c)** Să se determine punctele de extrem ale funcției f.

2. Fie funcția $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

5p **a)** Să se determine o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se demonstreze că $\int_1^x f(t)dt\le\dfrac{x-1}{6}, \forall x\in[1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1\dfrac{x^2}{1+x^6}dx$.

VARIANTA 56

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 056

5p **1.** Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $2\bar{z}+z=3+4i$.

5p **2.** Știind că x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2+3x+1=0$, să se calculeze $x_1^3+x_2^3$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $1+5^x-2\cdot 25^x=0$.

5p **4.** Se consideră dezvoltarea $\left(a^2+\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^9$, $a\neq 0$. Să se determine rangul termenului care-l conține pe a^4.

5p **5.** Să se calculeze $\vec{u}^2-\vec{v}^2$ știind că $\vec{u}-\vec{v}=3\vec{i}+2\vec{j}$ și $\vec{u}+\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}$.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris unui triunghi dreptunghic care are catetele de lungimi 5 și 12.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 056

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și funcția $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X)=AX$.

5p **a)** Să se arate că $f(A)=I_2$.

5p **b)** Să se arate că $f(X+f(X))=X+f(X)$, $\forall X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se arate că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și mulțimea $M=\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,|\,AX=XA\}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $X,Y\in M$, atunci $XY\in M$.

5p **b)** Să se arate că $G=\{X\in M\,|\,\det X\neq 0\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

5p **c)** Să se determine elementele de ordin doi din grupul G, definit la punctual **b)**.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 056

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{4}{3}\right\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+5}{3x+4}$.

5p **a)** Să se determine asimptota la graficul funcției f spre $+\infty$.

5p **b)** Să determine limita șirului $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=f(1)f(2)...f(n)$.

5p **c)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(e^x)$.

2. Fie funcția $f:[1,e]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\ln x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(e^x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 e^{x^2}dx+\int_1^e f(x)dx=e$.

VARIANTA 57

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 057

5p **1.** Fie $a=\frac{2}{3}$. Să se calculeze $\left[\frac{10}{a}+10a\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

5p **2.** Să se arate că $\left(x^2+4x+5\right)\left(x^2+2x+2\right)\geq 1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_2^2 x+\log_2(4x)=4$.

5p **4.** Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{200}$, $x>0$. Să se determine termenul care nu-l conține pe x.

5p **5.** Se consideră dreapta $d:\ 4x-8y+1=0$ și punctul $A(2\,;1)$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta d.

5p **6.** Triunghiul ABC are $AB=2$, $AC=4$ și $m(\sphericalangle A)=60^\circ$. Să se calculeze lungimea medianei duse din A.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 057

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}\in M_{2,1}(\mathbb{R})$, cu $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix},\forall n\in\mathbb{N}$ și $x_0=1, y_0=0$.

5p **a)** Să se determine x_1, x_2, y_1 și y_2.

5p **b)** Să se arate că $x_n+y_n\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^n,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

5p **c)** Să se arate că $x_{n+2}-6x_{n+1}+x_n=0,\ \forall n\geq 0$.

2. Se consideră mulțimile de clase de resturi $\mathbb{Z}_7=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5},\hat{6}\}$ și $\mathbb{Z}_6=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5}\}$

5p **a)** Să se rezolve în corpul $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$ ecuația $\hat{3}x^2+\hat{4}=\hat{0}$.

5p **b)** Să se determine ordinul elementului $\hat{3}$ în grupul $\left(\mathbb{Z}_7^*,\cdot\right)$.

5p **c)** Să se arate că nu există niciun morfism de grupuri $f:(\mathbb{Z}_6,+)\to(\mathbb{Z}_7^*,\cdot)$ cu $f\left(\overline{2}\right)=\hat{3}$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 057

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

5p **a)** Să se arate că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1=\frac{1}{2}$ și $x_{n+1}=f(x_n),\forall n\geq 1$ are limită.

5p **b)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}xf(x), & x\leq 0\\ \operatorname{arctg} x, & x>0\end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se determine cel mai mare număr real a care are proprietatea $f(x)\geq a+2\ln x,\forall x\in(0,\infty)$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2}$ și F o primitivă a sa.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(\cos x)-F(1)}{x^2}$.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=F(x)+f(x)$ are exact un punct de extrem local.

VARIANTA 58

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 058

5p **1.** Să se calculeze $\frac{1+4i}{4+7i}+\frac{1-4i}{4-7i}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-6x+1$. Să se determine axa de simetrie a graficului funcției f.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $3^{x+1}+3^{1-x}=10$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $A=\{1,3,5,...,2007\}$, acesta să fie multiplu de 3.

5p **5.** Se consideră dreapta $d:\ 2x+y-1=0$ și punctul $A(3,\ 2)$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d.

5p **6.** Fie triunghiul ABC care are $AB=AC=5$ și $BC=6$. Să se calculeze distanța de la centrul de greutate al triunghiului ABC la dreapta BC.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 058

1. Fie $a,b,c,d>0$, matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și funcția $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$.

Se notează $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că dacă $\det A=0$, atunci f este funcție constantă.

5p **b)** Să se arate că, dacă $\det A\neq 0$, atunci funcția f este injectivă.

5p **c)** Să se arate că $\underbrace{(f\circ f\circ f\circ ...\circ f)}_{\text{de } n \text{ ori } f}(x)=\frac{a_nx+b_n}{c_nx+d_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\{I_2+aA+bB\,|\,a,b\in\mathbb{R},a\neq -1\}$.

5p **a)** Să se arate că orice matrice din G este inversabilă.

5p **b)** Să se arate că G este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $X^2=I_2$ are o infinitate de soluții în G.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 058

1. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)g(x)\right)$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.

5p **c)** Să se arate că $\frac{x}{1+x^2}<\operatorname{arctg} x$, pentru orice $x\in(0,\infty)$.

2. Fie $m\in\mathbb{R}$ și funcția $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x-m, x\in[0,1] \\ x\ln x, x\in(1,2] \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $m\in\mathbb{R}$, funcția f este integrabilă.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\int_1^x t\ln t\,dt}{x-1}$.

5p **c)** Pentru $m=1$, să se demonstreze că, pentru orice $t\in(0,2)$ există $a,b\in[0,2]$, $a\neq b$, astfel încât $\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(t)$.

VARIANTA 59

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 059

5p **1.** Să se calculeze suma $1+4+7+...+31$.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $|x-3|+|4-x|=1$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_3 x+\dfrac{1}{\log_3 x}=\dfrac{5}{2}$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $A=\{2,4,6,...,2008\}$, acesta să fie divizibil cu 4 , dar să nu fie divizibil cu 8.

5p **5.** Se consideră punctele $A(2,m)$ și $B(m,-2)$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $AB=4$.

5p **6.** Să se calculeze $\sin^2 x$ știind că ctg x = 6.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 059

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} mx+y+z=0 \\ x+3y+2z=0 \\ -x-y+4z=0 \end{cases}$, cu $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care matricea sistemului are determinantul nenul.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită cel puțin două soluții.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care dreptele $d_1: mx+y+1=0$, $d_2: x+3y+2=0$, $d_3: -x-y+4=0$ sunt concurente.

2. Se consideră mulțimea $H=\left\{\begin{pmatrix} m & n \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \mid m,n\in\mathbb{Z}_5,\ m=\pm\hat{1}\right\}$.

5p **a)** Să se verifice că dacă $A=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, atunci $B\cdot A=A^{-1}\cdot B$

5p **b)** Să se arate că $(H,\cdot)$ este un grup cu 10 elemente.

5p **c)** Să se determine numărul elementelor de ordinul 2 din grupul *H*.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 059

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{f(x+1)}$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}$.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\sin x$ și F o primitivă a lui f.

5p **a)** Să se calculeze $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

5p **b)** Să se determine $c\in(1,3)$ astfel încât $\int_1^3 \dfrac{f(x)}{\sin x}dx=2c^2$.

5p **c)** Să se arate că funcția F nu are limită la $+\infty$.

VARIANTA 60

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 060

5p **1.** Să se arate că $2(1+3+3^2+...+3^8)<3^9$.

5p **2.** Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuației $x^2+5x-7=0$. Să se arate că $x_1^3+x_2^3\in\mathbb{Z}$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_5 x+\log_x 5=\frac{5}{2}$.

5p **4.** Să se determine $x\in\mathbb{N}$ astfel încât $C_{2x-3}^2=3$.

5p **5.** Se consideră punctele $A(2,3)$ și $B(-3,-2)$. Să se determine ecuația dreptei AB.

5p **6.** Fie vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$. Știind că $\vec{u}\vec{v}=5$, $|\vec{u}|=2$ și $|\vec{v}|=3$ să se calculeze $\cos\left(\sphericalangle(\vec{u},\vec{v})\right)$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 060

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}$ și funcția $f:M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$, $f(X)=AX$.

5p **a)** Să se calculeze $f(A)$.

5p **b)** Să se arate că $(f\circ f)(X)=O_2,\forall X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se arate că $f(X)+f(Y)\neq I_2,\forall X,Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră mulțimea $P=\left\{A\in M_2(\mathbb{R})\mid AA^t=I_2\right\}$, unde A^t este transpusa matricei A.

5p **a)** Să se verifice dacă matricea $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ aparține mulțimii P.

5p **b)** Să se arate că înmulțirea matricelor determină pe mulțimea P o structură de grup necomutativ.

5p **c)** Să se arate că, dacă $A,B\in P$, $X\in M_2(\mathbb{R})$ și $AX=B$, atunci $X\in P$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 060

1. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)$ și $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

5p **a)** Să se demonstreze că ln2 este cea mai mică valoare a funcției f.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $x>0$, este verificată relația $\left(e^{f(x)}-1\right)g'(x)=1$.

5p **c)** Să se demonstreze că $g(x)<x$, pentru orice $x>0$.

2. Fie mulțimea $M=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f \text{ este derivabilă și } \int_0^1 f(x)\,dx=f(0)=f(1)\right\}$.

5p **a)** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^2+x$ face parte din mulțimea M.

5p **b)** Să se arate că dacă f este o funcție polinomială de grad trei, care aparține lui M, atunci $f\left(\frac{1}{2}\right)=f(0)$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $f\in M$, ecuația $f'(x)=0$ are cel puțin două soluții în intervalul $(0,1)$.

VARIANTA 61

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 061

5p **1.** Să se determine x real știind că numerele $x+1, 1-x$ și 4 sunt în progresie aritmetică.

5p **2.** Să se determine punctele de intersecție a parabolei $y=x^2+5x-6$ cu axele de coordonate.

5p **3.** Să se rezolve în $[0,2\pi]$ ecuația $2\sin x+1=0$.

5p **4.** Fie mulțimea $M=\{1,2,3,4,5,6\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând o submulțime a mulțimii M, aceasta să aibă 2 elemente.

5p **5.** Punctele A, B și G au vectorii de poziție $\overrightarrow{r_A}=4\vec{i}+7\vec{j}$, $\overrightarrow{r_B}=2\vec{i}-\vec{j}$, $\overrightarrow{r_G}=4\vec{i}+4\vec{j}$. Să se determine vectorul de poziție a punctului C astfel încât punctul G să fie centrul de greutate al triunghiului ABC.

5p **6.** Fie vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$. Dacă $|\vec{u}|=1$, $|\vec{v}|=2$ și $m\left(\sphericalangle(\vec{u};\vec{v})\right)=\frac{\pi}{3}$, să se calculeze $\left(2\vec{u}+\vec{v}\right)\left(2\vec{v}-\vec{u}\right)$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 061

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{M_{a,b}\,|\,M_{a,b}=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, a,b\in\mathbb{R}\right\}\subset M_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se arate că $M_{a,b}\cdot M_{c,d}=M_{a+c,b+d}$, $\forall\, a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că orice matrice din G este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze, în funcție de a și b, rangul matricei $M_{a,b}-M_{a,b}^t$ ($M_{a,b}^t$ este transpusa lui $M_{a,b}$).

2. Se consideră un grup $(K,\cdot)$, unde $K=\{e,a,b,c\}$, e este elementul neutru și $a^2=b^2=c^2=e$.

5p **a)** Să se rezolve în grupul K ecuația $x^3=e$.

5p **b)** Să se arate că $ab=c$.

5p **c)** Să se arate că grupul $(K,\cdot)$ nu este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_4,+)$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 061

1. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1}, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f este continuă.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}$.

5p **c)** Să se arate că funcția f este strict descrescătoare.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+\sin^2 x)$.

5p **a)** Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx$.

5p **c)** Să se calculeze derivata funcției $g:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x} f(t)\,dt$.

VARIANTA 62

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 062

5p **1.** Să se determine $x>0$ știind că numerele x, 6 și $x-5$ sunt în progresie geometrică.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x-2$. Să se calculeze $f\left(2\cdot\left(f(-1)\right)\right)$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

5p **4.** Să se determine $k\in\mathbb{N}$ astfel încât $C_{48}^{4k}=C_{48}^{20}$.

5p **5.** Se consideră punctele $A(3,2)$ și $B(6,5)$. Să se determine coordonatele punctelor M și N știind că acestea împart segmentul $[AB]$ în trei segmente congruente, iar ordinea punctelor este A,M,N,B.

5p **6.** Să se determine valorile parametrului $a\in\mathbb{Z}$ pentru care numerele a, $a+1$ și $a+2$ sunt lungimile laturilor unui triunghi obtuzunghic.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 062

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^2=2A$.

5p **a)** Să se arate că matricea $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}$ verifică relația $B^2=2B$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $a+d\neq 2$, atunci $A=O_2$ sau $A=2I_2$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $a+d=2$, atunci $\det(A)=0$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Q}[X]$, $f=X^4-1$, $g=X^6-1$.

5p **a)** Să se arate că un cel mai mare divizor comun al polinoamelor f și g este X^2-1.

5p **b)** Să se determine numărul soluțiilor complexe distincte ale ecuației $f(x)g(x)=0$.

5p **c)** Să se descompună polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 062

1. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcția $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n+\ln x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f_2 este strict crescătoare pe intervalul $(0,\infty)$.

5p **b)** Să se arate că ecuația $f_n(x)=0$ are exact o rădăcină reală, situată în intervalul $\left(\frac{1}{e},1\right)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{f_2(x)-1}-\frac{1}{x-1}\right)$.

2. Fie $a\in\mathbb{R}$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\in(-\infty,0]\\ 1+\sin x, & x\in(0,\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este integrabilă pe intervalul $[-2\pi,2\pi]$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-1}^{\pi}f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^{2\pi}f^n(x)dx\leq 2^n\pi$.

VARIANTA 63

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 063

5p **1.** Să se arate că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de termen general $a_n=\dfrac{4n}{n+3}$, este crescător.

5p **2.** Să se determine punctele de intersecție ale parabolelor $y=x^2+x+1$ și $y=-x^2-2x+6$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

5p **4.** Suma coeficienților binomiali ai dezvoltării $\left(2x^2-5y\right)^n$ este egală cu 32. Să se determine termenul de rang patru.

5p **5.** Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât dreptele $d_1: mx+3y+2=0$ și $d_2: 2x+ny-8=0$ să coincidă.

5p **6.** Fie $ABCD$ un patrulater. Să se arate că dacă $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$, atunci $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 063

1. Se notează X^t transpusa matricei X și se consideră mulțimile $P=\left\{S\in M_2(\mathbb{R})\,|\,S^t=S\right\}$ (matrice simetrice) și $Q=\left\{A\in M_2(\mathbb{R})\,|\,A^t=-A\right\}$ (matrice antisimetrice).

5p **a)** Să se arate că $\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}\in P$ și $\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}\in Q$.

5p **b)** Să se arate că dacă $A,B\in Q$, atunci $AB\in P$.

5p **c)** Să se arate că $\det(X)\geq 0$, oricare ar fi $X\in Q$.

2. Se consideră polinoamele $f=X^3+2X^2+3X+45\in\mathbb{Z}[X]$ și $\hat{f}=X^3+X+\hat{1}\in\mathbb{Z}_2[X]$.

5p **a)** Să se arate că rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului f nu sunt toate reale.

5p **b)** Să se arate că polinomul $\hat{f}$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_2$.

5p **c)** Să se demonstreze că polinomul f nu poate fi scris ca produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 063

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ x^3, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

5p **a)** Să arate că $|f(x)|\leq|x|$, $\forall x\in[-1,1]$.

5p **b)** Să arate că funcția f este continuă în origine.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

2. Se consideră $a,b\in\mathbb{R}$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}axe^x-x\ , & x\leq 0\\ x\cos x+b, & x>0\end{cases}$.

5p **a)** Să se determine a și b știind că funcția f este primitivă pe $\mathbb{R}$ a unei funcții.

5p **b)** Știind că $a=0$ și $b=0$, să se calculeze $\int_{-1}^{\pi} f(x)dx$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $b=0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi} x^n f(x)dx=-\infty$.

VARIANTA 64

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 064

5p **1.** Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, de termen general $a_n = n^2 - n$, este strict monoton.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=x^2+2x+1$ și $g(x)=x-2008$. Să se demonstreze că, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)\geq 0$.

5p **3.** Să se rezolve în $(0,\pi)$ ecuația $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

5p **4.** Să se determine $x\in\mathbb{N}$ știind că $C_x^{x-1}+C_{x-1}^{x-3}\leq 9$.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ știind că dreptele $d_1: mx+(m+2)y-1=0$ și $d_2: (m+2)x+4my-8=0$ sunt paralele.

5p **6.** Fie ABC un triunghi cu $\operatorname{tg}A=2$, $\operatorname{tg}B=3$. Să se determine măsura unghiului C.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 064

1. Fie mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix} x & 3y \\ y & x\end{pmatrix} \mid x,y\in\mathbb{Z}\right\}$ și matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ și $AY=YA$, atunci $Y\in M$.

5p **b)** Să se arate că dacă $X\in M$ și $\det(X)=0$, atunci $X=O_2$.

5p **c)** Să se arate că $A^n\in M, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f=X^5-X^4+3X^3-X^2-2\in\mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Să se determine o rădăcină întreagă a polinomului f.

5p **b)** Să se calculeze $x_1^2+x_2^2+...+x_5^2$, unde $x_1,x_2,...,x_5$ sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Să se arate că f are o singură rădăcină reală.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 064

1. Se consideră funcția $f:(-\infty,-2)\cup(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty,-2)$.

5p **b)** Să se calculeze limita șirului $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=f(1)+f(2)+...+f(n)-\ln\frac{n(n+1)}{2}$.

5p **c)** Să se arate că există un punct $c\in(1,2)$ astfel încât $(c-1)f'(c)+f(c)=f(2)$.

2. Fie funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{1+x^4}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $\frac{\pi}{4}\leq\int_0^1 f(x)dx\leq 1$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1 g(x)dx$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_0^x \frac{f(t)f''(t)-(f'(t))^2}{(f(t))^2}dt$.

VARIANTA 65

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 065

5p **1.** Să se determine primul termen al progresiei aritmetice $a_1, a_2, 13, 17, \ldots$.

5p **2.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2\sin x$ este impară.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $3\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă suma cifelor egală cu 4.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$, știind că dreptele $d_1: mx+3y-2=0$ și $d_2: 12x+2y+1=0$ sunt perpendiculare .

5p **6.** Știind că $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, să se calculeze $\sin\alpha$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 065

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax+y+z=4 \\ x+2y+3z=6 \\ 3x-y-2z=b \end{cases}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine a,b pentru care sistemul are soluția (1, 1, 1).

5p **b)** Să se determine a,b astfel încât sistemul să fie incompatibil.

5p **c)** Să se arate că pentru orice $a\in\mathbb{Z}$ există $b\in\mathbb{Z}$ astfel încât sistemul să admită soluții cu toate componentele întregi.

2. Se consideră mulțimea matricelor $A=\left\{\begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ b & c & a \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c\in\mathbb{Z}_2\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii A.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $X\in A$, $X^2=I_3$ sau $X^2=O_3$.

5p **c)** Să se determine numărul matricelor X din mulțimea A care au proprietatea $X^2=O_3$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 065

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este bijectivă.

5p **b)** Să se arate că $f(x)\geq 2x+1, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $f(x)\geq mx+1, \forall x\in\mathbb{R}$, atunci $m=2$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin^3 x\cos x$ și F o primitivă a funcției f pe $\mathbb{R}$.

5p **a)** Să arate că există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $4F(x)=\sin^4 x+c$.

5p **b)** Să se calculeze aria subgraficului restricției funcției f la intervalul $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^{\pi} f^{2n+1}(x)dx=0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

VARIANTA 66

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 066

5p **1.** Să se calculeze $(2+i)(3-2i)-(1-2i)(2-i)$.

5p **2.** Să se arate că $\frac{1}{3}$ este o perioadă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{3x\}$, unde $\{\ \}$ este funcția parte fracționară.

5p **3.** Să se rezolve în $[0,\ 2\pi]$ ecuația $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$.

5p **4.** Să se calculeze $\frac{C_{20}^{10}}{C_{20}^{9}}$.

5p **5.** Se consideră punctele $A(2,3)$, $B(4,5)$, $C(2,2)$ și $D(m,n)$. Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât patrulaterul *ABCD* să fie paralelogram .

5p **6.** Să se calculeze $\cos^2 x$, știind că $\operatorname{tg} x=4$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 066

1. Fie dreptele $d_1: x+2y=3$, $d_2: 3x-4y=-1$, $d_3: 4x+3y=m$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine m astfel încât dreptele să fie concurente.

5p **b)** Să se demonstreze că există o infinitate de valori ale lui m pentru care vârfurile triunghiului determinat de cele trei drepte au toate coordonatele întregi.

5p **c)** Să se calculeze *m* pentru care triunghiul determinat de cele trei drepte are aria 1.

2. Fie polinomul $f=2X^3-aX^2-aX+2$, cu $a\in\mathbb{R}$ și cu rădăcinile complexe x_1,x_2,x_3.

5p **a)** Să se calculeze $f(-1)$.

5p **b)** Să se determine *a* pentru care polinomul are trei rădăcini reale.

5p **c)** Să se determine *a* astfel încât $|x_1|+|x_2|+|x_3|=3$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 066

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\sqrt{|1-x^2|}$.

5p **a)** Să se calculeze derivata funcției f pe intervalul $(-1,1)$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=x^{-2}f(x)$ este mărginită.

2. Fie funcția $f:[0,1]\to[1,3]$, $f(x)=x^4+x^2+1$. Se admite că funcția f are inversa g.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 \frac{2t+1}{f(\sqrt{t})}dt$.

5p **b)** Să se arate că $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 g(x)dx=3$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $\alpha\in[1,3]$, atunci are loc inegalitatea $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^\alpha g(x)dx\geq\alpha$.

VARIANTA 67

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 067

5p **1.** Să se determine primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi b_1, 6, b_3, 24, ...

5p **2.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(3-m^2)x+3$, să fie strict crescătoare.

5p **3.** Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{3\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}$.

5p **4.** Se consideră mulțimea *M* a tuturor funcțiilor definite pe $A=\{1,2,3\}$ cu valori în $B=\{5,6,7\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o funcție din mulțimea *M*, aceasta să fie injectivă .

5p **5.** Se consideră punctul *G*, centrul de greutate a triunghiului *ABC* . Prin punctul *G* se duce paralela la *AB* care intersectează dreapta *BC* în punctul *P* . Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{GP}=m\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Să se calculeze $\cos 2\alpha$, dacă se cunoaşte $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 067

1. Fie sistemul $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+my+z=1 \\ x+my+mz=-2 \end{cases}$, cu $m\in\mathbb{R}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se demonstreze că rangul matricei *A* nu poate fi doi, pentru nicio valoare a lui *m*.

5p **c)** Să se determine valorile întregi ale lui *m*, pentru care sistemul are soluție cu componente întregi.

2. Fie permutările $\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\gamma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, elemente ale grupului $(S_4,\cdot)$.

5p **a)** Să se verifice că γ este soluție a ecuației $\alpha x=x\beta$.

5p **b)** Să se arate că $\alpha^4=\beta^4$.

5p **c)** Să se determine o soluție a ecuației $x\beta^3=\alpha^3 x$ în S_4.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 067

1. Se consideră o funcție de două ori derivabilă $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, astfel încât $f(0)=0$ şi $f'(0)=1$.

5p **a)** Să se arate că ipoteza este verificată în cazul în care $f(x)=e^x\sin x, \forall x\in[-1,1]$.

5p **b)** Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{x}}=e^{f'(0)}$.

5p **c)** Să demonstreze că, dacă $n\in\mathbb{N}^*$, atunci $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^n(x)-x^n}{x^{n+1}}=\frac{nf''(0)}{2}$.

2. Fie funcțiile $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{1+x}$ şi $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\int_0^x f(t)dt$.

5p **a)** Să se arate că $g(x)=\ln(1+x)$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f^2(x)g(x)dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\ldots f\left(\frac{n}{n}\right)\le n\ln 2, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

VARIANTA 68

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 068

5p **1.** Să se calculeze $\frac{25}{4+3i}+\frac{25}{4-3i}$.

5p **2.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m^2-2)x-3$ să fie strict descrescătoare.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale pare de două cifre , acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se consideră punctele M și respectiv N astfel încât $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$ și $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Să se demonstreze că vectorii $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari .

5p **6.** Să se calculeze $\sin\frac{11\pi}{12}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 068

1. Se consideră matricele $A\in M_3(\mathbb{C})$ și $B=A-A^t$, unde A^t este transpusa matricei A.

5p **a)** Să se arate că $B+B^t=O_3$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\det(B)=0$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $x,y\in\mathbb{C}$ și matricea $xA+yA^t$ este inversabilă, atunci $x+y\neq 0$.

2. Se consideră ecuația $x^3+px+q=0$, $p,q\in\mathbb{R}$, și x_1,x_2,x_3 soluțiile complexe ale acesteia.

5p **a)** Știind că $p=1$ și $q=0$, să se determine x_1,x_2,x_3.

5p **b)** Să se determine p și q știind că $x_1=1+i$.

5p **c)** Să se arate că $12(x_1^7+x_2^7+x_3^7)=7(x_1^3+x_2^3+x_3^3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 068

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln\frac{2x+1}{2x+3}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in(0,\infty)$.

5p **b)** Să arate că $f(x)<0,\forall x\in(0,\infty)$.

5p **c)** Să demonstreze că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)$ este strict descrescător.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este impară.

5p **b)** Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 f(x)dx\leq e-2$.

VARIANTA 69

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 069

5p **1.** Să se determine $z\in\mathbb{C}$ știind că $\frac{\overline{z}+7i}{z}=6$.

5p **2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(50)$.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(x)=3x+1$. Să se demonstreze că funcția f nu este inversabilă.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o cifră *x*, aceasta să verifice inegalitatea $(x+1)!-x!\le 100$.

5p **5.** Să se arate că dreptele de ecuații $d_1:\ 2x-y+1=0$ și $d_2:\ 2x+y-1=0$ sunt simetrice față de axa *Oy*.

5p **6.** Să se calculeze $\cos\frac{7\pi}{12}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 069

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se verifice relația $A^3-A=A^2-I_3$.

5p **b)** Să se arate că $A^n-A^{n-2}=A^2-I_3,\forall n\in\mathbb{N},\ n\ge 3$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, suma elementelor matricei A^n este $n+3$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se definește polinomul $P_n=X^n-1\in\mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Să se determine rădăcinile complexe ale polinomului P_4.

5p **b)** Să se descompună polinomul P_3 în factori ireductibili în $\mathbb{C}[X]$.

5p **c)** Să se descompună polinomul P_{12} în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 069

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$.

5p **a)** Să se studieze derivabilitatea funcției f în origine.

5p **b)** Să arate că, pentru orice $k\in(0,\infty)$, există $c\in(k,k+1)$ astfel încât $f(k+1)-f(k)=\frac{1}{\sqrt[3]{c}}$.

5p **c)** Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\ge1}$, $a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-f(n)$, este strict descrescător.

2. Fie funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln(1+x)$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to0}\frac{F(x)}{x^5}$, unde $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $x\in[0,+\infty)$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1\ln(1+x)dx\le\frac{5}{12}$.

VARIANTA 70

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 070

5p **1.** Să se calculeze $(1+i)^{20}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Să se calculeze suma

$S=f(f(-10))+f(f(-9))+...+f(f(-1))+f(f(1))+...+f(f(9))+f(f(10))$.

5p **3.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+1$ este injectivă.

5p **4.** Să se calculeze $A_5^3-6C_5^3$.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ știind că distanța de la punctul $A(m,\,m+1)$ la dreapta $d:\ 3x-4y-1=0$ este 1.

5p **6.** Să se calculeze $\cos 75^\circ-\cos 15^\circ$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 070

1. Pentru orice două matrice $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se definește matricea $[A,B]=AB-BA$.

5p **a)** Pentru $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, să se calculeze $[A,A^2]$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $[A,A^*]=O_2$, unde A^* este adjuncta matricei A.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $A,B,C\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=O_2$.

2. Se consideră grupul multiplicativ $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ și mulțimea de numere reale $H=(0,1)$.

5p **a)** Să se arate că relația $a\circ b=\dfrac{ab}{ab+(1-a)(1-b)}$ definește o lege de compoziție pe H.

5p **b)** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}_+^*\to(0,1)$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ are proprietatea $f(xy)=f(x)\circ f(y),\ \forall x,y>0$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea $(H,\circ)$ ecuația $x\circ x\circ x=\dfrac{1}{2}$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 070

1. Se definește funcția $f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_0(x)=e^{2x}$ și, pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, se definește funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ prin $f_n(x)=f_{n-1}'(x)$.

5p **a)** Să se arate că $f_3(x)=8e^{2x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să determine asimptotele graficului funcției f_n.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_1(a)+f_2(a)+...+f_{n-1}(a)}{f_n(a)}$, unde a este un număr real.

2. Fie funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x\ln^2 x & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este integrabilă pe intervalul $[0,1]$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^e f\left(\dfrac{1}{x}\right)dx$.

VARIANTA 71

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 071

5p **1.** Să se calculeze $\log_2 2008 - \log_2 251 - 3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-\frac{1}{x^2}$. Să se arate că funcția f este pară.

5p **3.** Să se arate că valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-x^4$ este $f(0)$.

5p **4.** Să se determine $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $3C_n^1+2C_n^2=8$.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC şi punctele A',B',C' astfel încât $\overrightarrow{A'C}=2\overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{B'C}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{C'A}=3\overrightarrow{BC'}$. Să se arate că dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente.

5p **6.** Să se determine ecuația medianei corespunzătoare laturii BC a triunghiului ABC, ştiind că $A(2,2)$ şi că ecuațiile medianelor duse din B şi C sunt $2x+y-2=0$, respectiv $x-y+2=0$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 071

1. Se consideră determinantul de ordin $n\geq 2$, $D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & 0\\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 2 & 1\\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $D_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

5p **b)** Să se verifice că $D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}, \forall n\geq 4$.

5p **c)** Să se arate că $D_n=n+1, \forall n\geq 2$.

2. Un grup $(G,\cdot)$, cu elementul neutru e, are proprietatea (p) dacă $x^2=e$, $\forall x\in G$.

5p **a)** Să se verifice că mulțimea $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, împreună cu legea de compoziție dată de $(a,b)\cdot(c,d)=(a+c,\,b+d), \forall a,b,c,d\in\mathbb{Z}_2$ este un grup care are proprietatea (p).

5p **b)** Să se arate că dacă un grup G are proprietatea (p), atunci $(xy)^2=x^2y^2$, $\forall x,y\in G$.

5p **c)** Să se arate că orice grup care are proprietatea (p) este comutativ.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 071

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln(1+x)$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in(0,\infty)$.

5p **b)** Să arate că $f(x)>0, \forall x\in(0,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

2. Se consideră funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_1^2 t^x dt$.

5p **a)** Să se verifice că $1+(x+1)F(x)=2^{x+1}, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-1} F(x)$.

5p **c)** Să se arate că există o funcție continuă $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, astfel încât $F(x)=\int_1^x f(y)dy, \forall x\in(-1,\infty)$.

VARIANTA 72

inisterul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 072

5p **1.** Să se arate că numărul $\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2008}$ este real.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-\frac{1}{x}$. Să se arate că funcția f este impară .

5p **3.** Să se determine mulțimea *A*, ştiind că relația $f:[1,4]\to A$, $f(x)=x^2-x$ defineşte o funcție surjectivă.

5p **4.** Să se calculeze $C_{2008}^0\cdot 5^{2008}-C_{2008}^1\cdot 5^{2007}\cdot 4+C_{2008}^2\cdot 5^{2006}\cdot 4^2-\ldots+C_{2008}^{2008}\cdot 4^{2008}$.

5p **5.** Se consideră punctul $A(1,2)$ şi dreapta de ecuație $d:\ 4x-2y+5=0$. Să se determine ecuația perpendicularei duse din punctul *A* pe dreapta d.

5p **6.** Să se calculeze $\sin 75^\circ\cdot\cos 15^\circ$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 072

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se rezolve ecuația $\det(I_3+xA^2)=0$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine o matrice B cu proprietatea $B^2=A$.

5p **c)** Să se arate că $\forall C\in M_3(\mathbb{R}),\forall x\in\mathbb{R},\ \det(C+xA)\det(C-xA)\le(\det C)^2$.

2. Se consideră polinomul $p=X^3-X+m$ cu $m\in\mathbb{R}$ şi cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Ştiind că $m=-6$, să se determine x_1,x_2,x_3.

5p **b)** Să se calculeze $x_1^4+x_2^4+x_3^4$.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care polinomul p are toate rădăcinile întregi.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 072

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}$.

5p **a)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se calculeze $f'(x),x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty,-1)$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=|\sin nx|$ şi numărul $I_n=\int_\pi^{2\pi}\frac{f_n(x)}{x}dx$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^\pi f_2(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că $I_n\le\ln 2$.

5p **c)** Să se arate că $I_n=\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

VARIANTA 73

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 073

5p **1.** Să se calculeze $|5-12i|-|12+5i|$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x^4$. Să se calculeze $(f\circ f\circ f\circ f)(1)$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $2^x+4^x=20$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $A=\{0,5,10,...,2005\}$, acesta să fie divizibil cu 25.

5p **5.** Se consideră un triunghi *ABC*, cu lungimile laturilor $AB=c, AC=b$ și un punct *D* astfel încât $\overrightarrow{AD}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$. Să se arate că semidreapta [*AD* este bisectoarea unghiului *BAC*.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, astfel încât $\cos 2\alpha=\frac{1}{2}$. Să se calculeze $\cos\alpha$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 073

1. Fie matricea $M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$. Se asociază fiecărui punct $A(x,y)$ punctul $A_M(x',y')$, unde $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

5p **a)** Știind că $a=1,b=2,c=3,d=4$ și că $A(-1,1)$, să se determine coordonatele punctului A_M.

5p **b)** Știind că $a=1,b=2,c=2,d=4$, să se arate că toate punctele A_M se află pe dreapta $y=2x$.

5p **c)** Fie *A, B, C* trei puncte în plan. Dacă se notează cu *S* și S_M ariile triunghiurilor *ABC*, respectiv $A_MB_MC_M$, atunci $S_M=S\cdot|\det M|$.

2. Se consideră mulțimea $A=\left\{\begin{pmatrix}a & b & c\\ \hat{0} & a & d\\ \hat{0} & \hat{0} & a\end{pmatrix}\middle|\ a,b,c,d\in\mathbb{Z}_2\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii *A*.

5p **b)** Să se arate că *A* este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^2=X$, cu $X\in A$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 073

1. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{x}{1+x^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)g(x)\right)$.

5p **b)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=g(x)-f(x)$ în punctul $(1, h(1))$.

5p **c)** Să se arate că $f(x)>g(x),\forall x\in(0,\infty)$.

2. Se consideră funcția $f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=1$ și, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, se definește funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt$.

5p **a)** Să se arate că $f_1^2(x)=2f_2(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xf_n(x)+1}{f_{n+1}(x)+2}$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $g:[0,\pi]\to[0,\pi]$, $g(x)=f_1(x)\sin x$ în jurul axei *Ox*.

VARIANTA 74

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 074

5p **1.** Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $z^2+3z+4=0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2m+2$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției f să nu intersecteze axa Ox.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{2-x}-\sqrt[3]{x-2}=0$.

5p **4.** Să se arate că $C_{a+b}^{a}=C_{a+b}^{b}, \forall a,b\in\mathbb{N}^*$.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(3,3)$, $B(2,4)$ și $C(2m,1-m)$ să fie coliniare.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, astfel încât $\cos 2\alpha=-\frac{1}{2}$. Să se calculeze $\sin\alpha$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 074

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det A$.

5p **b)** Să se verifice relația $A(A^2+6I_3)=O_3$.

5p **c)** Să se arate că $\det(I_3+xA^2)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră $a,b\in\mathbb{Z}$ și polinomul $p=X^3+aX^2+X+b$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Știind că $a=b=1$, să se afle rădăcinile polinomului p.

5p **b)** Să se afle a și b, știind că polinomul p are rădăcina dublă 1.

5p **c)** Știind că $b=1$ și că p are o rădăcină rațională, să se determine valorile lui a.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 074

1. Se consideră funcția $f:(-2,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{2+x}{2-x}$.

5p **a)** Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.

5p **b)** Să se studieze monotonia funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=\int_1^2\left(\frac{t}{x}-e^x\right)^2dx$ și numerele $A=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx$, $B=\int_1^2\frac{e^x}{x}dx$.

5p **a)** Să se arate că $f(t)=At^2-2Bt+\frac{e^4-e^2}{2}$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $f(2B-t)=f(2B+t), \forall t\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\left(\int_1^2\frac{e^x}{x}dx\right)^2\leq\left(\int_1^2 e^{2x}dx\right)\left(\int_1^2\frac{1}{x^2}dx\right)$.

VARIANTA 75

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 075

5p **1.** Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ știind că $x(1+2i)+y(2-i)=4+3i$.

5p **2.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât punctul $A(m-1, m^2-3m)$ să se afle în cadranul II.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_3(\log_4(x^2-17))=1$.

5p **4.** Se consideră dezvoltarea $\left(2\sqrt{x}+\frac{3}{x}\right)^6$, $x>0$. Să se determine termenul independent de x.

5p **5.** Fie punctele $A(4,-2)$, $B(2,4)$ și $C(m,n)$. Să se determine $m,n \in \mathbb{R}$ astfel încât punctul C să fie centrul cercului circumscris triunghiului AOB.

5p **6.** Fie triunghiul ABC dreptunghic în A cu $AB=5$ și $BC=13$. Să se calculeze lungimea segmentului (BM), unde M este mijlocul segmentului (AC).

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 075

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $M_x=\frac{x}{3}A+\frac{1}{3x^2}B$, $x \in \mathbb{R}^*$.

5p **a)** Să se calculeze produsul AB.

5p **b)** Să se arate că $M_x M_y = M_{xy}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice x real nenul, $\det(M_x) \neq 0$.

2. Se consideră polinomul $p=X^4-aX^3-aX+1$, cu $a \in \mathbb{R}$ și cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

5p **a)** Să se verifice că $x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$.

5p **b)** Să se arate că polinomul p nu este divizibil cu X^2-1 pentru nicio valoare a lui a.

5p **c)** Să se arate că dacă $a=\frac{1}{2}$, atunci toate rădăcinile polinomului p au modulul 1.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 075

1. Se consideră $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$ și funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1+x)^\alpha-\alpha x$.

5p **a)** Să se studieze monotonia funcției f.

5p **b)** Să se demonstreze că $(1+x)^\alpha > 1+\alpha x, \forall x \in (-1,\infty)\setminus\{0\}, \forall \alpha \in (1,\infty)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $2f(x+y) \leq f(2x)+f(2y), \forall x, y \in [0,\infty)$.

2. Fie funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{1+x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^4 f^2(x)[x]dx$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

5p **c)** Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, dat de $a_n = f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n)-\int_0^n f(x)dx$, este convergent.

VARIANTA 76

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 076

5p **1.** Să se verifice dacă numărul $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ aparține mulțimii $\left\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

5p **2.** Se consideră ecuația $x^2-3x+1=0$, cu rădăcinile x_1 și x_2. Să se arate că $x_1^2+x_2^2\in\mathbb{N}$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}$.

5p **4.** Să se arate că oricare ar fi n natural, $n\geq 1$, are loc egalitatea $C_{2n}^{n}=2\cdot C_{2n-1}^{n}$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}+4\vec{j}$. Să se calculeze modulul vectorului $\vec{u}+\vec{v}$.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, astfel încât $\sin\alpha=\frac{3}{5}$. Să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 076

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1+a^2 & ab & ac \\ ba & 1+b^2 & bc \\ ca & cb & 1+c^2 \end{pmatrix}$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$ și A^* adjuncta sa.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Să se verifice că $\det(A^*)=(\det A)^2$.

5p **c)** Să se arate că matricea $A-I_3$ are rangul cel mult 1.

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup. Pentru fiecare element $a\in G$ se definește funcția $f_a:G\to G,\ f_a(x)=ax,\forall x\in G$.

5p **a)** Să se arate că f_a este bijectivă, pentru orice $a\in G$.

5p **b)** Să se arate că $f_a\circ f_b=f_{ab},\ \forall a,b\in G$.

5p **c)** Fie $\mathcal{F}(G)=\{f_a:G\to G\mid a\in G\}$. Să se arate că $\mathcal{F}(G)$ împreună cu operația de compunere a funcțiilor formează un grup.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 076

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă orizontală spre $+\infty$.

5p **b)** Să se studieze monotonia funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{n}\right)^n$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1},\ I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $(n+2)I_n=(n-1)I_{n-2}$ pentru orice $n\in\mathbb{N},\ n\geq 3$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

VARIANTA 77

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 077

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică de rație 2 cu $a_3 + a_4 = 8$. Să se determine a_1.

5p **2.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=1+x$. Să se calculeze $f(-1)+f(-2)+f(-3)+\ldots+f(-10)$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $4^x - 2^x = 56$.

5p **4.** Să se calculeze $A_4^3 - A_3^2 - C_4^2$.

5p **5.** Fie ABC un triunghi și G centrul său de greutate. Se consideră punctul M definit prin $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC}$. Să se arate că dreptele GM și AC sunt paralele.

5p **6.** Fie $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\sin\alpha = \frac{3}{4}$. Să se calculeze $\operatorname{tg}\alpha$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 077

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x - y - mz = 1 \\ mx + y + mz = 1 - m \\ mx + 3y + 3z = -1 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze determinatul matricei sistemului.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $m \in \mathbb{R}$, matricea sistemului are rangul cel puțin egal cu 2.

5p **c)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

2. Se consideră $\alpha > 0$ un număr real și mulțimea $G_\alpha = (\alpha, \infty)$. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $(x, y) \to x * y = 3xy - 6(x+y) + 7\alpha, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că pentru $\alpha = 2$, cuplul $(G_2, *)$ este grup abelian.

5p **b)** Să se arate că grupurile $(G_2, *)$ și $\left(\mathbb{R}_+^*, \cdot\right)$ sunt izomorfe, prin funcția $f: G_2 \to \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = 3x - 6$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $\alpha \geq 2$, mulțimea G_α este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația „$*$”.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 077

1. Se consideră o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât $xf(x) = e^x - 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este continuă în $x = 0$ dacă și numai dacă $f(0) = 1$.

5p **c)** Să se arate că dacă funcția f este continuă în $x = 0$, atunci ea este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{3+\cos x}$.

5p **a)** Să se determine o primitivă a restricției funcției f la intervalul $[0, \pi)$.

5p **b)** Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t)dt$.

VARIANTA 78

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 078

5p **1.** Să se calculeze $10^{\lg 7} - \sqrt[3]{343}$.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $2x^2 - 3x + 1 \le 0$.

5p **3.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \log_3 2^x - x$ este injectivă.

5p **4.** Să se calculeze numărul diagonalelor unui poligon convex cu 8 laturi.

5p **5.** Fie $ABCD$ un paralelogram și P un punct astfel ca $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PD}$. Să se arate că $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$.

5p **6.** Fie $a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $a + b = \frac{\pi}{4}$. Să se arate că $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = 1$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 078

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 5t = -1 \\ x + 9y + mz + t = 3 \\ 5x - 6y + 10z + nt = p \end{cases}$, $m, n, p \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine p astfel încât sistemul să admită o soluție (x_0, y_0, z_0, t_0) cu $z_0 = t_0 = 0$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $m, n \in \mathbb{R}$, rangul matricei sistemului este mai mare sau egal cu 2.

5p **c)** Să se determine $m, n, p \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil, iar matricea sistemului are rangul 2.

2. Fie mulțimea $Q_0 = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z},\ m, n \text{ impare} \right\}$ și $G = Q_0 \times \mathbb{Z}$. Pe G se definește legea de compoziție $(q_1, k_1) * (q_2, k_2) = (q_1 q_2, k_1 + k_2)$, $\forall q_1, q_2 \in Q_0$, $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian.

5p **b)** Să se calculeze $(1,1) * (1,2) * \ldots * (1,2008)$.

5p **c)** Să se arate că funcția $f: G \to \mathbb{Q}^*$, $f((q,k)) = q2^k$ este un izomorfism între grupurile $(G, *)$ și $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 078

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x(2\operatorname{arctg} f(x) - \pi)$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\ge 1}$, $I_n = \int_1^2 ((x-1)(2-x))^n \, dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $2(2n+1)I_n = nI_{n-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

VARIANTA 79

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 079

5p **1.** Să se arate că $\left(-\infty,\sqrt{2}\right)\cap\left(\log_2 3,\infty\right)=\varnothing$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$. Să se determine abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției *f* cu axa *Ox*.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=1$.

5p **4.** Să se determine suma termenilor raționali ai dezvoltării $\left(1+\sqrt{2}\right)^5$.

5p **5.** Fie punctele $A(1,2)$, $B(-1,3)$ și $C(0,4)$. Să se calculeze lungimea înălțimii duse din vârful A al triunghiului *ABC*.

5p **6.** Fie $x\in\mathbb{R}$, astfel încât $\text{tg}^2 x=6$. Să se calculeze $\cos^2 x$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 079

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+ & my+ & 2z=1 \\ x+(2m-1)y+ & & 3z=1 \\ x+ & my+(m-3)z=2m-1 \end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

5p **c)** Pentru $m=1$ să se determine soluțiile reale (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $2x_0^2-y_0^2+3z_0^2=14$.

2. Pe mulțimea $G=[0,1)$ se definește legea de compoziție $x*y=\{x+y\}$, unde $\{a\}$ este partea fracționară a numărului real *a*.

5p **a)** Să se calculeze $\frac{2}{3}*\frac{3}{4}$.

5p **b)** Să se arate că $(G,*)$ este grup abelian.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $x*x*x=\frac{1}{2}$, $x\in G$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 079

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{3x}+2x+1$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(f(-1)+f(-2)+f(-3)+...+f(-n)+n^2)$.

2. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0=1$ și $a_{n+1}=\int_0^{a_n}\sin\pi x\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze a_1.

5p **b)** Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

VARIANTA 80

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 080

5p **1.** Să se calculeze $(1-i)\left(1-i^2\right)\left(1-i^3\right)\ldots\left(1-i^{2008}\right)$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-1$. Să se arate că funcția $f\circ g$ este descrescătoare.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\sqrt[3]{2-x^2}\geq 1$.

5p **4.** Să se calculeze numărul funcțiilor injective $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4,5\}$.

5p **5.** Se consideră dreapta d de ecuație $x-2y+1=0$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $P(4,-1)$ și este paralelă cu dreapta d.

5p **6.** Fie $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\sin x=\frac{1}{2}+\cos x$. Să se calculeze $\sin 2x$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 080

1. Fie permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}\in S_5$ și mulțimea $A=\left\{\sigma^n \mid n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul inversiunilor lui σ.

5p **b)** Să se determine numărul elementelor mulțimii *A*.

5p **c)** Să se arate că toate elementele mulțimii *A* sunt permutări pare.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție și mulțimea $H=\left\{T\in\mathbb{R}\mid f(x+T)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că, dacă $T\in H$, atunci $-T\in H$.

5p **b)** Să se demonstreze că *H* este subgrup al grupului $(\mathbb{R},+)$.

5p **c)** Să se determine mulțimea *H* pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 080

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Să se studieze monotonia functiei *f*.

5p **b)** Să se arate că $(x^2+1)f''(x)+xf'(x)=\sqrt{x^2+1}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $-\infty$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1\frac{nx^n}{x^n+1}dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n=\ln 2-\int_0^1\ln(1+x^n)dx,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

VARIANTA 81

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 081

5p **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului $\log_2 500$.

5p **2.** Se consideră ecuația $x^2-2x+m=0$, $m\in\mathbb{R}$, care are rădăcinile reale x_1 și x_2. Știind că $|x_1-x_2|=1$, să se determine m.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\sqrt[3]{1-x}=1+x$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **4.** Să se calculeze $C_{16}^0+C_{16}^2+C_{16}^4+\ldots+C_{16}^{16}$.

5p **5.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ știind că dreptele de ecuații $x+y=1$ și $3x-ay=2$ sunt paralele.

5p **6.** Fie $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $a+b=\frac{\pi}{2}$. Să se arate că $\sin 2a+\sin 2b=2\cos(a-b)$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 081

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare cu coeficienți în $\mathbb{Z}_7$: $\begin{cases}\hat{2}x+my+\hat{3}z=\hat{4}\\ x+\hat{3}y+\hat{2}z=\hat{3}\\ x+\hat{3}y+z=\hat{1}\end{cases}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei sistemului.

5p **b)** Să se arate că pentru orice $m\in\mathbb{Z}_7$ sistemul admite soluția $x=\hat{6}$, $y=\hat{0}$, $z=\hat{2}$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $m=\hat{6}$, atunci sistemul are cel puțin două soluții.

2. Se consideră $a,b\in\mathbb{Q}$ și polinomul $f=X^3+X^2+aX+b$.

5p **a)** Să se determine a și b știind că $1+i$ este rădăcină a polinomului f.

5p **b)** Să se determine a și b știind că $1-\sqrt{2}$ este rădăcină a polinomului f.

5p **c)** Să se determine a și b știind că polinomul f are o rădăcină triplă.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 081

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^{-\frac{1}{x}}$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$.

5p **b)** Să se arate că funcția admite două puncte de extrem.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f spre $+\infty$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n:[0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\int_0^x t^n\sqrt{t^2+1}\,dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f_1(1)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f_n este strict crescătoare pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_n(x)}{x^{n+2}}$.

VARIANTA 82

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 082

5p **1.** Să se verifice că numărul $1+i$ este rădăcină a ecuației $z^4+4=0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+9$. Să se arate că vârful parabolei asociate funcției f se află pe dreapta de ecuație $x+y=7$.

5p **3.** Să se justifice de ce, dacă $f:\{1,2,3\}\to\{4,5,6\}$ este o funcție injectivă, atunci $f(1)+f(2)+f(3)=15$.

5p **4.** Fie M mulțimea numerelor naturale de două cifre. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea M, acesta să aibă ambele cifre impare.

5p **5.** Se consideră punctele $A(1,0), B(2,3)$ și $C(-1,4)$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Fie $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $\sin a=\frac{1}{4}$. Să se calculeze $\sin 3a$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 082

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare cu coeficienți reali $\begin{cases} x+ay+(b+c)z=0 \\ x+by+(c+a)z=0 \\ x+cy+(a+b)z=0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei sistemului.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $a,b,c\in\mathbb{R}.$, sistemul admite soluții nenule.

5p **c)** Să se rezolve sistemul, știind că $a\neq b$ și că $(1,1,1)$ este soluție a sistemului.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix}\middle| x,y\in\mathbb{R}, x^2+y^2\neq 0\right\}$.

5p **a)** Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

5p **b)** Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

5p **c)** Să se arate că funcția $f:(\mathbb{C}^*,\cdot)\to(G,\cdot)$ cu $f(x+iy)=\begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ este izomorfism de grupuri.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 082

1. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 0}$, definit prin $a_0=\sqrt{3}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se arate că $(a_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător.

5p **b)** Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

2. Fie funcția $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to(0,\infty)$, $f(x)=\int_0^x \frac{(\sin t+\cos t)\sin t}{\cos^2 t}dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **c)** Să se calculze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{x^2}$.

VARIANTA 83

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 083

5p **1.** Să se arate că numărul $\sqrt[3]{3}$ aparține intervalului $\left(\sqrt{2}, \log_2 5\right)$.

5p **2.** Să se afle valorile reale ale lui m știind că $x^2+3x+m\geq 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\cos 2x=\frac{1}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **4.** Într-o urnă sunt 49 de bile inscripționate cu numerele de la 1 la 49. Să se calculeze probabilitatea ca, extrăgând o bilă din urnă, aceasta să aibă scris pe ea un pătrat perfect.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{v}=m\vec{i}+4\vec{j}$, $m\in\mathbb{R}$. Să se determine m știind că vectorii sunt perpendiculari.

5p **6.** Să se calculeze produsul $P=\text{tg}1^\circ\cdot\text{tg}2^\circ\cdot\text{tg}3^\circ\cdot\ldots\cdot\text{tg}89^\circ$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 083

1. Fie sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+(m^2-m-1)y+(m+1)z=2 \\ 2x+(m^2-m-2)y+2(m+1)z=3 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se demonstreze că sistemul are soluție unică dacă și numai dacă $m\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

5p **b)** Să se arate că pentru $m\in\{0,1\}$ sistemul este incompatibil.

5p **c)** Să se arate că dacă $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ este soluție a sistemului, atunci $x_0-y_0+2008\cdot z_0=1$.

2. Se consideră mulțimile $H=\{a^2\mid a\in\mathbb{Z}_7\}$ și $G=\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}\mid a,b\in\mathbb{Z}_7, a\neq\hat{0} \text{ sau } b\neq\hat{0}\right\}$.

5p **a)** Să se determine elementele mulțimii *H*.

5p **b)** Fie $x,y\in H$ astfel încât $x+y=\hat{0}$. Să se arate că $x=y=\hat{0}$.

5p **c)** Să se arate că *G* este grup abelian în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 083

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}$.

5p **a)** Să se arate că dreapta de ecuație $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f.

5p **b)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **c)** Să se studieze derivabilitatea funcției *f*.

2. Se consideră funcțiile $f_n:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{1}{\cos^n x+\sin^n x}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{f_1(x)}dx$.

5p **b)** Să se arate că, dacă F este o primitivă a funcției f_4, atunci $F''(x)=\left(f_4(x)\right)^2\sin 4x$, $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\, f_4(x)dx=\frac{\pi}{4}$.

VARIANTA 84

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 084

5p **1.** Fie $z\in\mathbb{C}$. Să se arate că dacă $2z+3\bar{z}\in\mathbb{R}$, atunci $z\in\mathbb{R}$.

5p **2.** Să se determine funcția de gradul al doilea al cărei grafic conține punctele $(0,4),(1,-2)$ și $(-1,1)$.

5p **3.** Se se arate că funcția $f:(0,\infty)\to(1,3)$, $f(x)=\dfrac{x+3}{x+1}$ este bijectivă.

5p **4.** Să se determine numerele naturale n astfel încât $C_n^3=C_n^5$.

5p **5.** Se consideră punctele A,B,C,D astfel încât $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Să se arate că $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$.

5p **6.** Fie $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $a-b=\pi$. Să se arate că are loc relația $\cos a\cdot\cos b\le 0$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 084

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 2x-y+z=m \\ nx+y-2z=4 \end{cases}$, unde $m,n\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine *m* şi *n* pentru care sistemul admite soluția $x_0=2,\ y_0=2,\ z_0=1$.

5p **b)** Să se afle $n\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** Să se determine *m* şi *n* pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix}\hat{1} & a & b\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbb{Z}_3\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul de elemente al mulțimii *G*.

5p **b)** Să se arate că *G* este grup în raport cu operația de înmulțire a matricelor din $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$.

5p **c)** Să se arate că $X^3=I_3$, oricare ar fi $x\in G$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 084

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

5p **a)** Să se studieze monotonia funcției f.

5p **b)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(f(n)-f(n+1)\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x e^{-t}(t^2-3t+2)dt$.

5p **a)** Să se arate că $f(1)>0$.

5p **b)** Să se arate că funcția f admite două puncte de extrem.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x^2}$.

VARIANTA 85

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 085

5p **1.** Fie $z \in \mathbb{C}$. Să se arate că $i\left(z-\overline{z}\right) \in \mathbb{R}$.

5p **2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+(m+1)x+m$, unde $m\in\mathbb{R}$. Să se determine m pentru care parabola asociată funcției f este tangentă la axa *Ox*.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x+1}=5-x$.

5p **4.** Câți termeni ai dezvoltării $(1+2)^7$ sunt divizibili cu 14?

5p **5.** Fie ABC un triunghi echilateral de arie $\sqrt{3}$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Fie $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $a+b=\frac{3\pi}{2}$. Să se arate că $\sin 2a-\sin 2b=0$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 085

1. Fie *A* matricea coeficienților sistemului $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 3x-y+mz=0 \\ -x+2y+z=0 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită soluții nenule.

5p **c)** Să se arate că, dacă $m=0$, atunci expresia $\frac{z_0^2+y_0^2+x_0^2}{z_0^2-y_0^2-x_0^2}$ este constantă, pentru orice (x_0,y_0,z_0) soluție nenulă a sistemului.

2. Se consideră $a,b\in\mathbb{R}$ și polinomul $f=X^4-4X^3+6X^2+aX+b$, care are rădăcinile complexe x_1,x_2,x_3,x_4.

5p **a)** Să se determine *a* și *b* știind că f are rădăcina *i*.

5p **b)** Să se calculeze $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+(x_3-1)^2+(x_4-1)^2$.

5p **c)** Să se determine valorile reale ale numerelor *a* și *b* știind că toate rădăcinile polinomului *f* sunt reale.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 085

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele la graficul funcției f.

5p **b)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției *f*.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}}-e^{\frac{1}{x}}\right)$.

2. Fie șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ definit prin $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} t\,dt$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

VARIANTA 86

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 086

5p **1.** Să se arate că numărul $\frac{1+3i}{1-3i}+\frac{1-3i}{1+3i}$ este real.

5p **2.** Numere reale a şi b au suma 5 şi produsul 2. Să se calculeze valoarea sumei $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sin x=\cos x$.

5p **4.** Câte elemente ale mulțimii $A=\left\{x \mid x=C_7^k, k\in\mathbb{N},\ k\le 7\right\}$ sunt divizibile cu 7?

5p **5.** Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = 3$ şi $AD = 6$. Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

5p **6.** Să se calculeze suma $\cos 1^\circ+\cos 2^\circ+\cos 3^\circ+...+\cos 179^\circ$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 086

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+ay+(a+b)z=a+b \\ x+a^2y+(a^2+b^2)z=a^2+b^2 \\ x+a^3y+(a^3+b^3)z=a^3+b^3 \end{cases}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei sistemului.

5p **b)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie compatibil determinat.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice valori $a,b\in\mathbb{R}$, sistemul are soluție.

2. Se consideră polinomul $f=\hat{2}X+\hat{1}\in\mathbb{Z}_4[X]$.

5p **a)** Să se determine gradul polinomului f^2.

5p **b)** Să se arate că polinomul f este element inversabil al inelului $\left(\mathbb{Z}_4[X],+,\cdot\right)$.

5p **c)** Să se determine toate polinoamele $g\in\mathbb{Z}_4[X]$ de gradul 1 cu proprietatea că $g^2=\hat{1}$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 086

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^3-1}{x^3+1}$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$.

5p **b)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}f(2)f(3)...f(n)\right)^{n^2}$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\ge 1}, I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se arate că $nI_n=(n-1)I_{n-2}, \forall n\ge 3$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^n x dx$.

VARIANTA 87

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 087

5p **1.** Fie $z \in \mathbb{C}$ o rădăcină de ordin 3 a unității, diferită de 1. Să se calculeze $1+z+z^2$.

5p **2.** Să se determine soluțiile întregi ale inecuației $x^2+x-6 \le 0$.

5p **3.** Fie funcția $f:(1,\infty)\to(2,\infty)$, $f(x)=x^2+1$. Să se arate că funcția f este bijectivă.

5p **4.** Câte numere naturale de la 1 la 100 sunt divizibile cu 6 și cu 8?

5p **5.** Se consideră vectorii $\overrightarrow{v_1}=a\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ și $\overrightarrow{v_2}=3\vec{i}+5\vec{j}$, cu $a \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile lui *a* pentru care vectorii $\overrightarrow{v_1}$ și $\overrightarrow{v_2}$ sunt coliniari.

5p **6.** Triunghiul *ABC* are laturile $AB=3$, $BC=5$ și $AC=7$. Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul *ABC*.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 087

1. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, care are toate elementele egale cu 1.

5p **a)** Să se demonstreze că $A^2=3A$.

5p **b)** Să se calculeze $\det\left(I_3+A^3\right)$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ este o matrice cu proprietatea $AB=BA$, atunci suma elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană ale lui *B* este aceeași.

2. Fie $\mathbb{Z}_{21}=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},...,\widehat{20}\}$ inelul claselor de resturi modulo 21.

5p **a)** Să se arate că suma elementelor inelului este $\hat{0}$.

5p **b)** Să se calculeze $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot...\cdot\widehat{20}$.

5p **c)** Să se determine numărul elementelor neinversabile ale inelului.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 087

1. Se consideră funcția $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=a^x-x^a$, $a>0$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(1)$.

5p **b)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=a$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $f(x)\ge 0, \forall x>0$, atunci $a=e$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\ge 1}$, $I_n=\int_1^e \ln^n x\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n=e-nI_{n-1}, \forall n\ge 2$.

5p **c)** Să se arate că șirul $(I_n)_{n\ge 1}$ este convergent.

VARIANTA 88

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 088

5p **1.** Să se calculeze $\frac{4+3i}{3-4i}-\frac{2+i}{1-2i}$.

5p **2.** Să se determine imaginea intervalului $[-2,1]$ prin funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x+1$.

5p **3.** Să se rezolve ecuația $\arcsin\frac{1}{2}+\arccos x=\frac{\pi}{2},\ x\in[-1,1]$.

5p **4.** Fie mulțimea $A=\{1,2,3,4,5\}$ și M mulțimea funcțiilor f definite pe A cu valori în A. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o funcție din mulțimea M, aceasta să fie bijectivă.

5p **5.** Fie punctele $M(0,3)$, $N(1,1)$, $P(-1,2)$. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al triunghiului MNP.

5p **6.** Fie $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\sin a=\frac{4}{5}$. Să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 088

1. Fie matricea $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se notează cu A^t transpusa matricei A și cu $\operatorname{Tr}(A)$ suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A.

5p **a)** Să se demonstreze că $\operatorname{Tr}(A+A^t)=2\operatorname{Tr}(A)$.

5p **b)** Să se demonstreze că dacă $\operatorname{Tr}(A\cdot A^t)=0$, atunci $A=O_2$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă suma elementelor matricei $A\cdot A^t$ este egală cu 0, atunci $\det(A)=0$.

2. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}1&2\\3&-1\end{pmatrix}$ și mulțimea $K=\{aI_2+bA\,|\,a,b\in\mathbb{Q}\}$.

5p **a)** Să se arate că $A^2\in K$.

5p **b)** Să se arate că mulțimea K este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

5p **c)** Să se arate că pentru orice $X\in K, X\neq O_2$ există $Y\in K$ astfel încât $XY=I_2$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 088

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-f(x)}{x^3}$.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=(x-1)f(x)$ admite exact un punct de extrem.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq1}, I_n=\int_0^1 x^{2n}\sin x\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că șirul $(I_n)_{n\geq1}$ este convergent.

5p **c)** Să se demonstreze că $I_n=2n\sin1-\cos1-2n(2n-1)I_{n-1},\forall n\geq2$.

VARIANTA 89

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 089

5p **1.** Să se determine numerele complexe z care verifică relația $z+3i=6\cdot\bar{z}$.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $|1-2x|=|x+4|$.

5p **3.** Să se determine imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+4x^2}$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor strict monotone $f:\{1,2,3\}\to\{5,6,7,8\}$.

5p **5.** Să se demonstreze că pentru orice punct *M* din planul paralelogramului *ABCD* are loc egalitatea $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

5p **6.** Fie *a* și *b* numere reale, astfel încât $a+b=\dfrac{\pi}{3}$. Să se arate că $\sin 2a-\sin 2b-\sin(a-b)=0$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 089

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x_1-x_2=a \\ x_3-x_4=b \\ x_1+x_2+x_3+x_4=1 \end{cases}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice valori ale lui *a* și *b*, sistemul este compatibil,

5p **b)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită o soluție (x_1,x_2,x_3,x_4) cu proprietatea că x_1,x_2,x_3,x_4 și x_1+x_2 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă sistemul are o soluție cu toate componentele strict pozitive, atunci $a+b<1$.

2. Fie polinomul $f=X^3-3X^2+5X+1\in\mathbb{R}[X]$ și $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$ rădăcinile sale.

5p **a)** Să se calculeze $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$.

5p **b)** Să se arate că polinomul f nu are nicio rădăcină întreagă.

5p **c)** Să se calculeze $x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 089

1. Pentru fiecare $a>0$, se consideră funcția $f_a:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f_a(x)=(x+a)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

5p **a)** Să se calculeze $f_a'(x)$, $x>0$.

5p **b)** Să se determine a astfel încât funcția f_a să fie convexă pe tot domeniul de definiție.

5p **c)** Să se arate că graficul funcției f_a admite asimptotă spre $+\infty$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se arate că $nI_n=(n-1)I_{n-2}$, $\forall n\geq 3$.

5p **c)** Să se demonstreze că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

VARIANTA 90

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 090

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu rația 3. Știind că suma primilor 10 termeni ai progresiei este 150, să se afle a_1.

5p **2.** Să se determine toate perechile (a,b) de numere reale pentru care $a^2+b^2=a+b=2$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\lg x+\lg(9-2x)=1$.

5p **4.** Fie mulțimea $M=\{1,2,3,...,100\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea *M*, acesta să nu fie divizibil cu 7.

5p **5.** Se consideră punctele $A(0,2)$, $B(1,-1)$ și $C(5,1)$. Să se determine ecuația dreptei duse din vârful *A*, perpendiculară pe dreapta *BC*.

5p **6.** Să se arate că $1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=0$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 090

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{A_x=\begin{pmatrix}1 & 2x & 5x^2-2x\\ 0 & 1 & 5x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că A_x este inversabilă, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $A_xA_y\in G, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se determine inversa matricei $\underline{A_3}$.

2. Se consideră polinoamele $f=X^3+X+\hat{1}\in\mathbb{Z}_3[X]$ și $g=\hat{2}X+\hat{1}\in\mathbb{Z}_3[X]$.

5p **a)** Să se arate că $f(x)=g(x)$, $\forall x\in\mathbb{Z}_3$.

5p **b)** Să se determine rădăcinile polinomului *f* din $\mathbb{Z}_3$.

5p **c)** Să se descompună polinomul *f* în factori ireductibili în $\mathbb{Z}_3[X]$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 090

1. Se consideră funcțiile $f_n:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n+\ln x, n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției f_1.

5p **b)** Să se demonstreze că funcțiile $g_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g_n(x)=f_n(x)+f_n\left(\frac{1}{x}\right)$ sunt convexe.

5p **c)** Admitem că ecuația $f_n(x)=2^n$ are soluția unică x_n. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ converge la 2.

2. Fie $a\in[0,1]$ și $I_n=\int_0^a\frac{x^n}{x+1}dt, n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se demonstreze că $I_n+I_{n-1}=\frac{a^n}{n}, \forall n\geq 2$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

VARIANTA 91

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 091

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z=\left(\sqrt{2}-1+i\left(\sqrt{2}+1\right)\right)^2$.

5p **2.** Să se determine numerele reale x și y știind că $x+2y=1$ și $x^2-6y^2=1$.

5p **3.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$ nu este injectivă.

5p **4.** Să se calculeze $C_{10}^3-C_9^3$.

5p **5.** Fie $ABCD$ un paralelogram. Știind că vectorii $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ au același modul, să se arate că $ABCD$ este dreptunghi.

5p **6.** Să se calculeze $\mathrm{tg}15^\circ$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 091

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ x & 4\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ știind că $A^2=5A$.

5p **b)** Pentru $x=2$ să se calculeze A^{2008}.

5p **c)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\mathrm{rang}\left(A+A^t\right)=1$.

2. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ și polinomul $f=2X^4+2(a-1)X^3+(a^2+3)X^2+bX+c$.

5p **a)** Să se afle a,b,c, dacă $a=b=c$, iar restul împărțirii lui f la $X+1$ este 10.

5p **b)** Dacă $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ sunt rădăcinile lui f, să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

5p **c)** Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ și rădăcinile polinomului f în cazul în care f are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 091

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(e^x)\right)^{\frac{1}{x}}$.

2. Fie funcțiile $F,f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{\sin^2 x}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția F este strict crescătoare.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $x>0$, există $c_x\in(0,x)$ astfel încât $F(x)=xf(c_x)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x}$.

VARIANTA 92

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 092

5p **1.** Numerele reale pozitive *a,b,c,d* sunt în progresie geometrică. Știind că $d-a=7$ și $c-b=2$, să se afle rația progresiei.

5p **2.** Să se determine valorile reale nenule ale lui *m* știind că $mx^2+x-2\le 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în intervalul $(0,5)$ ecuația $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.

5p **4.** Să se determine numărul $n=C_{10}^0-C_{10}^2+C_{10}^4-C_{10}^6+C_{10}^8$.

5p **5.** Să se determine valorile reale ale lui *a* pentru care vectorii $\vec{u}=(a-1)\vec{i}-(2a+2)\vec{j}$ și $\vec{v}=(a+1)\vec{i}-\vec{j}$ sunt perpendiculari.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$. Să se calculeze $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 092

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid AXA^t=O_2\}$, unde A^t este transpusa matricei *A*.

5p **a)** Să se arate că dacă $X,Y\in G$, atunci $X+Y\in G$.

5p **b)** Să se arate că dacă $X\in G$, suma elementelor lui *X* este egală cu 0.

5p **c)** Să se arate că dacă $X\in G$ și $\det X=0$, atunci $X^n\in G$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-6X^3+18X^2-30X+25\in\mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Să se arate că polinomul f se divide cu X^2-2X+5.

5p **b)** Să se arate că polinomul f nu are nicio rădăcină reală.

5p **c)** Să se arate că rădăcinile polinomului f au același modul.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 092

1. Se consideră funcția $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(\ln x)$.

5p **a)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=e$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este concavă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{f'(x)}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^{2\pi} xf(x)\,dx$.

VARIANTA 93

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 093

5p **1.** Fie z o rădăcină a ecuației $z^2+2z+4=0$. Să se calculeze modulul numărului complex z.

5p **2.** Să se determine funcțiile de gradul întâi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care sunt strict crescătoare și îndeplinesc condiția $f(f(x))=4x+3,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $2^x+4^{\frac{x+1}{2}}=12$.

5p **4.** Care este probabilitatea ca, alegând un număr natural de la 1 la 1000, acesta să fie cub perfect?

5p **5.** Se consideră punctele $A(1,2)$ și $B(3,4)$. Să se calculeze distanța de la originea axelor la dreapta AB.

5p **6.** Să se determine $\alpha\in(0,2\pi)$ astfel ca $\operatorname{tg}\alpha=\sin\alpha$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 093

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze A^3.

5p **b)** Să se determine $\left(A\cdot A^t\right)^{-1}$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^2=A,\ X\in M_2(\mathbb{R})$.

2. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ și polinomul $f=X^{30}-3X^{20}+aX^{10}+3X^5+aX+b\in\mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se arate că restul împărțirii polinomului f la $X+1$ nu depinde de a.

5p **b)** Să se determine a și b astfel încât restul împărțirii polinomului f la X^2-X să fie X.

5p **c)** Să se determine a și b astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $(X-1)^2$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 093

1. Pentru fiecare $t\in\mathbb{R}$, se consideră funcția $f_t:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_t(x)=x^3+t^2x$.

5p **a)** Să se calculeze $f_t'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că funcția f_t este strict crescătoare.

5p **c)** Să se arate că funcția f_t este inversabilă.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\int_0^x(t^2+1)\sqrt{|t|}\,dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f(1)$.

5p **b)** Să se arate că f este funcție impară.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x^2\sqrt{x}}$.

VARIANTA 94

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 094

5p **1.** Să se calculeze $\left(\frac{(1-2i)(3i-1)}{5}\right)^4$.

5p **2.** Să se arate că funcția $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$ este impară.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $5^x+5^{-x}=2$.

5p **4.** Care este probabilitatea ca, alegând un număr de trei cifre, prima sa cifră să fie număr prim?

5p **5.** Fie *ABC* un triunghi și *O* centrul cercului circumscris lui. Știind că $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OC}$, să se arate că triunghiul *ABC* este dreptunghic.

5p **6.** Fie $\alpha\in\mathbb{R}$, astfel încât $\sin\alpha+\cos\alpha=1$. Să se calculeze $\operatorname{tg}2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 094

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}4 & 8\\ -2 & -4\end{pmatrix}$ și mulțimea $M=\{X(a)\mid X(a)=I_2+aA,\ a\in\mathbb{R}\}$.

5p **a)** Să se arate că $X(a)X(b)=X(a+b)$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că există $e\in\mathbb{R}$ astfel încât $X(a)\cdot X(e)=X(a)$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze produsul $X(2)X(3)...X(2008)$.

2. Fie $f\in\mathbb{R}[X]$ un polinom astfel încât $f\left(X^2+3X+1\right)=f^2(X)+3f(X)+1$ și $f(0)=0$.

5p **a)** Să se determine $f(-1)$.

5p **b)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la $X-5$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f=X$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 094

1. Se consideră funcțiile $f_n:[0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^{n+1}-(n+2)x+n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că graficele funcțiilor f_n nu admit asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că, pentru $\forall n\in\mathbb{N}^*$, ecuația $f_n'(x)=0$ are o unică soluție în intervalul $[0,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, unde x_n este unica soluție a ecuației $f_n'(x)=0$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{2n+1}$, $\forall n\geq 1$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

VARIANTA 95

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 095

5p **1.** Fie $x \in \mathbb{R}^*$. Să se calculeze $\left[\frac{1}{x^2+1}\right]$. ($[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a).

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x+\frac{1}{|1+x|}=1$.

5p **3.** Fie $a \in (0,\infty)$, $a \neq 1$. Să se studieze monotonia funcției $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=a^x+\log_a x$.

5p **4.** Care este probabilitatea ca, alegând un număr de trei cifre, produsul cifrelor sale să fie impar?

5p **5.** Să se demonstreze că vectorii $\vec{u}=3\vec{i}+a\vec{j}$ și $\vec{v}=(a+1)\vec{i}+a\vec{j}$ nu pot fi perpendiculari pentru nicio valoare reală a numărului a.

5p **6.** Să se arate că $\sin x+\sin 3x+\sin 5x=(1+2\cos 2x)\cdot\sin 3x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 095

1. Se consideră $n\in\mathbb{N}^*$ și matricea $A_n\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, care are elementele de pe diagonala principală egale cu 2 și restul elementelor egale cu 1.

5p **a)** Să se calculeze $\det(2A_2)$.

5p **b)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(A_3+xI_3)=0$.

5p **c)** Să se arate că A_4 are inversă, aceasta având elementele de pe diagonala principală egale cu $\frac{4}{5}$ și restul elementelor egale cu $-\frac{1}{5}$.

2. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ și polinomul $f=X^3-aX^2+bX-c\in\mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se determine a,b,c pentru care $x_1=2$ și $x_2=1+i$.

5p **b)** Să se arate că resturile împărțirii polinomul f la $(X-1)^2$ și la $(X-2)^2$ nu pot fi egale, pentru nicio valoare a parametrilor a,b,c.

5p **c)** Să se arate că, dacă toate rădăcinile polinomului f sunt reale și a,b,c sunt strict pozitive, atunci x_1,x_2,x_3 sunt strict pozitive.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 095

1. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x+1)-f(x)-f\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că $g(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{1+1+1^2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+2+2^2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+3+3^2}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+n+n^2}\right)$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1 e^{-x}x^n\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n=nI_{n-1}-\frac{1}{e}$, pentru orice $n\geq 2$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

VARIANTA 96

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 096

5p **1.** Fie a,b,c numere naturale nenule în progresie geometrică. Știind că $a+b+c$ este un număr par, să se arate că numerele a,b,c sunt pare.

5p **2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+3x+2$. Să se arate că $f(a)+f(a+1)\geq 0$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\log_2 x+\log_4 x>3$.

5p **4.** Să se determine numerele naturale n pentru care $C_n^1+C_n^2=120$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=2\vec{i}-a\vec{j}$ și $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}$. Să se arate că unghiul format de cei doi vectori este obtuz dacă și numai dacă $a>2$.

5p **6.** Fie ABC un triunghi cu $\sin A=\frac{1}{2}$, $\sin B=1$ și $BC=4$. Să se calculeze aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 096

1. Pentru orice matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se notează $\mathrm{Tr}(A)=a+d$.

5p **a)** Să se demonstreze că $A^2-\mathrm{Tr}(A)A+(\det A)I_2=0_2$.

5p **b)** Să se demonstreze că, dacă $\mathrm{Tr}(A)=0$, atunci $A^2B=BA^2$, pentru orice matrice $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se arate că dacă $\mathrm{Tr}(A)\neq 0$, $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $A^2B=BA^2$, atunci $AB=BA$.

2. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ și polinomul $f=X^4-6X^3+13X^2+aX+b\in\mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se calculeze suma pătratelor celor 4 rădăcini ale polinomului f.

5p **b)** Să se determine a,b astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $(X-1)(X-3)$.

5p **c)** Să se determine a,b astfel încât polinomul f să aibă două rădăcini duble.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 096

1. Fie mulțimea $A=\mathbb{R}\setminus\{1,2,3,...,2008\}$ și funcția $f:A\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+...+\frac{1}{x-2008}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **b)** Știind că $a\in\mathbb{R}$, să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x)=a$.

5p **c)** Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției f.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $[0,\infty)$.

5p **c)** Să se arate că șirul $(f(n))_{n\geq 1}$ este convergent.

VARIANTA 97

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 097

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $3!$, $\sqrt[3]{100}$, $\log_2 32$.

5p **2.** Să se arate că $x^2+3xy+4y^2\geq 0$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin 2x=\cos x$.

5p **4.** Să se calculeze $A_5^3-4C_6^2$.

5p **5.** În sistemul de coordonate *xOy* se consideră punctele *A,B,C* astfel încât $A(1,3), B(2,5)$ și $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$. Să se determine coordonatele punctului *C*.

5p **6.** Fie *ABC* un triunghi care are $BC=8$ și $\cos A=\frac{3}{5}$. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului *ABC*.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 097

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se determine A^{-1}.

5p **c)** Să se arate că $(I_3+A)^n=2^{n-1}(I_3+A)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ considerăm polinomul $f_n=X^{3n}+2X^2-4X-1\in\mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Să se arate că f_1 nu este divizibil cu polinomul $g=X-2$.

5p **b)** Să se determine suma coeficienților câtului împărțirii polinomului f_3 la $X-1$.

5p **c)** Să se arate că restul împărțirii polinomului f_n la polinomul $h=X^2+X+1$ nu depinde de n.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 097

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $[0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(f(x+1)-f(x)\right)$.

5p **c)** Să se rezolve inecuația $f(x)<x-\frac{x^3}{3}$, $x\in\mathbb{R}$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{(1+x^2)^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 x(1+x^2)f(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x t^4 f(t)dt$ este strict crescătoare.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{R}$, are loc relația $\int_1^a f(x)dx<\frac{1}{4}$.

VARIANTA 98

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 098

5p **1.** Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z + 2\bar{z} = 3 + i$. Să se calculeze modulul numărului z.

5p **2.** Să se dea un exemplu de ecuație de gradul al doilea cu coeficienți reali care are o rădăcină egală cu $\sqrt{3}$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_x 2 + \log_{\sqrt{x}} 2 = 9$.

5p **4.** Fie mulțimea $A = \{1,2,3,4,5\}$. Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii A care conțin cel puțin un număr par.

5p **5.** Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc egalitatea $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC}$.

5p **6.** Știind că $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\sin a = \frac{3}{5}$, să se calculeze tg a.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 098

1. Fie sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea sistemului să aibă rangul 2.

5p **b)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să aibă soluții $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ care verifică relația $x_0 + y_0 + z_0 = 4$.

5p **c)** Să se determine $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât sistemul să aibă o soluție unică $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{Z}^3$.

2. Fie $p \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = X^4 - 4X + p \in \mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se determine p astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $X + 1$.

5p **b)** Să se determine p astfel încât polinomul f să aibă o rădăcină reală dublă.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $p \in \mathbb{R}$, polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 098

1. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ se definește funcția $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + nx - 1$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, funcția f_n este convexă.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, ecuația $f_n(x) = 0$ are soluție unică.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$, unde x_n este unica soluție a ecuației $f_n(x) = 0$.

2. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$, $g(x) = \int_{-x}^{x} f(t) \cos t \, dt$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

5p **b)** Să se calculeze $g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

VARIANTA 99

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 099

5p **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

5p **2.** Fie f o funcție de gradul întâi. Să se arate că funcția $f \circ f$ este strict crescătoare.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $2x+\sqrt{16+x^2}=11$.

5p **4.** Câte funcții $f:\{1,2,3,\ldots,10\}\to\{0,1\}$ au proprietatea că $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(10)=2$?

5p **5.** Se consideră punctele $M(1,2), N(2,5)$ și $P(3,m)$, $m\in\mathbb{R}$. Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=5$.

5p **6.** Să se determine cel mai mare element al mulțimii $\{\cos 1, \cos 2, \cos 3\}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 099

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\det(AA^t+xB)$.

5p **a)** Să se calculeze AA^t.

5p **b)** Să se arate că $f(0)\geq 0$.

5p **c)** Să se arate că există $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=mx+n$.

2. Se consideră mulțimea de numere complexe $G=\{\cos q\pi+i\sin q\pi \mid q\in\mathbb{Q}\}$.

5p **a)** Să se arate că $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\in G$.

5p **b)** Să se arate că G este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea numerelor complexe.

5p **c)** Să se arate că polinomul $f=X^6-1\in\mathbb{C}[X]$ are toate rădăcinile în G.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 099

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2+2x+1}-\sqrt[3]{x^3-x+1}$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$.

5p **b)** Să se arate că graficul funcției admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{n}\right)^n$.

2. Se consideră funcțiile $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\int_{\frac{1}{e}}^{x} t^n\ln t\,dt$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $f_1(e)$.

5p **b)** Să se arate că funcțiile f_n sunt descrescătoare pe intervalul $(0,1)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1)$.

VARIANTA 100

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 100

5p **1.** Să se arate că $\sqrt{6+4\sqrt{2}} \in \left\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\right\}$.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $|1+x| = 1-x$.

5p **3.** Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\sqrt[6]{x^2-2x+1} = \sqrt[3]{3-x}$.

5p **4.** Să se arate că 7 divide C_7^k, oricare ar fi $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

5p **5.** Fie *ABC* un triunghi și *G* centrul său de greutate. Știind că $A(1,1), B(5,2)$ și $G(3,4)$, să se calculeze coordonatele punctului *C*.

5p **6.** Fie $a \in \mathbb{R}$ cu $\operatorname{tg} a = \frac{2}{5}$. Să se calculeze $|\sin a|$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 100

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $(I_2 + A)^2 = I_2 + A$.

5p **b)** Să se demonstreze că mulțimea $\{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este finită.

5p **c)** Să se calculeze $\det\left(2008I_2 - A + A^2 - A^3 + ... + A^{2008}\right)$.

2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $a,b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b$, $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ și polinomul $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$.

5p **a)** Să se arate că $f(1) + f(-1)$ este număr par.

5p **b)** Să se arate că, dacă $f(2)$ și $f(3)$ sunt numere impare, atunci polinomul *f* nu are nicio rădăcină întreagă.

5p **c)** Să se arate că polinomul $g = X^3 - X + 3a + 1$ nu poate fi descompus în produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 100

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x^3 - x^2 + x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se arate că funcția f este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f^{-1}(x)}{\ln x}$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{x^2+3x+2}\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_{n+2} + 3I_{n+1} + 2I_n = \dfrac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} nI_n$.